ROGERII JOSEPHI BOSCOVICH OPERA PERTINENTIA AD OPTICAM, ET ASTRONOMIAM...

NOUVEAUX OUVRAGES

DE MONSIEUR

L'ABBÉ BOSCOVICH

APPARTENANTS PRINCIPALEMENT

A' L'OPTIQUE, ET A' L'ASTRONOMIE

EN CINQ VOLUMES

DÉDIÉS

AU ROI.

TOME SECOND.

A' BASSAN MDCCLXXXV.

& se vendent

A' VENISE, CHEZ REMONDINI.

Avec Approbation, & Privilége.

ROGERII JOSEPHI
BOSCOVICH
OPERA PERTINENTIA
AD OPTICAM, ET ASTRONOMIAM
Maxima ex parte nova, & omnia hucusque inedita,

IN QUINQUE TOMOS DISTRIBUTA

LUDOVICO XVI.
GALLIARUM REGI POTENTISSIMO DICATA.

TOMUS SECUNDUS.

BASSANI MDCCLXXXV.

PROSTANT
VENETIIS APUD REMONDINI.
Superiorum Permissu, ac Privilegio.

INDEX

OPUSCULORUM, CAPITUM, PARAGRAPHORUM, &c.

Quæ in hoc secundo Tomo continentur.

OPUSCULUM I.

AP-

APPENDIX AD OPUSCULUM I.

SUPPLEMENTUM OPUSCULI PRIMI.

OPUSCULUM II.

OPUSCULUM III.

OPUSCULUM IV.

OPUSCULUM V.

OPUSCULUM VI.

OPUSCULUM VII.

OPUSCULUM VIII.

OPUSCULUM IX.

EXTRAIT

OPU-

OPUSCULUM I.

De correctionibus pertinentibus ad oculares, quibus accedit correctio solius erroris figuræ sphæricæ objectivorum.

PRÆFATIO.

Agitur in hoc Opusculo potissimum de ocularibus, tam quod pertinet ad supprimendos colores ab iis inductos, quam quod pertinet ad vitia provenientia ab errore figuræ sphæricæ ipsarum ocularium, & eorum remedio. Occasione arrepta accedit correctio erroris figuræ sphæricæ pro objectivis independens ab errore diversæ refrangibilitatis, qui ab ea correctione, quam hic proponemus, non tollitur. Quæcumque autem hic proponentur, eo utiliora erunt, quod fere omnia non indigent, nisi vitro communi. Habebuntur plures regulæ admodum simplices, quæ proderunt communibus etiam telescopiorum constructoribus. Sunt, qui amant formulas admodum generales; sed ad eas non pervenitur, nec eæ ad casus particulares applicantur, nisi per calculos admodum complicatos: plurima theoremata particularia, & elegantia, & simplicia, licet iis contineantur, effugiunt mentis oculos, ob ipsam multiplicitatem consectariorum, quæ ab ejusmodi generalissimis solutionibus profluunt, ubi inter quamplurima inutilia conduntur quodammodo velut demersa. Posteaquam ea methodis particularibus sunt inventa, haud difficulter evolvuntur etiam ex illis generalibus, ubi illud accidit, quod in massa litterarum apud typographos. Habentur ibi omnia opera tam quæ huc usque sunt edita, quam quæcumque edi pos-

sunt. Poema Virgilii inde facile eruitur, posteaquam ab ipso olim conscriptum habetur præ manibus a typographo, qui ipsum nunquam inde eruisset, nisi videret jam erutum. Idcirco generalissimis ejusmodi methodis sepositis, ego hic particularia quædam sum persecutus, quæ & magis accommodata sunt ad captum communem, & statim exhibent solutiones, & regulas admodum elegantes, & simplices.

CAPUT I.

De correctione colorum provenientium ab ocularibus.

1. OBJECTIVUM compositum more Dollondiano e binis vitris, quæ pari refractione possint inducere distractionem radiorum heterogeneorum satis diversam, potest, si minus accurate, saltem proxime conjungere focos pertinentes ad bina genera radiorum: satis est ad eam rem inducere partibus, e quibus componitur, curvaturas respondentes eorum qualitatibus refractivis, & distractivis, juxta ea, quæ diximus in Opusculo II Tom. I. Ejusmodi objectiva idcirco appellata sunt acromatica, & telescopia dioptrica ipsis instructa itidem acromatica græco vocabulo exprimente colorum expertia. Ea objectiva essent accurate acromatica; si conjungerent simul focos omnes pertinentes ad omnia genera radiorum coloratorum: telescopia essent acromatica accurate; si post ejusmodi unionem factam ab objectivo non haberetur nova separatio inducta ab ocularibus.

2. Quod pertinet ad unionem simultaneam colorum omnium, ego quidem, institutis quam plurimis experimentis, uti exposui in Opusculo I Tom. I, circa plurima vitrorum genera, crystallum montanam, & aquam, comparando inter se multa earum substantiarum binaria inveni, per binas substantias non posse conjungi, nisi bina genera radiorum coloratorum, quod quidem accidit, quia qualitates distractivæ pertinentes ad diversa binaria colorum non habent rationem eandem inter se in diversis substantiis. Si ea ratio esset eadem; conjunctis binis coloribus per prismata

mata exiguorum angulorum, vel per lentes continentes exiguas partes totarum superficierum sphæricarum, conjungerentur simul & reliqui: cum vero ea ratio non sit eadem; mutato angulo prismatis alterius, unio colorum habetur non simultanea, sed successiva ita, ut conjunctis binis, nullus alius conjungatur cum ipsis, ac idcirco objectiva composita e binis substantiis non possunt conjungere focos nisi binorum colorum tantummodo. Ad conjungendos tres requiruntur tres substantiæ: ad plures, totidem quot foci conjungendi sunt: exhibui in secunda e veteribus meis dissertationibus formulas pro conditionibus necessariis ad conjungendos ternos per tres substantias, quas ad multo meliorem formam redegi in supplemento II Opusculi II Tomi præcedentis.

3. Id quidem obstat accurato acromatismo objectivorum: verum conjunctis binis focis, distantia reliquorum ab ipsis ita est exigua, ut effectus inde orti vix sub sensum cadant, aut ne vix quidem transpicienti; quam ob causam e præclaro Dollondi invento admodum ingens perfectio accessit dioptricis telescopiis. Idcirco minus improprio vocabulo appellari possunt acromatica ejusmodi objectiva, cum per ea conjungantur colores omnes, si minus accurate, saltem satis proxime. Sed telescopia iis instructa non possunt eam appellationem promereri, nisi impediatur nova illa separatio inducta ab ocularibus: ea, si nullum adhibeatur remedium, est sane ingens, ubi campus telescopii est satis magnus, & augmentum imaginis itidem satis magnum. Ubi lentes oculares sint rite dispositæ ita, ut omnium sphæricitatum centra jaceant in unica recta, quæ dicitur axis telescopii, & transit per centrum campi, in ipso campi centro ii colores sunt nulli: recedendo ab eo versus margines eorum separatio statim incipit, initio quidem exigua, tum eo major, quo magis receditur, & pari augmento imaginis crescit in ratione distantiæ ipsius, pari distantia in ratione augmenti.

4. Inde fit, ut ubi unica lens simplex ocularis adhibetur, uti mos erat in veteribus telescopiis astronomicis, cum augmento, & campo satis magno, ac in ipsis primis Galileanis, quorum formam adhuc habent brevia telescopiola, quæ haberi solent ad ma-

nus, colores semper appareant satis magni prope margines campi; objectum exiguum lucidum, ut Venus, vel Jupiter, habet colorem rubeum versus centrum campi, violaceum versus marginem; objecta autem habentia partes contiguas illustratas satis inæquali vi luminis apparent in ipsis earum partium limitibus infecta coloribus pro diversa earum partium positione diversis. Iidem colores apparent etiam, ubi unica lens ocularis simplex conjungitur cum objectivo acromatico: ubi autem plures adhibentur oculares, apparent semper colores ipsi, nisi ocularium combinatio talis adhibita fuerit, ut eosdem destruat: eam ob causam in ipsis telescopiis Dollondianis plerumque apparent colores, qui sæpe observantur in iis admodum ingentes; quin immo in ipsis telescopiis catadioptricis, in quibus specula nullam inducunt separationem colorum, observantur sæpe colores, qui induci ibi non possunt, nisi ab ocularibus: ii autem multo magis evadunt sensibiles in omni telescopiorum genere, ubi per ipsa traducitur imago solis, & excipitur chartâ albâ. Solis margo in campi centro apparet satis nitidus, & a colore sensibili prorsus immunis, vel fere prorsus, etiam ubi objectivum sit commune simplex: idem versus campi margines evadit infectus coloribus satis amplis.

5. Agam in hoc capite de remedio adhibendo ejusmodi coloribus, & primo loco proponam ipsam eorum genesim, & naturam, unde patebit ingens discrimen inter colores inductos ab objectivo, & eos, quos oculares inducunt: plerumque colores, qui in telescopiis observantur, sunt hujusce secundi generis ita, ut telescopia perfici possint sensibilium colorum expertia, adhibito etiam objectivo simplici, per solam lentium ocularium combinationem, in quibus etiam imago solis transmissa habeat colores residuos perquam exiguos. Deinde proponam remedia ipsa; sed hæc remedia non pertinebunt, nisi ad unionem duorum colorum, nec generaliter extendentur ad omnia systemata, quæ haberi possint, sed applicabuntur tantummodo ad casus quosdam particulares admodum opportunos.

6. Ob ea, quæ de generalibus methodis indicavi in ipsa hujus Opusculi præfatione, arbitror accidisse, ut post remedia objecti-

vis

vis adhibita, vix quidquam pro ocularibus sit præstitum; quod communi usui sit accommodatum. Sub ipsum primum præclarissimum sane Dollondi patris inventum plurima ego quidem vidi telescopia acromatico ipsius objectivo instructa, & adhuc maxime infecta hoc genere colorum provenientium ab ocularibus. Quæ nunc ex Anglia adferuntur, eo vitio plerumque carent, quod provenit ab opportuna ipsarum ocularium dispositione. Verum ea habent systemata admodum diversa a pluribus telescopiorum formis, quas Eulerus e generalibus suis formulis deduxit, & quæ, ut a pluribus telescopiorum constructoribus accepi, successu caruerunt. Nescio, an ea systemata sint casu inventa per longam attentationem, an deducta ex aliqua idonea theoria, quæ alicubi prodierit typis mandata. Promam hic ego particularium mearum perquisitionum fructum multiplicem: ab iis deductus sum ad solutiones nonnullas admodum simplices, & elegantes, quæ requirunt tam ad investigationem, & accuratam demonstrationem prima tantummodo, & vulgaria elementa, ac veritates jam vulgo cognitas, quam ad operis executionem regulas admodum expeditas, & vitrorum artifici commodas. Accedit, quod fere omnes admittunt etiam unicum genus vitri communis. Iis propositis, arbitror, me utilem præstiturum operam acromaticis telescopiis: sed aggrediamur rem ipsam.

§. I.

De origine, & natura colorum provenientium ab ocularibus.

7. Est (fig. 1) AA objectivum simplex, cujus centrum C, BB lens ocularis convexa, & simplex posita ultra focum ipsius objectivi, cujus ocularis centrum G. Considerabimus prius viam radiorum transeuntium trans idem objectivum, tum eorum transitum per ocularem.

8. Ad totum objectivum deveniunt radii digressi a singulis punctis objecti; quorum singuli componuntur e filis innumeris omnium colorum primigeniorum habentium diversos refrangibilita-

tis

tis gradus. Omnium minime refrangibilis est rubeus primus, omnium maxime postremus violaceus. Radii devenientes a puncto quovis objecti satis remoti ad diversa puncta objectivi ipsius habentur pro parallelis inter se. DC est radius delatus a puncto objecti sito in axe telescopii, quod punctum apparet in centro campi, & bini dA ipsi ad sensum paralleli deveniunt ad marginem objectivi ipsius. Radius D'C, ac bini $d'A$ sunt ii, qui proveniunt a puncto quopiam posito extra ipsum axem, quod spectatum ex C habet distantiam visualem a priore determinatam ab angulo DCD': & si id punctum appareat in margine campi telescopii; is angulus metitur semidiametrum ipsius campi.

9. Radius DC pergit per axem DGL prorsus irrefractus cum omnibus suis filis conjunctis: quivis alius habet binas refractiones, alteram in ingressu, alteram in egressu objectivi: sed inter eos omnes, qui adveniunt directione obliqua $d'A$, habetur unus, qui habet binas refractiones contrarias æquales ita, ut post egressum pergat cum eadem directione, cum qua advenerat. Is potest considerari pro irrefracto, & ipsum refert recta D'C continuata in directum usque ad ocularem in G', qui itidem secum ducit sibi conjuncta sua fila colorata omnia. Reliqui radii dividuntur in sua fila colorata convergentia ad diversa puncta rectarum CG, CG'. Fila ipsa homogenea delata ab eodem puncto objecti non uniuntur omnia in eodem puncto, sed in quodam spatiolo ob errorem figuræ sphæricæ; verum eo errore hic omisso, considerabimus unionem filorum homogeneorum pertinentium ad idem punctum objecti, ut factam in unico puncto, quod idcirco dicitur eorum filorum focus. Fila prima rubea pertinentia ad radios dA, conveniunt cum axe CG in puncto quodam F, violacea postrema magis refracta in alio propiore f, ut prima rubea pertinentia ad radios $d'A$ conveniunt cum recta CG' in puncto quodam F', violacea postrema in alio propiore f'. Hæc posteriora occurrunt prioribus in punctis ee, $e'e'$ positis inter focos F, f, F', f'. Inter eos extremos focos habetur series quædam continua focorum pertinentium ad fila colorum intermediorum; omnia autem fila pertinentia ad omnes radios ejusdem puncti objecti

jecti contrahuntur in circellis exiguis habentibus pro diametris rectas ee, $e'e'$, quæ sunt spatiola minima omnium ab iis omnibus occupatorum. Ibi efformatur imago objecti, quæ esset distinctissima, & omni colore expers, si pro iis circellis haberentur totidem puncta. Sed illa distractio obest non nihil distinctioni, & si imago excipiatur chartâ albâ, sit autem satis magna ob satis magnam distantiam ab oculari; partes ejus lucidiores apparent etiam coloratæ in suis marginibus. Si D sit punctum satis lucidum in medio magis obscuro, & imago excipiatur ante situm ee; margo ejus imaginis apparebit rubeus ob fila AeF extantia ad latus. Si excipiatur post eum locum; margo apparebit violaceus, ob procursum radiorum Afe magis dilatatorum. Sed si excipiatur in ipso situ ee; margo apparebit ibi tinctus colore quodam composito e rubeo, & violaceo, quem Newtonus appellat purpureum, & est veluti vinaceus diversus prorsus ab omnibus simplicibus primigeniis. Verum in minoribus distantiis focalibus is color evadit ita tenuis, ut sensum omnem effugiat.

10. Distantia illa, ad quam convergunt in lente convexa radii cujuspiam generis, qui ad eam adveniunt paralleli, dicitur ejus distantia focalis pro illo radiorum genere, & distantia focalis pertinens ad radios mediæ refrangibilitatis dicitur absolute ejus distantia focalis, quæ est aliquanto minor, quam distantia focalis radiorum rubeorum, major, quam violaceorum. Si radii dA adveniant accurate paralleli radio DC; CF est distantia focalis lentis AA pro radiis rubeis, Cf pro violaceis, & cum dicitur absolute distantia focalis, intelligitur distantia puncti C a lineola ee, quæ distantia est media inter præcedentes. Sic focus ejus lentis absolute dicitur punctum medium inter e, e, focus radiorum rubeorum F, violaceorum f. In quavis autem lente possunt considerari bini ejusmodi foci positi hinc, & inde ab ipsa, prout radii adveniant ad hanc, vel ad illam ejus faciem; & quando considerantur radii advenientes ex altera ejus parte, illum, in quo ipsi coeunt, ego quidem appello ulteriorem idcirco, quod is jacet ultra ipsam, alterum vero oppositum dico citeriorem. Si radii adveniunt convergentes, convergunt ad punctum propius foco paral-

rallelorum : si adveniunt divergentes a puncto remotiore, quam sit focus lentis citerior, convergunt ad punctum remotius foco ulteriore : si adveniant divergentes a foco citeriore, prodeunt paralleli; si divergentes a puncto propiore, prodeunt divergentes, & eo magis, quo punctum illud est propius lenti. Hæc omnia sunt vulgo nota ex theoria lentium, quæ hic commemoranda censui, cum eorum usus debeat occurrere in iis, quæ pertractabimus : adhuc tamen demonstrabuntur in §. 2.

11. Fila rubea AF, AF' devenient ad ocularem in H, H', violacea Af, Af' in h, h', ubi illa occupabunt circellum HH, H'H', hæc aliquanto ampliorem hh, $h'h'$. Si FG sit distantia focalis filorum rubeorum, quæ ad lentem BB adveniant inter se parallela ex parte opposita; prodibunt ipsa FH per rectas HM parallelas GL. Fila autem fh divergentia a puncto f remotiore, quam sit focus ejus lentis pertinens ad radios violaceos, qui est ipsi propior adhuc quam F, prodibunt per rectas hm convergentes versus axem. Quod si lens BB removeatur adhuc magis a foco F, convergent nonnihil etiam fila HM, sed hm magis, quam ipsa : si autem ipsa lens admoveatur magis; fila HM divergent; sed initio fila hm adhuc convergent, donec distantia fG evadat æqualis distantiæ focali filorum violaceorum, quo casu prodibunt parallela : lente autem promota adhuc versus C prodeunt divergentia etiam ipsa.

12. Hinc facile deprehendi potest, quid accidat imagini puncti admodum lucidi siti in axe in ingenti distantia ab objectivo transmissæ per telescopium dioptricum simplex constans objectivo simplici, & unica oculari convexa excepta charta alba ultra ipsam lentem ocularem. Si lens BB sit vicinior objectivo AA, quam par est; punctum illud lucidum apparebit amplum, in medio quidem, album ob unionem colorum omnium, tum versus margines tinctum coloribus postremis violaceo, indico, cæruleo : excipientur nimirum in fine sola fila violacea hm, tum paulo interius violacea mixta cum indico, tum cum indico, & cæruleo, & ita porro; donec deveniatur ad spatium MM continens omnes colores, quorum mixtio exhibebit albedinem, sed rubore tinctam, ob rubeorum minus dis-

distractorum majorem vim. Removendo ocularem ab objectivo, convergent etiam fila rubea, adeoque si imago ejus puncti lucidi excipiatur in distantia eadem non nimis exigua ab oculari, minuetur non obstante dilatatione spatii *hh*, & evadet eo minor, quo charta ipsam excipiens magis removebitur: apparebunt autem colores iidem, donec ipsa charta abeat ultra concursum ipsorum filorum rubeorum ad eam distantiam, in qua ipsa jam divergentia incurrunt in fila violacea adhuc convergentia. Ibi in ipso margine ejus imaginis habebitur mixtio ipsorum rubeorum cum violaceis, quæ mixtio ibi exhibebit purpureum colorem vinaceum. Ulteriori remotione jam rubea fila excurrent ultra violacea, crescente rursus imagine, & margo incipiet habere colorem rubeum, cui paulo post accedent ex interiori parte aureus, & flavus compositi e pluribus congruentibus.

13. Ubi imago evadet minima, adeoque maxime distincta, apparebit margo coloratus, sed, ut diximus, colore illo vinaceo composito ex extremis, & admodum diverso ab omnibus simplicibus primigeniis. Quod si loco unici puncti habeatur limbus solis in centro campi, vel prope ipsum, imago in distantiis majoribus a limbo erit alba ob unionem filorum omnium; sed in limbo ipso habebitur illa eadem successio colorum, quæ in casu distinctionis maximæ continebit colorem mixtum ex extremis. Ad obtinendam eam distinctionem maximam requiritur, ut innui, protractio lentis ocularis ad distantiam ab objectivo majorem, quam sit summa distantiarum focalium, ut nimirum habeatur convergentia filorum omnium prodeuntium ex oculari, & quo minor erit distantia chartæ excipientis imaginem ab oculari, eo major requiretur protractio ocularis ad obtinendam convergentiam majorem, & concursum propiorem.

14. Considerandus jam est progressus filorum pertinentium ad radium D'C, & radios *d'*A ipsi parallellos. Advenient per CG' ad ocularem conjuncta fila omnia, uti diximus, sed ibi a refractione lentis BB separabuntur. Convergent omnia ad axem, sed rubeum primum minus refractum ad punctum axis I remotius a G via G'L', violaceum postremum refractum magis ad punctum *i*

propius via G'l, reliqua intermedia ad puncta intermedia directionibus intermediis: tum si F fuerit focus lentis BB pro radiis rubeis venientibus ex parte opposita in directione axis; erit proxime & F' focus similis pro radiis rubeis, qui concipiantur advenientes directione F'G': hinc ambo fila rubea F'H' prodibunt cum directionibus H'M' parallelis rectæ G'L', violacea vero per rectas $h'm'$ convergentes: remotâ magis oculari, convergent & rubea, & violacea, sed rubea minus: admotâ magis ipsâ oculari, divergent jam rubea, convergentibus adhuc violaceis, donec ulteriori accessu violacea evadant parallela, tum incipiant divergere etiam ipsa. Imago puncti lucidi positi in campo obscuriore extra axem excepta in distantia ab oculari satis magna apparebit amplior & oblonga, ac in margine interiore rubea filis G'L', H'M', in exteriore violacea filis G'l, $h'm'$ sine mixtione extremorum generante vinaceum, nisi ob nimis magnam divergentiam filorum H'M', & $h'm'$ illorum externa commisceantur cum horum internis. Distantia mutata lentis ocularis a vitro objectivo pariet plures eorum colorum variationes; sed ubi distinctio evadet maxima, habebitur semper color rubeus versus centrum campi, violaceus versus marginem in imagine objecti admodum lucidi perquam exigui.

15. Quod si objectum lucidum sit ingens, ut sol; limbo ipsius posito extra centrum campi, duo casus considerari debent, in quorum primo sol ipse jaceat a limbo versus ipsum centrum, in secundo versus marginem. Solis imago interior alba apparebit in margine tincta coloribus, qui in primo casu erunt violaceus, indicus, cæruleus a filis $h'm'$, & proximis excurrentibus versus partem campi obscuram, dum fila rubea H'M' commiscentur cum filis colorum omnium pertinentium ad partes disci solaris interiores. In secundo autem margo apparebit rubeus, aureus, flavus, violaceis $h'm'$ commixtis cum omnibus reliquis pertinentibus ad partes disci positas ultra limbum respectu centri.

16. Summa capita phænomenorum hic persecuti sumus, quæ omnia, ac alia plura, facile perspiciet, qui accurate perpenderit hoc ipsum schema, & naturam focorum, ac diligenter distinxe-

rit

rit radios provenientes ab eodem puncto quovis objecti, & incidentes in omnia puncta objectivi, a radiis pertinentibus ad diversa puncta objecti, & transeuntibus per centrum objectivi ad sensum irrefractis, uti sunt DCG, D'CG'. Hi posteriores singuli ducunt agmen quodammodo sociorum quisque suorum pertinentium ad idem punctum objecti, & perveniunt cum suis filis omnibus conjunctis integri usque ad ocularem, dum cæteri singulorum socii statim dissolvuntur separatis filis colorum diversorum. Notandum tantummodo, errorem figuræ sphæricæ, quæ non sinit omnia fila ejusdem speciei conjungi in eodem unico puncto, debere inducere mixtionem, & confusionem aliquanto majorem.

17. Facile patet, haberi discrimen ingens inter colores inductos a distantia focorum F, *f* objectivi, & inductos a separatione radii CG' in fila G'L', G'*l* facta per ocularem. Priores illi habentur etiam in centro campi, in quo hi posteriores evadunt nulli, nisi forte lens ocularis sit male constructa, aut male disposita, ut centrum ipsius non respondeat centro campi. Illi priores ibi, ubi imago transmissa evadit maxime distincta, exhibent in margine ipsius colorem vinaceum compositum: hi posteriores hinc rubeum purum cum adjacentibus aureo, & flavo compositis, inde violaceum purum cum adjacentibus indico, & cæruleo compositis, vel pro diversa positione objecti lucidi amplioris alterum ex hisce binis colorum generibus. Addendum & illud, hosce posteriores esse multo ampliores illis in distantia satis magna puncti G' a centro campi G, quia multo longius discedit filum G'*l* a filo G'L', quam fila *hm* ab HM in situ maximæ distinctionis: is discessus est eo major, quo lens BB magis convexa ad augendam magis imaginem objecti magis intorquet filum G'L' distractione respondente refractioni in eodem vitri genere. Eam ob causam margo imaginis solaris transmissæ per ejusmodi telescopium apparet in centro campi satis distinctus, & minus infectus colore, & prope marginem semper evadit maxime confusus, & imbutus colore admodum largo.

18. Excipiantur jam oculo hi omnes radii collocatâ pupillâ versus I*i*. Ad hoc, ut imago objecti appareat admodum distincta,

& sine coloribus, deberent omnia fila colorata pertinentia ad omnes radios digressos a quovis unico objecti puncto coire in fundo oculi in unicum punctum. Opus esset nimis longum, & molestum persequi viam filorum omnium intra oculum. Habentur in eo saltem quatuor superficies refringentes, per quas traducta fila fere omnia habent novas quatuor refractiones: prima fit in ingressu in corneam, secunda in ejus egressu, tertia in ingressu in humorem crystallinum lentiformem, quarta in egressu: verum habentur etiam multæ aliæ refractiones intra ipsum crystallinum, qui non habet densitatem uniformem: consideratio omnium ejusmodi refractionum est admodum implexa, immo & incerta, ob minus cognitam & figuram, & vim earumdem superficierum refringentium. Verum iis omissis considerabimus transitum per omnes ejusmodi superficies, tanquam si fieret trans novam lentem quandam.

19. Si distantia focalis ejus lentis terminaretur exacte in fundo oculi; ad habendam ejusmodi unionem deberent radii pertinentes ad idem punctum objecti, advenire ad oculum inter se paralleli. Verum plerumque ipsi oculi ita sunt conformati, ut requirant divergentiam aliquam saltem exiguam. Qui habent in cornea, vel humore crystallino nimiam curvaturam, requirunt sæpe divergentiam majorem, & appellantur myopes: qui habent curvaturam nimis exiguam, requirunt convergentiam, & appellantur presbytæ, & iis malis adhibetur remedium notissimum perspicillorum, quæ continent pro prioribus vitra concava, pro posterioribus convexa.

20. Quoniam in telescopio, quod consideravimus, fila pertinentia ad axem habent in egressu directionem alia aliam; satis patet, non posse haberi distinctionem exactam ne in ipso quidem puncto objecti sito in centro campi. Possunt ad summum ita coire fila rubea sola, vel sola violacea. Myopes admovent nonnihil ocularem objectivo ad obtinendam divergentiam, presbytæ removent ad obtinendam convergentiam, quæ respondeat illi determinatæ constitutioni oculi intuentis. Remota, vel admota oculari, unusquisque invenit locum distinctionis maximæ. Ea intra

ocu-

oculum etiam obtinetur ibi, ubi circellus, in quem coeunt omnia fila rubea, fere congruit cum circello, in quem coeunt violacea, quo casu punctum admodum lucidum situm in axe adhuc debet habere magnitudinem quandam apparentem, in cujus margine appareat color ille vinaceus compositus: protrahendo, & intrudendo ocularem, margo idem apparebit jam rubeus, jam violaceus, prout circellus filorum rubeorum evaserit in fundo oculi major, vel minor circello violaceorum, & eadem phænomena debet exhibere limbus solis adductus ad centrum campi.

21. Hi colores erunt maxime sensibiles, ubi recessus a situ distinctionis fuerit ingens cum ingenti confusione; verum prope eum situm in telescopio satis bono fere semper effugiunt sensum, atque id, ut arbitror, ob plures rationes: primo quidem, quia tot refractiones intra oculum conjunctæ cum figura superficierum refringentium ipsius oculi, quæ nunquam est accurate, qualis deberet esse, inducunt novas radiorum commixtiones: vitium figuræ observamus in natura ubique, in foliis omnibus, in pomis, in omni productionum genere observamus semper constructionis vitia, nec unquam ita exigua, ut non sponte incurrant in oculos: secunda ejus phænomeni ratio esse potest brevitas viæ radiorum intra oculum, qua fit, ut imagines objectorum sint ibi exiguæ, adeoque multo magis exiguæ minores aberrationes radiorum: tertia, quia sensatio pendet a tremore impresso particulis sive solidis, sive fluidis fundi oculi propagato ad cerebrum; tremor autem ipse non fit in unico puncto; quam ob causam effectus impulsionis factæ a filis coloratis devenientibus ad puncta diversa, sed proxima, possunt confundi invicem. Ob eas causas, & alias, de quibus agemus inferius in §. 3, oculus limbum solis transpiciens per telescopia dioptrica mediocria nullos animadvertit colores sensibiles prope centrum campi. Sic etiam transpiciendo trans prismata Dollondiana composita ex vitro communi, & flint ad corrigendam distractionem colorum retentâ refractione satis magna, nullus deprehenditur color residuus; dum radius solis traductus per ipsa, & exceptus pariete, vel chartâ albâ in distantia non exigua exhibet admodum sensibilem fimbriam coloratam

hinc

hinc vinaceam ex violaceo, & rubeo colore conjunctis, inde viridem ex medio in ipsa eorum conjunctione extante ad latus.

22. Non idem accidit puncto lucido posito in satis magna distantia a centro campi, quando ipse campus, & augmentum sunt satis magna. Separatio filorum $h'm'$, G'l a filis H'M', G'L' statim incurrit in oculos. Si fila L'G', lG' concipiantur producta in N, n, & pertineant ad punctum satis lucidum; id apparet in Nn oblongum, & rubeum ex parte interiore N, violaceum ex exteriore n; tanquam si diversa puncta lucida alterum rubeum, alterum violaceum misissent suos radios ad oculum directionibus NG'I, nG'i, advenientibus filis colorum intermediorum cum directionibus intermediis. Inde Jupiter in communibus telescopiis dioptricis collocatus in satis magna distantia a centro campi apparet rubeus in margine interiore, violaceus in exteriore, quanquam in medio apparet albus ob mixtionem omnium filorum pertinentium ad diversa puncta disci habentis amplitudinem satis magnam ad gignendam ejusmodi mixtionem. Limbus autem solis apparet ibidem tinctus colore violaceo, vel rubeo, prout discus respectu limbi jaceat versus centrum, vel versus marginem. Distractio illa facta per angulum NG'n, de cujus magnitudine agemus infra; est multo major, quam distractio inducta in mMLMm a distantia focorum F, f.

23. Hinc colores, qui apparent in communibus telescopiis dioptricis, fere semper apparent extra centrum campi, quo casu sunt semper hujusce secundi generis, nimirum inducti non ab objectivo, sed ab ocularibus. Per Dollondianam conjunctionem binorum vitrorum flint, & crown in objectivo composito conjunguntur foci F, f, & abeunt in punctum unicum, quo casu foci colorum intermediorum, licet non congruant cum ipsis, ut supra monui, tamen ita parum distant, ut distantia sensum effugiat. Eo casu tollitur ea separatio colorum in centro: fila hm congruunt cum filis HM, ut etiam fila $h'm'$, cum filis H'M' conjunguntur; sed secunda illa separatio facta extra centrum campi per angulum L'G'l = NG'n remanet integra; quam ob causam omnia objectiva acromatica si conjungantur cum unica

lente

lente oculari simplici, quæ præstet campum, & augmentum satis magnum, exhibent ejusmodi colores æque ingentes, ac objectiva simplicia pari campo, & augmento. Concipiatur objectivum ita accurate acromaticum, ut puncta F, f, e, e cum omnibus focis intermediis conjungat simul, & cogat in punctum unicum: radius D'CF', qui transiit per centrum objectivi ad sensum irrefractus, & devenit ad ocularem in G' cum omnibus suis filis simul conjunctis, dividitur, ac distrahitur ab oculari per angulum L'G'l = NG'n eo majorem, quo est major angulus CG'N exhibens mutationem itineris factam a filo rubeo, sive ejus refractionem.

24. Ea distractio nullam mutationem subit a compositione objectivi, a qua nihil mutatur radius CF'G', adeoque nullum ei malo remedium potest induci ab objectivo. Requiritur remedium petitum ab ocularibus ipsis, de quo agemus in hoc Opusculo. Inveniuntur telescopia dioptrica habentia plures oculares, in quibus combinatio fortuito inventa colores hos ipsos vel aufert penitus, vel valde imminuit; sed plura habentur egregia telescopia Anglicana, in quibus objecti distinctio prope centrum campi est maxima, nec ibi ullus apparet color, sed abeundo versus margines campi colores in iis emergunt admodum sensibiles, & in nonnullis ingentes. E contrario ego curavi construenda telescopia habentia objectivum simplex, cum remedio colorum idoneo adhibito systemati ocularium, in quibus transpiciendo nulli colores apparebant, excipiendo autem imaginem solis transmissam habebantur perquam exigui etiam in margine campi; usque adeo illud colorum genus, quod maxime apparet in telescopiis dioptricis, originem ducit ab ocularibus, non ab objectivo.

25. Ea colorum dispersio ibidem nocet etiam distinctioni, cum ita radii pertinentes ad unumquodvis objecti punctum protensi per spatiolum non insensibile commisceantur cum radiis pertinentibus ad alia puncta, a qua permixtione sola oritur confusio imaginis. In communibus telescopiis confusio multo major habetur ex utraque causa conjuncta: quin immo distinctionem majorem in centro impedit sola illa distractio filorum hm, HM non coeuntium in eodem puncto cum GL, & intermediis ob diversam re-

refrangibilitatem conjunctam cum errore figuræ sphæricæ, quam evitant maxima ex parte telescopia habentia objectivum rite compositum; nam ea destruunt maxima ex parte tam errorem diversæ refrangibilitatis, quam errorem figuræ sphæricæ. Eam ob causam potest ipsis tribui multo major apertura objectivi ipsius, & augmentum majus. Sed remedia adhibita soli objectivo relinquunt intactam originem eorum colorum, qui maxime observari solent in telescopiis, & qui, ut diximus num. 5, observantur sæpe in ipsis telescopiis catadioptricis habentibus pro objectivo speculum, quod colores in reflexione utique non separat.

26. Separatio filorum G'IL', G'*il* prodesse potest distinctioni solum in casu, in quo observetur astrum quodpiam, ut Jupiter, parum elevatum supra horizontem. Tum refractio atmosphæræ satis magna inducit sensibilem separationem colorum: quamobrem in ipso etiam campi centro id astrum apparet violaceum ex parte superiore, rubeum ex inferiore, filis violaceis magis inclinatis deorsum, quam rubeis. Si telescopium ita dirigatur, ut astrum occupet punctum campi paulo inferius centro; adhuc rubescet astrum ipsum in parte limbi propiore margini campi, erit violaceum in propiore centro, quod mihi prima vice advertenti visum erat contrarium toti huic theoriæ colorum telescopicorum: sed re attentius considerata statim deprehendi causam ejus phænomeni. Removendo astrum in diametro campi verticali a centro infra ipsum, vidi augeri distinctionem, correcto nimirum effectu atmosphæræ elevantis directionem filorum violaceorum supra directionem rubeorum ab effectu separationis L'G'*l* deprimentis directionem G'*n* infra G'N. Elevando Jovem intra campum telescopii per exiguam depressionem tubi, crescebat confusio imaginis, & ampliores evadebant colores, conjuncto in parte superiori effectu telescopii cum effectu atmosphæræ, & illo priore eo magis crescente, quo magis Jupiter removebatur a centro campi: minuebatur uterque defectus deprimendo Jovem, imminutis coloribus, & crescente distinctione ob imminutum effectum telescopii usque ad centrum, ubi jam evanescit, & mutato in contrarium infra centrum ita, ut jam effectum atmosphæræ, vel penitus,

vel

vel magna ex parte corrigeret. Ad videndam hanc phænomenorum seriem oportet, Jupiter, vel Venus parum admodum eleventur supra horizontem: telescopium autem adhiberi potest tam commune, quam acromaticum cum unica lente simplici.

27. Colores ex hoc secundo fonte oriri possunt in ipso centro campi. Id accidet; si axis lentis ocularis non transeat per id centrum; si nimirum punctum G ocularis ipsius respondens centro aperturæ relictæ liberæ a diaphragmate, quod punctum respondet centro campi apparentis, non sit illud idem, per quod transit recta conjungens centra binarum sphæricitatum, in quo ipsa ocularis habet crassitudinem maximam, ac superficies oppositas parallelas (*). Tunc in ipso centro G habetur eadem distractio,

 quæ

(*) Centrum lentis appellari solet id punctum, in quo occurrit superficiei utrivis axis, qui transit per bina centra sphæricitatum. In ocularibus, in quibus ob curvaturam ingentem bina segmenta superficierum habere solent marginem communem circularem sine ulla crassitudine vitri in eo ipso margine, id facile invenitur: id ibi est in medio illo, quod est polus, & quasi centrum ejus ipsius circuli marginalis. At in objectivo, in quo curvatura est multo minor, habetur in margine crassitudo. Terminantur illa segmenta binis marginibus vel accurate, vel ad sensum circularibus, qui distant a se invicem per illam ipsam crassitudinem. Si ea est circumquaque accurate ejusdem magnitudinis; ipsi margines sunt accurate circulares, & centrum habetur itidem in medio illo ipso margine circulari singularum superficierum. Sed si crassitudo ex una parte est vel tantillo major, quam ex altera opposita, binis marginibus habentibus plana sua nonnihil inclinata ad se invicem; axis transit per puncta superficierum propiora ei puncto marginis, in quo crassitudo est minima. Ubi id centrum non respondet quamproxime centro marginis, objectivum dicitur male centratum, & si ejus distantia a medio est aliquanto major, imago objecti evadit confusa, crescente plurimum errore sphæricitatis, qui respondet distantiæ maximæ ejus centri a margine aperturæ.

Plures habentur methodi pro determinando, an objectivum sit bene centratum, & inveniendo loco centri ipsius; sed eæ, quæ adhiberi solent, non ita accurate rem exhibent. Admodum facile id punctum determinatur, & admodum accurate ope mei tubuli instructi speculo, per quod immittitur radius solis in conclave, qui tubulus habetur in fig. 11 tabulæ II primi Tomi: immisso eo radio directione proxime horizontali, ei objiciatur positione ad sensum perpendiculari lens in distantia arbitraria (satis est opportuna distantia circiter unius pedis) ita, ut ipse radius incurrat in primam superficiem lentis ipsius: secunda superficies obtegatur chartâ albâ circulari, quæ ipsi adhæreat per duo vel

quæ habebatur in G'. Ad eos colores nihil confert objectivum male centratum, vel oblique positum, nec obliqua positio ocularis ipsius. Ea vitia imminuunt distinctionem, non pariunt colores. Ubicumque sit in toto objectivo AA punctum C, per quod transit ejus axis; si G sit punctum, per quod transit axis lentis ocularis; radius CG transibit ad sensum irrefractus, cum in utroque vitro inveniat superficies inter se proximas, & parallelas, adeoque perget per GL cum omnibus omnium colorum filis conjunctis; dum reliqui omnes radii CG' ad ipsum inclinati, & transeuntes itidem per objectivum sine separatione filorum habebunt separationem ipsam in G'L', G'l ab oculari. Idcirco si punctum illud G pertinens ad axem lentis ocularis fuerit in centro campi; nullus ibi color habebitur ex illa secunda origine; eo autem existente ad latus, ob malam lentis constructionem, vel collocationem malam ipsius, aut diaphragmatis, habebitur is color in ipso campi centro, & deerit in alio ejus puncto quopiam extra centrum sito, ubi jacebit punctum G.

28. Similia phænomena accidunt etiam Galileano telescopio, quod habet objectivum simplex cum simplici oculari concava (*): ve-

vel tria frustula ceræ: habebuntur bini radii reflexi a binis superficiebus, qui, parum admodum inclinatâ lente ipsâ, apparebunt ad latus ipsius foraminis. Ipsi erunt distantes a se invicem; si radius incidit extra locum illius centri: nam in eo uno binæ superficierum particulæ reflectentes eum radium sunt invicem parallelæ: movendo lentem ipsam sursum, deorsum, hinc, & inde, devenietur ad positionem, in qua bini radii reflexi congruent accurate superpositi sibi ipsis, & locus apparebit in charta illa adnexa superficiei posteriori, quæ ibi erit illuminata luce admodum vivida: illuminabitur circellus ipsius paullo major circello foraminis, adeoque facile notabitur calamo punctum medium ejus circelli illuminati. Circinus docebit, an id punctum sit in medio marginis circularis. Si inveniatur aliquantisper distans ab eo medio; poterit eo centro, & radio minimæ distantiæ a margine describi circulus, & relinqui apertura habens illud ipsum punctum pro centro: abradendo quidquid extat extra illum circulum, vel obtegendo diaphragmate relinquente aperturam ei circulo concentricam, habebitur objectivum bene centratum.

(*) Hi colores molestissimi in ejusmodi telescopiolis habentibus ocularem concavam simplicem corrigi possunt per ocularem acromaticam, qua de re egimus in secundo Opusculo Tomi primi, & agemus iterum hic in paragrapho tertio hujus capitis primi; qui totus versabitur circa oculares acromaticas.

verum cæteris omissis considerabimus in ipso solos radios transeuntes per centrum objectivi. Manentibus reliquis in fig. 2, ocularis BB excipit radium DL antequam adveniat ad focos objectivi fF. Radius D'G' ab ipsa concava deflectitur deorsum divisus in fila contenta angulo L'G'l, ubi primus rubeus omnium minime detorquetur per G'L', postremus violaceus omnium maxime per G'l. Hinc directio L'G'N exhibet colorem rubeum propiorem centro campi, lG'n violaceum remotiorem. In telescopiis longioribus ejus constructionis ejusmodi color apparere non potest satis sensibilis, quia in iis campus est perquam exiguus, cum GG' non possit esse major semidiametro pupillæ, adeoque angulus DCD', qui metitur semidiametrum campi, cum sit æqualis angulo GCG', debet esse perquam exiguus. Sed in brevioribus illis, quæ adhiberi solent ad manus pro theatris per noctem, vel etiam interdiu pro objectis propioribus, is angulus excedit etiam unum gradum, adeoque refractio F'G'L' æqualis angulo CG'N evadit plurium graduum, & ejus differentia NG'n satis magna, ut separatio sensum afficiat. Hinc in ejusmodi telescopiolis, licet instruantur objectivo acromatico, colores apparent versus marginem campi admodum largi; nisi diaphragmate perquam exiguo, & sito in aliqua non nimis exigua distantia ab oculo, minuatur campus quamplurimum, quod quidem præstari solet, sed est ingens quoddam eorum instrumentorum vitium.

29. Telescopia habentia unicam lentem ocularem convexam, ut in fig. 1, invertunt objecta, quorum partes jacentes in ea figura ex parte sinistra axis in directione CD', apparent e dextera, tanquam si jacerent in directione IG'N: telescopia habentia unicam concavam, ut in fig. 2, exhibent quidem objecta directa, sed habent campum nimis exiguum, si sint longiora, quod requiritur ad habendum ingens augmentum imaginis. Idcirco illorum priorum usus relictus est pro solis observationibus astronomicis, quibus objecti inversio nihil nocet: hæc posteriora adhiberi solent tantummodo brevissima pro objectis parum remotis cum exiguo incremento imaginis, quærendo in ipsis distinctionem potissimum, & augmentum exiguum. Pro objectis terrestribus adhibentur plu-

res oculares, quæ secunda inversione restituant positionem objecti, ac in communibus ejusmodi telescopiis adhibita sunt diu, & a multis adhuc adhibentur tres tantummodo lentes similes, & æquales illi unicæ, ac ita dispositæ, ut priorum binarum distantia sit paulo major, quam summa distantiarum focalium, posteriorum æqualis ipsi summæ. Fiunt autem plurimæ aliæ dispositiones, mutando distantias focales, ac distantias lentium mutuas, vel etiam augendo earum numerum, & adhibendo lentes quatuor, vel quinque. Hic attingemus tantummodo id, quod pertinet ad primam illam combinationem simplicem trium lentium æqualium respectu separationis colorum factæ ab ocularibus in radio proveniente ab objecto sito extra centrum campi.

30. In fig. 3 omnia usque ad Ii sunt communia figuræ 1 pro radiis DCG, D'CG'. Distantia GI est major, quam distantia focalis lentis BB pertinens ad radios ipsos rubeos, cum ea lens debeat conjungere in I radios divergentes a C, & in distantia focali radios parallelos, sed paullo major, cum distantia CG debeat esse satis magna respectu distantiæ focalis ejus lentis: reliquæ binæ lentes HH, MM occurrunt axi in K, P. Sit KI distantia focalis ipsius HH pro radiis rubeis, cui æquales sint KO, OP. Filum rubeum G'I incurrens in lentem HH in L refringitur ab ipsa per rectam LQ parallelam KP, cum IL, IK divergant a foco citeriore I ejus lentis, & incurrens in lentem MM in Q ab ipsa refringitur per rectam QR convergentem cum axe ad quandam distantiam PR ob directiones LQ, KP parallelas. Interea radii rubei pertinentes ad punctum objecti situm in axe in ingenti distantia, qui hic vitandæ confusionis gratiâ non exprimuntur, transmissi per totam superficiem ipsius objectivi, conveniunt primo in F, ut in fig. 1, & progrediuntur directione parallela ultra lentem BB, cum qua incidentes in HH convergunt ad ejus focum O: progressi ultra ipsum debent prodire paralleli ex lente MM, cum is sit ejus focus citerior. Is parallelismus requiritur ad habendam distinctionem, vel pro diversa constitutione oculorum, exigua convergentia, aut divergentia, quæ obtinetur mutando nonnihil distantiam ab objectivo totius systematis ocularium,

vel

vel distantiam solius lentis postremæ MM a præcedenti HH.

31. Filum violaceum G'i delatum ad HH in l ita intorquetur, ut convergat versus axem. Si enim i sit focus citerior lentis HH pro radiis violaceis; ejus distantia Ki erit minor, quam distantia focalis rubeorum KI, adeoque adhuc minor, quam Ki; & radius discedens a distantia majore, quam sit distantia focalis lentis convexæ, debet convergere. Ipsum filum G'l detortum per refractionem secat LQ in quodam puncto O', & devenit ad MM in quodam puncto q, unde egreditur directione quadam qr, quæ si producatur indefinite ex parte opposita versus t secat RQ productam itidem indefinite versus T in quodam ejus puncto S. Separationem apparentem colorum extremorum exprimit angulus TSt. Quæremus inferius intersectionem O', & angulum TSt, & inveniemus esse lO' = KO, & in hoc casu omnium lentium æqualium esse angulum TSt tantillo minorem angulo NG'n; ut idcirco ea divisio colorum post ejusmodi tres lentes sit tantillo minor, quam post unicam. Sed adhuc in eo etiam genere telescopiorum dioptricorum habentur colores ejusdem generis ac in primo, & fere æquales ipsis.

32. Si adhibeantur aliæ combinationes focorum, & distantiarum; obveniunt aliæ determinationes ejus anguli finalis, & quærendæ sunt combinationes, quæ ipsas destruant, ac efficiant, ut filum violaceum pertinens ad radium devenientem a puncto objecti sito extra axem, ac transeuntem per centrum objectivi abeat in egressu a postrema oculari cum eadem directione, ac rubeum, nimirum sit ipsi parallelum; quo pacto unientur in fundo oculi, vel in ea positione ipsa, vel pro diversa oculorum constitutione in ea nonnihil mutata. Quæremus combinationem, quæ exhibeat proxime parallelismum; qua inventa, si colores ejus generis non fuerint extincti; exigua mutatione positionis unius e lentibus determinabitur multo melius, & facilius per immediatam observationem ab artifice collocatio, quæ vel omnino tollat, vel minimos efficiat ejus generis colores. Id præstabimus sequentibus paragraphis. Interea addemus illud, hic in fig. 3 positam esse congruentiam tam in I, quam in O focorum pertinentium ad radios rubeos,

quam-

quamquam potius soleat effici, ut congruant foci radiorum mediorum. In eo casu recta LQ non esset parallela axi, sed ab ipso divergeret nonnihil, dum *lq* convergit. Hic casus ab illo parum admodum differt ob exiguam focorum distantiam, & aliunde ille parallelismus reddit plures demonstrationes simpliciores. Potest effici, ut G'L referat filum quodpiam mediæ refrangibilitatis pro rubeo, & existente I foco medio, prodibit id filum per rectam LQ parallelam: omnia eodem redibunt, & solum absoluta mensura angulorum NG'*n*, TS*t* obveniet duplo major, si I sit focus fili rubei, quam si sit fili medii: adhuc tamen in hoc secundo casu separatio extremorum a se invicem esset proxime eadem, ac in primo, quia ipsa esset duplo major, quam separatio rubei a medio.

§. II.

De refractione prismatum exigui anguli, & lentium, ac de harum focis.

33. IN superiore paragrapho adhibuimus plura theoremata pertinentia ad focos lentium, quorum demonstrationem promisimus num. 10. Plura alia eodem pertinentia occurrent inferius necessaria ad determinandas correctiones colorum inductorum ab ocularibus. Occurret autem & aliud theorema, quod exprimit rationem, quam habet differentia refractionis exiguæ diversorum filorum coloratorum simul incidentium in prisma exigui anguli, vel in lentem, ad refractionem totam, quod facile demonstratur considerando ejusmodi refractionem in prismate. Plures correctiones facile determinantur ope ejus theorematis, & ex eo facile itidem deducuntur ea omnia, quæ pertinent ad focos lentium, in quibus negligatur error figuræ sphæricæ, & ipsarum lentium crassitudo. Idcirco censuimus fore opportunum, si eadem hîc proponeremus.

34. Fere omnia, quæ hîc occurrent, sunt elementaria, & satis nota: adhuc tamen non inutilem putavimus ejusmodi tractationem; tum quia hîc simplici, & non usitata methodo demonstra-

bun-

buntur veritates, quarum usus per totam dioptricam latissime patet, & frequentissime occurrit; tum quia sic in hoc ipso primo capite hujus Opusculi habebuntur demonstrationes eorum omnium, quæ ibidem proponenda sunt (*) pertinentia ad ejus argumentum, ut adeo ipsum per se sibi sufficiat. Pro secundo capite adhibebuntur nonnulla desumpta e secundo Opusculo Tomi primi, pertinentia ad errorem sphæricitatis, quæ non ita facilem haberent determinationem deductam e prismatum theoria.

35. Supponemus tantummodo primum illud fundamentum totius dioptricæ, quod ubi radius cujusvis speciei determinatæ transit per superficiem dirimentem duo quævis media determinata, in quavis inclinatione fiat is transitus, sit semper sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refracti in eadem ratione, quæ in transitu e secundo medio ad primum sit inversa ejus, quæ habebatur in transitu e primo ad secundum.

36. Angulus, quem efficit radius adveniens cum perpendiculo superficiei refringentis ducto per punctum, in quo fit refractio, dicitur angulus incidentiæ: ego, ut monui in primo etiam volumine, appello angulum refractum eum, quem efficit radius transmissus cum eodem perpendiculo: communiter ipsum appellant *angulum refractionis*; sed ego refractionem voco angulum, quem continet continuatio viæ radii advenientis cum via radii detorti, quæ est ipsa quantitas deviationis facta per refractionem, & communiter itidem appellari solet refractio: idcirco vitandæ confusionis causâ dico illum alterum angulum refractum. Ratio sinus incidentiæ ex aere in substantiam quampiam, ut vitrum, ad sinum anguli refracti dicatur m ad 1, & erit 1 ad m ratio sinuum in egressu ex ea substantia ad aerem: valor m habebitur dividendo sinum

(*) Maxima horum pars habetur in Opusculis Tomi primi. Plures e formulis hinc erutis inferius pro lentibus habentur in Opusculo II, sed deductæ methodo longe alia. Hic autem repetuntur ob duas rationes indicatas in textu. Verum habebuntur hic plurima alia deducta ex iis communibus, quæ non habentur ibi, & usui erunt in hoc Opusculo: præter quam quod nec inutile, nec injucundum est Geometriæ cultoribus videre easdem veritates deductas e diversis principiis diversis methodis.

sinum priorem in ingressu per posteriorem, vel posteriorem in egressu per priorem. Is valor erit diversus pro eodem colorato filo respectu diversarum substantiarum, in omnibus substantiis major unitate: in vitris plerumque inter $\frac{15}{10}$ & $\frac{16}{10}$, in aqua proxime $\frac{4}{3}$, in aliis substantiis alius. Est itidem diversus pro diversis filis coloratis respectu ejusdem substantiæ. Differentiam binorum valorum m pertinentium ad bina fila colorata, ut primum rubeum, & postremum violaceum, respectu cujuspiam substantiæ ejusdem dicemus dm.

37. Valor dm non est infinite parvus respectu m, sed solet esse admodum exiguus respectu ipsius. Newtonus invenerat in pluribus substantiis, ut in vitris communibus, valorem $dm = \frac{1}{27}$ valoris $m - 1$ pertinentis ad primum filum rubeum, existente $m - 1$ primi rubei ad $m - 1$ postremi violacei ut 27 ad 28, & crediderat, generalem esse substantiis omnibus hujusmodi legem, ut $\frac{dm}{m-1}$ sit semper $= \frac{1}{27}$. Si valor ejus fractionis esset constans in omnibus binariis substantiarum; non possent fieri lentes acromaticæ compositæ, ut mox patebit: sed inventum est postea, eum valorem in aliis substantiarum binariis esse alium, quod acromaticis telescopiis inveniendis occasionem præbuit. Is valor habetur satis proxime $= \frac{1}{27}$ in vitris communibus, & aqua: sed in vitris habentibus majorem copiam plumbi admixtam, invenitur multo major: in flint Anglicano esse solet $\frac{1}{18}$, in vitro strass $\frac{1}{14}$. In aliis vitris est alius, & ad habendas combinationes pro lentibus acromaticis constantibus ex binis substantiis oportet nosse valores m pertinentes ad ipsas, & rationem valoris dm alterius ad valorem dm alterius.

38. Si ea ratio esset accurate eadem pro omnibus binariis filorum coloratorum; conjunctis binis filis conjungerentur omnia, ut itidem demonstravimus in primo volumine, & patebit etiam ex formulis, quas hic proponemus: invenitur proxime eadem; & idcirco conjunctis binis conjunguntur proxime & reliqua. De modo inveniendi per observationes pro substantiis adhibendis tam valores m, quam rationem valorum dm egimus in Opusculo I primi vo-

voluminis, in quo exposuimus constructionem, & usum instrumenti ad id idonei. Hic evolvemus ea, quæ pertinent ad inveniendas combinationes pro lente, quæ conjungat bina fila diversæ speciei in eodem foco, & impediat illam separationem filorum G'I, G'i; ac in sequentibus paragraphis ostendemus usum ejusmodi lentis compositæ ad impediendos colores ocularium in telescopiis, & applicabimus theorema hic demonstratum ad idem præstandum per plures lentes simplices factas ex eodem etiam vitro communi.

39. Sit BAC (fig. 4 Tab. II) angulus prismatis exiguus, & radius DE adveniat cum inclinatione non nimis magna (magna hic exhibetur ad evitandam confusionem) ad punctum E primæ faciei, per quod transeat perpendiculum FEG: is relictâ EH continuatione viæ præcedentis DE refringetur per viam EI accedendo ad perpendiculum EG. Si IK sit perpendiculum secundæ faciei ductum ex puncto I, ad quod radius appellit; is relictâ IL continuatione viæ præcedentis EI, prodibit per viam IM recedentem a perpendiculo IK. Occurrant sibi invicem rectæ FEG, KI in N, & DEH, MI in O. Erit in ingressu DEF angulus incidentiæ, GEI angulus refractus, HEI refractio: in egressu erit NIE angulus incidentiæ, KIM angulus refractus, LIM refractio; cui cum æqualis sit EIO ad verticem oppositus; erit MOH refractio totius prismatis: ea erit æqualis binis illis refractionibus simul, cum is angulus sit externus respectu OIE, OEI internorum, & oppositorum in casu, quem figura exprimit, in quo utraque e refractionibus singularum facierum fit in eandem plagam: possent eæ fieri in plagas oppositas, quo casu is angulus esset eorum differentia. Angulus autem GNI erit itidem summa angulorum NEI, NIE in eodem casu expresso a figura, qui quidem debet esse æqualis angulo prismatis A; nam uterque debet esse supplementum anguli ENI, quod de primo patet, de secundo facile deducitur ex eo, quod in quadrilineo AENI habente angulos ad E, I rectos, reliqui duo ad A, N simul debeant æquari duobus rectis.

40. Jam vero si primus radius DE adveniat cum directione non nimis obliqua ad primam superficiem; angulus DEF cum reliquis

omnibus non erit nimis magnus, adeoque ii anguli erunt proxime proportionales suis sinubus; eritque $m:1::DEF=NEO:NEI$, adeoque assumendo primo loco secundos terminos rationum, secundo differentias ipsorum, erit $1:m-1::NEI:IEO$. Pariter erit $m:1::MIK=NIO:NIE$, adeoque itidem $1:m-1::NIE:EIO$. Quare in eadem ratione 1 ad $m-1$ erit summa antecedentium NEI, NIE, nimirum angulus GNI æqualis angulo prismatis A, ad summam consequentium IEO, EIO, nimirum ad angulum IOH, qui est refractio totalis facta a prismate: idcirco ea habebitur multiplicando ipsum angulum refringentem per $m-1$. Inde autem patet, differentiam refractionum binorum filorum coloratorum fore ipsum angulum ductum in dm; nam pro secundo filo habebitur is angulus multiplicatus per $m+dm-1$. Quare pro refractionibus non nimis magnis factis per prisma habens angulum non nimis magnum habebitur hujusmodi theorema, quod erit quædam veluti basis eorum, quæ dicturi sumus.

41. *Refractio radii non nimis oblique incidentis in angulum non nimis magnum prismatis æquatur proxime ipsi angulo multiplicato per $m-1$, & differentia refractionum binorum filorum incidentium directione eadem in idem punctum æquatur refractioni minori multiplicatæ per valorem* $\frac{dm}{m-1}$. Hic valor exprimet qualitatem distractivam ejus substantiæ, cum exprimat divaricationem filorum simul incidentium directione eadem. Juxta num. 37 in aqua, & vitro communi hæc distractio pro primo rubeo, & postremo violaceo erit circiter $\frac{1}{27}$ totius refractionis, in flint $\frac{1}{18}$, in strass $\frac{1}{14}$, nimirum pro singulis gradibus refractionis habebitur paullo plus, quam minuta duo in primo substantiarum genere, tria in flint, quatuor in strass. Patet autem, refractionem ita fieri, ut nova via recedat a cuspide anguli radio detorto versus plagam ipsi oppositam.

42. Inde facilis est transitus ad lentes. Sint (fig. 5) BFD, BHD bini arcus circulares orti ex sectione lentis utrinque convexæ per suum axem NM, qui occurrat chordæ communi in G, & habeat in M, N centra eorum circulorum: radius traductus per eam

eàm lentem occurrat ipsis in E, I, & eidem chordæ in G', cui tangentes ductæ per E, I occurrant in K, L, & sibi invicem in A; radii autem ME, NI occurrant ipsi chordæ in P, Q, & sint ER, IS perpendiculares axi. Refractio ejus radii fiet eodem pacto, quo fieret, si loco lentis haberetur prisma cum angulo EAI. Is angulus est summa angulorum ALK, & AKL = EKD. Porro angulus EKG', sive EKP æquatur angulo EMF, sive PMG ob angulos PEK, PGM rectos, & angulos EPK, GPM ad verticem oppositos æquales; ac simili ratione ostenditur angulum KLA, sive QLI esse æqualem angulo HNI, sive GNQ ob angulos QIL, QGN rectos, & angulos IQL, GQN æquales. Quare angulus A prismatis æquivalentis erit æqualis binis angulis FME, HNI, quorum sinus ad radium $= 1$ sunt $\frac{RE}{ME}$, & $\frac{SI}{NI}$. Dicantur a, b bini radii sphæricitatum ME, NI, & neglectâ crassitudine lentis, ac habitis RE, SI pro æqualibus GG', quæ dicatur e, erunt sinus eorum angulorum $\frac{e}{a}$, $\frac{e}{b}$, qui poterunt assumi pro angulis ipsis, adeoque angulus EAI, qui est angulus prismatis æquivalentis, sive angulus refringens poterit considerari ut $= \frac{e}{a} + \frac{e}{b}$.

43. Radius digressus (fig. *6*) e puncto C axis incidat in punctum G' lentis BB, in quod neglectâ crassitudine abierunt puncta E, I fig. 5, & ibidem refractus abeat ad punctum axis I: concipiatur autem recta CG' producta in E. Angulus refringens in G' erit $\frac{e}{a} + \frac{e}{b}$; refractio erit angulus IG'E, æqualis binis G'CG, G'IG, quorum sinus sunt $\frac{GG'}{CG'}$, $\frac{GG'}{G'I}$, ac poterunt substitui CG, GI pro CG', G'I, ubi puncta G, G' sint satis proxima inter se. Fiat CG $= p$, GI $= x$, & accipiantur tangentes pro angulis: erit refractio IG'E $= \frac{e}{p} + \frac{e}{x}$, quæ cum

 de-

debeat (num. 40) æquari angulo refringenti ducto in $m-1$, erit $\frac{e}{p}+\frac{e}{x}=(m-1)(\frac{e}{a}+\frac{e}{b})$. Si fiat $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$; dividendo per e, erit $\frac{1}{p}+\frac{1}{x}=\frac{m-1}{f}$, sive $\frac{1}{x}=\frac{m-1}{f}-\frac{1}{p}$.

44. Hic considerati sunt ut positivi radii sphæricitatum lentis utrinque convexæ, quorum prior a jacet in directione radiorum advenientium, secundus b in directione contraria, & consideratus est ut positivus valor p exprimens GC distantiam a lente puncti, a quo radii divergant, quæ itidem habet directionem contrariam directioni radiorum advenientium. Reducetur formula ad formam commodiorem pro omni genere superficierum convexarum, planarum, concavarum, & pro omni directione radiorum divergentium, parallelorum, convergentium; si omnes valores accipiantur pro positivis, ubi incipiendo a lente jacent in directione radiorum advenientium, quo pacto valor a erit positivus, infinitus, vel negativus, prout prima superficies fuerit convexa, plana, vel concava, contra valor b erit negativus, infinitus, vel positivus pro iisdem qualitatibus superficiei secundæ, & valor p erit positivus, infinitus, vel negativus, prout radii advenerint convergentes, paralleli, vel divergentes. Tum mutato signo valorum b, & p in iis formulis erit $\frac{1}{f}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$, & $\frac{1}{x}=\frac{m-1}{f}+\frac{1}{p}$. Ea formula eruitur aliis methodis independentibus a theoria prismatum, quod præstitimus in Opusculo II Tom. I; & ex ea facile deducuntur omnia theoremata, quæ pertinent ad focos lentium, ubi in earum consideratione negligitur error figuræ sphæricæ, & crassitudo lentis. Eruemus hic ea, quorum usus nobis occurret in hoc Opusculo.

45. In primis patet, omnes radios homogeneos digressos ab eodem puncto C, & incidentes in puncta G' non nimis remota a G debere convergere proxime ad idem punctum I: nam valores m, p, f manebunt iidem, adeoque idem etiam valor $x=$ GI pro omnibus. Idcirco punctum I erit focus radiorum divergentium a C.

46. Pa-

46. Patet præterea, quamcumque lentem, quæ habeat radios sphæricitatum utcumque diversos, habere alias lentes numero infinitas, quæ neglecto errore figuræ sphæricæ, & crassitudine ipsius lentis, sint ipsi æquivalentes in ordine ad nexum inter punctum, a quo radii divergunt, vel punctum, ad quod convergunt ante appulsum, & punctum, ad quod convergunt, vel a quo divergunt post egressum; quod punctum in casu priore dicitur focus realis, & in posteriore virtualis. Nexus inter p, & u erit idem exhibitus ab ea formula, si valor f sit idem. Hic autem erit idem, si in binis lentibus habentibus radios sphæricitatum a, b, a', b' sit $\frac{1}{a'} - \frac{1}{b'} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. Determinato ad arbitrium radio a', semper habebitur radius b' ex æquatione $\frac{1}{b'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, qui erit ejus socius pro lente æquivalente. Inter omnes æquivalentes habebitur una, cujus sphæricitates erunt æquales ambæ convexæ, vel ambæ concavæ, quæ dicitur isoscelia. Sint ejus radii a, & b, & erit $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b}$, posito signo negativo in posteriore termino ob directionem contrariam, quam ibi habent radii æquales sphæricitatum oppositarum æqualium. Hinc $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{2}{a}$, & $f = \frac{1}{2}a$. Nimirum *valor f in formula adhibitus erit dimidium radii sphæricitatum lentis isosceliæ.*

47. Hic valor erit positivus in lente utrinque convexa, & in plano-convexa, ac concavo-convexa habente convexitatem majorem concavitate. Erit enim in primo casu uterque e valoribus $\frac{1}{a}$, $-\frac{1}{b}$ positivus, in secundo alter positivus, alter zero ob radium superficiei planæ infinitum, in tertio alter positivus, & alter negativus, sed negativus minor, ob radium sphæricitatis minoris majorem. Erit autem valor idem negativus in lente utrinque concava, vel plano-concava; vel concavo-convexa habente concavitatem convexitate majorem, quod simili modo demonstratur. Hinc in prioribus tribus casibus lens æquivalens erit u-

trin-

trinque convexa, in posterioribus utrinque concava. Appellabimus lentem convexam eam, quæ habet isosceliam æquivalentem convexam, & dicemus concavam eam, quæ habet isosceliam æquivalentem concavam. Porro cum sit $\frac{1}{a'} - \frac{1}{b'} = \frac{1}{f} = \frac{2}{a}$, erit $a = \frac{2a'b'}{b'-a'}$, & $b'-a'$ in utrinque convexis, vel utrinque concavis est summa radiorum binarum sphæricitatum, in concavo-convexis differentia. Quare, *datis binis sphæricitatum radiis, invenietur radius sphæricitatis lentis isosceliæ æquivalentis dividendo duplum productum eorum radiorum per summam, vel differentiam radiorum non isosceliæ, prout binæ sphæricitates fuerint ejusdem speciei, vel contrariæ.*

48. Si lens etiam non isoscelia invertatur; nexus inter positionem radiorum advenientium ad lentem, & egressorum ex ipsa remanebit idem. Nam lens isoscelia æquivalens remanebit eadem. Hæc æquivalentia non erit accurata ob neglectam crassitudinem lentis, cum errore figuræ sphæricæ; sed erit eo major, quo fuerit minor crassitudo lentis, & minor distantia punctorum G, G'. Diminutâ utrâque in infinitum, minuetur in infinitum error & formulæ, & theorematum inde deductorum.

49. Formula cum iis omnibus, quæ inde deducentur, habebit locum non quidem accurate, sed proxime etiam pro radiis digressis a puncto rectæ nonnihil inclinatæ ad axem lentis: si enim punctum G sit illud idem, in quo axis occurrit lenti, quod dicatur centrum ipsius lentis, & angulus CGG' parum abludat a recto; adhuc ejus sinus erit quamproxime $= 1$, adeoque sinus angulorum GCG', GIG' adhuc erunt quamproxime $\frac{GG'}{CG}$, $\frac{GG'}{GI}$; angulus autem refringens in G' erit idem, ac prius. Idcirco in fig. 1, & 3 radii advenientes ex puncto axis DC posito in immensa distantia habent focum in quodam puncto F ejusdem axis producti, & radii advenientes ex puncto D' rectæ D'C parum inclinatæ ad ipsum axem, & transeuntis per centrum lentis C habent ipsum in productione ipsius D'C in F', uti affirmavimus

num.

num. 9, quod punctum erit positum proxime in eadem distantia ab ipsa lente AA. Ibi efformabitur imago objecti similis formæ; sub qua id apparet directe intuenti, ob lineas ipsius GG' proportionales distantiis visualibus DD'. Aberratio erit major hic, quam in axe, novis erroribus inductis a suppositione angulorum G' æqualium recto; sed ii errores novi erunt perquam exigui, si anguli ad G' non differant plurimum a recto; quia prope quadrantem differentia sinuum est perquam exigua, nimirum exigua respectu ipsius differentiæ arcuum. Idcirco etiam in fig. 3 Tab. I radii homogenei, qui adveniant ad lentem BB directione IG' parallela rectæ GF' transeuntis per ejus centrum G debent habere focum alicubi in ipsa GF', tanquam si advenissent ex ejus puncto posito in infinita distantia, quod affirmavimus num. 14.

50. Si radii adveniant paralleli; valor p evadit infinitus, & $\frac{1}{p} = 0$. Tum erit $\frac{1}{u} = \frac{m-1}{f}$. Dicatur h valor x, qui habetur in eo casu, adeoque exprimit distantiam focalem radiorum parallelorum, & erit $\frac{1}{h} = \frac{m-1}{f}$, ac pro omni alia positione radiorum habebitur $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$: erit autem $h = \frac{f}{m-1}$; unde patet, distantiam focalem radiorum parallelorum, quæ juxta numer. 10 dicitur absolute distantia focalis lentis cujuspiam, non pendere a solis radiis sphæricitatum determinantibus valorem f, sed etiam a vi refractiva determinante valorem m. Valor h paribus sphæricitatibus erit eo major, quo valor $m-1$ fuerit minor. Cum is pro radiis violaceis sit major, quam pro rubeis; distantia focalis violaceorum erit minor, quam rubeorum, nimirum in fig. 1 Cf minor, quam CF, quod affirmavimus num. 9.

51. In lentibus diversarum substantiarum distantia focalis erit eo minor, quo ipsa substantia habuerit majorem vim refractivam. Omnes itidem distantiæ focales radiorum & convergentium, & divergentium pendebunt a valore m, a quo pendet h, cum in formula $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$ manente eadem incidentia radiorum, a qua sola pendet p, adhuc h pendeat a valore m.

52. Va-

52. Valor h exprimens distantiam focalem absolutam est idem pro omnibus lentibus æquivalentibus, & pro lente isoscelia in vitris est communiter paullo minor radio sphæricitatis communi binarum superficierum. Cum enim m sit (num. 37) in vitris plerumque paullo major $\frac{3}{2}$; erit $m-1$ paullo major $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{m-1}$ paullo minor 2, ac ob $f=\frac{1}{2}a$ in lentibus isosceliis (num. 47), erit $\frac{f}{m-1}$ paullo minor, quam a; sed in aliis vitris alius, quod mirari solent artifices ignari theoriæ. In lentibus convexis sphæricitatis magnæ, in quibus crassitudo non est exigua respectu radii sphæricitatis, hic valor non parum turbabitur ab ipsa crassitudine: habebit locum pro distantia a puncto quopiam assumpto intra ipsam crassitudinem. Erit autem accuratus pro radiis infinite proximis centro: in aperturis majoribus fiet adhuc brevior ab errore figuræ sphæricæ radiorum remotiorum.

53. Valor h in lente convexa erit positivus, in concava negativus; quia in formula $h=\frac{f}{m-1}$ valor m est semper positivus, & valor $f=\frac{1}{2}a$ positivus in prima, negativus in secunda (numer. 47), adeoque radii, qui adveniunt paralleli ad primam, convergent ad focum positum ultra ipsam, uti sunt puncta F, F' in fig. 1, & 3: qui ita adveniant ad secundam, divergent, adeoque lens convexa habebit focum realem pro radiis parallelis, concava virtualem, juxta num. 46. Poterunt considerari in quavis lente bini foci, juxta num. 10. quorum alter jaceat citra lentem respectu radiorum advenientium, alter ultra ipsam, positi in eadem distantia ab ipsa $=h$, ut in fig. 6 Tab. II puncta P, F. Radii advenientes paralleli axi directione CGI ad lentem BB, quæ sit convexa, convergent post egressum ad focum ulteriorem F: radii, qui advenirent ex parte opposita directione IGC, convergerent ad focum P, qui esset ulterior respectu ipsorum, & citerior respectu illorum priorum. Si lens sit concava; radii egressi divergerent a foco citeriore, in quo pro ipsa poni deberet punctum F, posito P in foco ulteriore ad hoc, ut ubique punctum F dirigat

rigat radios refractos, veluti C dirigit incidentes, & servetur analogia geometrica, vi cujus constructio, & enunciatio facta pro uno casu possit applicari reliquis omnibus juxta generales constructionum leges, quas ego fuse evolvi in tertio meorum elementorum tomo post sectionum conicarum elementa.

54. Formula $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$ exhibebit nexum inter distantiam a data quavis lente puncti dirigentis radios incidentes, qui ad ipsum convergant, vel ab ipso divergant ante transitum, & distantiam puncti dirigentis radios refractos, quod punctum erit focus realis, ad quod convergent, vel virtualis, a quo divergent post egressum: nam illa prior est p, hæc posterior x, & h in data lente quantitas constans. Ea est semper positiva in lente convexa, negativa in concava juxta numerum præcedentem. Hinc primus terminus valoris $\frac{1}{x}$ erit semper positivus pro lente convexa, negativus pro concava. Secundus erit positivus, zero, vel negativus, prout radii advenient ad lentem convergentes, paralleli, vel divergentes: signum valoris x erit idem ac h, si p habuerit signum idem cum ipso h, vel fuerit zero, vel habuerit signum contrarium, & fuerit major, quam h, ut $\frac{1}{p}$ sit minor, quam $\frac{1}{h}$: valor x erit infinitus, si p habuerit signum contrarium h, & fuerit ipsi æqualis, existente tum $\frac{1}{h} + \frac{1}{p} = 0$. Signum ipsius x erit contrarium signo h, si p habuerit signum contrarium h, & fuerit ipso minor; quia tunc $\frac{1}{p}$ erit major, quam $\frac{1}{h}$. Inde facile patent theoremata sequentia, quorum plura adhibuimus num. 10.

55. Pro utravis lente convexa, & concava distinguemus casus quinque. Radii pro convexa adveniant 1°. convergentes: 2°. paralleli: 3°. divergentes a distantia majore, quam sit distantia focalis: 4°. divergentes a distantia æquali, sive a foco citeriore: 5°. divergentes a distantia adhuc minore. In 1°. casu radii refracti convergent ad focum realem propiorem, quam sit focus parallelo-

rum : in 2°. ad focum ipsum ulteriorem : in 3°. convergentes ad focum remotiorem : in 4°. paralleli : in 5°. divergentes : nam in primo casu erit valor p positivus : in 2°. infinitus : in reliquis negativus, sed major, æqualis, minor, quam h, adeoque $\frac{1}{p}$ in 1°. casu valor positivus addens aliquid termino $\frac{1}{h}$: in secundo zero : in reliquis negativus, sed minor, æqualis, major respectu $\frac{1}{h}$. Pro lente concava adveniant 1°. divergentes : 2°. paralleli : 3°. convergentes ad distantiam majorem, quam sit distantia focalis : 4°. ad æqualem, sive ad focum ulteriorem : 5°. ad distantiam minorem. In 1°. casu radii refracti divergent a foco virtuali propiore, quam sit focus parallelorum : in 2°. ab eo ipso foco : in 3°. divergent a foco virtuali remotiore : in 4°. erunt paralleli : in 5°. convergentes. Demonstratio est prorsus similis, sed existente h negativo, & mutato signo valoris p in singulis casibus in contrarium.

56. Plurima theoremata pro casibus singularibus erui possunt ex eadem formula : proponemus hæc tria, quorum usus occurret inferius. *Si radii adveniant convergentes ad distantiam æqualem distantiæ focali, vel divergentes a dupla, vel divergentes a dimidia distantia focali ; prodibunt in primo casu convergentes ad distantiam dimidiam ipsius distantiæ focalis, in secundo convergentes itidem ad duplam, in tertio divergentes a distantia ipsi æquali*. Quia in formula $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$, erit p in primo casu $= h$, in secundo $= -2h$, in tertio $= -\frac{1}{2}h$. Quare in primo $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h} = \frac{2}{h}$, & $x = \frac{1}{2}h$: in secundo $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} - \frac{1}{2h} = \frac{1}{2h}$, & $x = 2h$: in tertio $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} - \frac{2}{h} = -\frac{1}{h}$, & $x = -h$.

57. Addemus alia duo generalia, quorum primum erit nobis usui inferius, secundum exhibet methodum facilem inveniendi distantiam focalem datæ lentis per observationem. *Si radii incidant*

dant in lentem convexam BB *divergentes a quodam puncto* C *ita, ut convergant ad quoddam punctum* I; *sint autem* F, P *ejus foci ulterior, & citerior; erit* CP : CG :: CG : CI :: PG = GF : GI. Demonstrabitur facilius ope formulæ numeri 43 pro radiis divergentibus $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} - \frac{1}{p}$, ubi CG $= p$, PG = GF = h, GI $= x$, adeoque CP $= p - h$. Porro ibi $\frac{1}{x} = \frac{p-h}{ph}$, adeoque $x = \frac{ph}{p-h}$, & $p + x = \frac{pp}{p-h}$ ob $- ph + ph = 0$: hinc CP $= p - h$: CG $= p$ :: CG $= p$: CI $= p + x$; unde ex natura proportionis continuæ deducitur, in eadem ratione esse etiam differentiam priorum PG, sive GF ad differentiam postremorum GI.

58. *Erit etiam distantia focalis* GF *æqualis producto e binis distantiis* GC, GI *lentis a punctis dirigentibus radios incidentes, & refractos divisæ per earum summam* CI. Erit enim $\frac{1}{h} = \frac{1}{x} + \frac{1}{p} = \frac{p+x}{px}$, adeoque $h = \frac{px}{p+x}$, ubi p, x sunt eæ duæ distantiæ, $p+x$ earum summa. Si ad foramen exiguum conclavis occlusi illustratum a sole apponatur charta cum filo tenui transverso; collocatâ lente in satis magna distantia ab ipso, facile invenietur distantia ab eadem lente, in qua appareat maxime distincta imago fili. Productum binarum distantiarum lentis a foramine, & ab imagine divisum per earum summam exhibebit distantiam focalem quæsitam.

59. Hæc pertinent ad lentes singulas: addemus aliud usui futurum pro lentibus pluribus conjunctis, quod neglectâ earum crassitudine, evadit simplex, & elegans. Pro lentibus sequentibus valores m, f, h, p, x exprimantur iisdem litteris cum serie accentuum, & ex formula $\frac{1}{x} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$ num. 44, eruentur valores distantiarum puncti dirigentis radios refractos, si adhibeatur x pro p', tum x' pro p'', & ita porro. Inde in egressu e secunda lente habebitur $\frac{1}{x'} = \frac{m'-1}{f'} + \frac{1}{p'} = \frac{m'-1}{f'} + \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$:

 in

in egressu e tertia $\frac{1}{x''_{\circ}} = \frac{m''-1}{f''} + \frac{1}{p''} = \frac{m''-1}{f''} + \frac{m'-1}{f'} + \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$. Patet autem progressus.

60. Cum $\frac{m-1}{f}$ sit $= \frac{1}{h}$, $\frac{m'-1}{f'} = \frac{1}{h'}$, & ita porro; si dicatur H distantia focalis omnium simul; facto $\frac{1}{p} = 0$, erit $\frac{1}{H} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''}$ &c. Nimirum *fractio habens pro numeratore 1, & pro denominatore distantiam focalem plurium lentium conjunctarum, æquabitur summæ omnium similium fractionum pertinentium ad singulas*. Inde autem patet, *si conjungantur binæ lentes habentes distantias focales æquales, distantiam focalem communem fore dimidiam singularum*. Erit enim $h' = h$, adeoque $\frac{1}{H} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h} = \frac{2}{h}$ & $H = \frac{1}{2}h$. Patet itidem, quocunque ordine ponantur lentes, distantiam focalem omnium simul fore semper eandem, cum nimirum debeat esse eadem earum fractionum summa.

§. III.

De remedio adhibendo coloribus ocularium per unicam ocularem acromaticam.

61. UBICUMQUE collocetur unica lens BB (fig. 3 Tab. I) simplex, habebitur semper separatio illa radii obliqui CG' in fila G'I, G'i diversorum colorum. Nam refractio debet esse (num. 41) æqualis angulo refringenti multiplicato per $m-1$; angulus autem refringens in G' est idem pro omnibus filis coloratis advenientibus per CG', & valor m diversus in eadem unica substantia pro diversis filis coloratis. Potest tantummodo imminui, minuendo campum, & augmentum. Nam refractio in fig. 6 Tab. II est angulus IG'E, qui æquatur CG'N communi utrique figuræ, ipsi, & tertiæ. Is debet multiplicari per valorem $\frac{dm}{m-1}$, sive (num. 37) in

vitris

vitris communibus proxime per $\frac{1}{27}$, ad habendam differentiam refractionum NG'n, & idem æquatur binis GCG', GIG' internis, & oppositis. Prior GCG' = D'CD exhibet distantiam angularem objecti a centro campi, & in fine campi ipsius ejus semidiametrū: secundus GIG' est idem ille prior auctus per telescopium, adeoque multiplicatus per augmentum telescopii. Quare si distantia a centro campi dicatur c, & augmentum n; erit separatio colorum $\frac{dm}{m-1}(nc+c)$, nimirum in vitro communi $\frac{1}{27}c(n+1)$.

62. Hæc est separatio filorum coloratorum, cujus determinationem promisimus num. 22. Ea pendet a valoribus c, & n. Si centrum ocularis sit in centro aperturæ, ut esse debet in telescopio rite ordinato; in ipso centro est $c = 0$, adeoque distractio ibi est nulla. Pari augmento n ipsa distractio crescit in ratione c, adeoque est eo major, quo major est distantia objecti a centro campi: pari autem distantia crescit in ratione $n+1$, adeoque est eo major, quo augmentum majus. Nihil ad hoc colorum genus confert, major, vel minor apertura objectivi: id pendet unice ab iis binis elementis, a campo, qui pendet ab apertura ocularis, & augmento: minuitur, si minuatur campus, vel augmentum, vel utrumque simul, & ea est unica ratio minuendi eos colores per unicam ocularem simplicem. Extra centrum campi valor c semper est aliquis, & $n+1$ non potest evadere $= 0$, adeoque nec ii colores tolli possunt extra centrum campi.

63. Si campus sit unius gradus, & augmentum tantummodo 20; distantia a centro in margine campi est minutorum 30, adeoque separatio colorum $\frac{30 \times 21}{27} = 23'$. Telescopia communia trium pedum, quæ quadrantibus astronomicis aptari solent, habent campum adhuc majorem, & augmentum majus: in iis in fine campi color violaceus extremus debet esse separatus a rubeo primo saltem per minuta 23, sive plusquam per duos trientes diametri apparentis lunæ visæ nudo oculo. Si ejus magnitudinis non apparet separatio colorum in iis telescopiis; id provenit a

plu-

pluribus causis. Primo quidem, quia postrema fila violacea habent vim nimis exiguam ad percellendos oculos, adeoque separatio sensibilis oculo directe intuenti determinatur per numerum aliquanto minorem, quam $\frac{1}{27}$ refractionis totius; deinde quia trans tubum excludentem omnia, quæ interjaceant inter spectatorem, & objectum, quod per ipsum transpicitur, imago apparet multo minus aucta, quam deberet respectu ejus augmenti intra oculum, ut & lunaris diameter transpecta trans tubum omni vitro vacuum apparet multo minor, quam libere visa extra tubum, & in summo cælo apparet multo minor, quam prope horizontem. Accedunt ea, quæ proposuimus num. 22, ex quibus omnibus fit, ut ii colores sint multo magis sensibiles in imagine objecti satis lucidi transmissâ per telescopium, & exceptâ chartâ albâ, quam in visione directâ trans telescopium. Verum & in hac habentur semper in ejusmodi telescopiis versus marginem campi.

64. In telescopiis, quæ habent objectivum acromaticum, si habeant ocularem unicam simplicem, iidem sunt multo majores, quia ea admittunt augmentum multo majus. Verum generaliter, ubi augmentum fit majus, semper campus est minor, & facile demonstratur, non posse campum ingentem conjungi cum ingenti augmento. Id constat etiam ex eo, quod spatium in fundo oculi præparatum ad excipiendas imagines habet certos limites, intra quos eo minor pars imaginis directæ contineri potest, quo majus est ejus augmentum, ut si imago quæpiam depicta in data exigua tabula, debeat transferri ad aliam æqualem dimensionibus auctis, eo minor ejus pars in eam transferri poterit, quo dimensionum augmentum est majus. Inde fit, ut ii colores non possint ita enormiter augeri, uti augerentur, si cum ingenti campo conjungeretur ingens imaginis augmentum.

65. Remedium iis coloribus adhibebitur; si pro oculari simplici adhibeatur composita acromatica. Acromaticam ocularem appellabimus hic, ut num. 1 objectiva acromatica diximus nomine jam communi ea, quæ ita composita sunt, ut conjungant focos binorum filorum coloratorum, licet non conjungant accurate focos cæterorum, sed proxime. Ocularis ejusmodi applicata (fig. 3 Tab. I) in BB de-

detorquebit utrumque filum delatum per CG' directione eadem G'I. Nam omnia fila coloris ejusdem delata ad lentem BB directione IG haberent focum in quodam puncto axis F pro utroque filorum genere, & omnia delata directione GF' in quodam puncto F' ejusdem rectæ, quod patet ex num. 49; cum ea recta transeat per centrum lentis BB, & ubi campus non sit major justo, non inclinetur nimis ad axem. Quare si lens sit ita composita, ut debeat conjungere binos focos binorum colorum; deberet conjungere in eodem puncto F' rectæ GF' omnia fila utriusque coloris delata directione IG' ipsi parallela. Hinc (num. 55) utrumque coloratum filum, quod deferatur simul ad lentem BB directione F'G', debebit prodire conjunctum per eandem rectam G'I parallelam F'G, quod affirmavimus num. 14 de filis singulorum colorum respectu sui foci F'.

66. Ubicumque collocetur ocularis BB, si sit eo modo composita, corriget illam separationem filorum coloratorum pertinentium ad radium CG': sed ad habendam distinctionem imaginis oportet, sit F focus communis & objectivi, & ocularis vel accurate, vel proxime juxta id, quod exposuimus a num. 18. Existente F foco communi, & F' foco objectivi pro radiis habentibus directionem D'CG', ipsum F' erit aliquanto remotius ab oculari, quam sit ejus focus radiorum habentium directionem GF'. Cum enim sit CF' quam proxime æqualis CF (num. 49) & CF', F'G sint simul majores sola CG, demptis æqualibus CF', CF, remanebit F'G major, quam FG. Id discrimen non erit satis sensibile, si distantia focalis GF sit satis magna respectu semiaperturæ GG' determinantis semidiametrum campi. Sed ubi adhibentur lentes distantiæ focalis nimis exiguæ ad habendum ingens augmentum, discrimen ipsum pariet illud incommodum, quod in pluribus telescopiis occurrit, ut protrusâ lente BB versus objectivum, donec habeatur imago distincta in centro campi F, margo appareat confusus in F', & ad habendam distinctionem ibi, protrudenda sit adhuc magis ocularis ipsa, amissâ distinctione in centro.

67. Lens ocularis rite composita destruet eodem pacto colores in

in telescopio Galileano figuræ 2, quæ nimirum detorquebit per eandem rectam G'L' utrumque filum delatum per CG', & reliqua omnia per rectas eidem rectæ quam proximas. Remanet tantummodo, ut doceamus, quo pacto determinandæ sint sphæricitates ad habendam lentem compositam tam convexam pro telescopio figuræ 1, quam concavam pro telescopio figuræ 2, ut sit acromatica.

68. Lens composita, ut sit acromatica, debet conjungere in eodem puncto fila duorum colorum digressa ab eodem puncto. Formula (fig. 6 Tab. II) pro GI, quæ est distantia a lente puncti I dirigentis radios refractos, est (num. 59) $\frac{1}{x'} = \frac{m'-1}{f'} + \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$, ubi x' est valor GI post transitum per binas lentes, p distantia CG puncti dirigentis radios incidentes, m', m sunt valores pertinentes ad vim refractivam substantiarum, e quibus constant ipsæ lentes, f', f valores dati per radios sphæricitatum. Ad habendam unionem in eodem puncto I oportet valor x' sit idem, sive ponantur in formula m', & m pertinentes ad unum colorem, sive $m' + dm'$, $m + dm$ pertinentes ad alium, adeoque debet esse $\frac{dm'}{f'} + \frac{dm}{f} = 0$, sive $\frac{1}{f'} = -\frac{dm}{dm'} \times \frac{1}{f}$, & $fdm' = -f'dm$.

69. Valores f, f' (num. 46) sunt dimidii radiorum sphæricitatis lentium isosceliarum æquivalentium, quorum alter cum debeat esse positivus, alter negativus, lens altera debebit esse convexa, altera concava: cum vero debeat esse $fdm' = -f'dm$, erit f' : f :: dm' : $-dm$, adeoque radii sphæricitatum debebunt esse in ratione directa valorum dm pertinentium ad substantias, ex quibus sunt compositæ. Quod si ponatur in valore $\frac{1}{x'}$ pro $\frac{1}{f'}$ valor suus $-\frac{dm}{dm'} \times \frac{1}{f}$, habebitur $\frac{1}{x'} = -(m'-1) \times \frac{dm}{dm'} \times \frac{1}{f} + \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p} = \frac{dm}{f} \times (-\frac{m'-1}{dm'} + \frac{m-1}{dm}) + \frac{1}{p}$.

70. Si

70. Si utraque lens sit ex eadem substantia; erit $m' = m$, & $dm' = dm$, adeoque $f' = -f$, $-\frac{m'-1}{dm'} + \frac{m-1}{dm} = 0$, unde evadit $\frac{1}{x'} = \frac{1}{p}$. Nimirum $f' = -f$ indicat sphæricitates lentium oppositas debere esse æquales, & $x' = p$, adeoque refractionem nullam, habentibus idcirco omnibus filis post transitum per lentem compositam directionem eandem, quam habuerant ante, quod ostendit, non posse ad eam rem adhiberi vitra ex eadem substantia. Similis autem demonstratio evinceret, quemcumque numerum lentium contiguarum ex eadem substantia fore ineptum ad eam rem.

71. Præterea si lens debeat esse convexa, quod requiritur pro quovis objectivo, & pro oculari figuræ 1; debebit valor x' esse positivus etiam pro radiis parallelis, in quo casu $\frac{1}{p} = 0$: idem autem debet esse negativus pro lente concava. Id fieri non poterit, nisi valores $\frac{m'-1}{dm'}$, $\frac{m-1}{dm}$ fuerint inæquales, nimirum cum $\frac{dm}{m-1}$ exprimat (num. 41) distractionem radiorum pari refractione; oportebit substantiæ adhibendæ habeant vires distractivas diversas. Quoniam (num. 60) utravis lens potest collocari prima versus objectivum; poterit assumi m pro substantia minus distractiva, pari refractione, m' pro magis distractiva, utrovis ordine deinde collocentur eæ binæ lentes, licet in deductione formulæ positum sit m pro prima, m' pro secunda. Tum vero erit $\frac{dm'}{m'-1}$ majus, quam $\frac{dm}{m-1}$, & $\frac{m'-1}{dm'}$ minus, quam $\frac{m-1}{dm}$, adeoque $-\frac{m'-1}{dm'} + \frac{m-1}{dm}$ valor positivus. Quare cum valor dm sit semper positivus, debebit f esse valor itidem positivus pro lente composita convexa, negativus pro concava; adeoque e binis lentibus conjungendis pro priore composita debebit fieri convexa ex substantia, quæ pari refractione minus distrahit, con-

cava ex distrahente magis : & vice versâ pro compositâ posteriore.

72. Demum si differentia virium eo sensu distractivarum sit nimis exigua in binis substantiis ; eæ erunt ineptæ ad efformandas ejusmodi lentes ; quia ex numeris 59, & 60 infertur, esse $\frac{1}{x'} = \frac{1}{H} + \frac{1}{p}$, ubi H est distantia focalis lentis compositæ : conferendo autem hunc valorem cum valore ejusdem fractionis, qui habetur in fine numeri 69, habebitur $\frac{1}{H} = \frac{dm}{f} \times (- \frac{m' - 1}{dm'} + \frac{m - 1}{dm})$, sive ob $\frac{1}{h} = \frac{m - 1}{f}$ (numer. 50), adeoque $\frac{dm}{f} = \frac{dm}{h(m - 1)}$, fiet $\frac{h}{H} = \frac{dm}{m - 1} (- \frac{m' - 1}{dm'} + \frac{m - 1}{dm})$. Is valor erit nimis exiguus, adeoque nimis exigua ratio distantiæ focalis lentis primæ convexæ respectu distantiæ focalis lentis compositæ, quæ posterior evadit nimis magna, nisi illa prior sit admodum exigua, quod fieri non potest, nisi sit admodum exiguus saltem alter e binis ejus radiis sphæricitatis cum curvatura nimis magna. Ubi autem agitur tam de objectivis, quam de ocularibus, radius sphæricitatis superficiei cujusvis etiam unicæ nimis exiguus respectu distantiæ focalis impedit aperturam satis magnam, quæ in objectivo est necessaria ad habendam satis magnam copiam luminis transmissi, & impediendam obscuritatem, & in ocularibus ad habendum campum satis magnum. Apertura non potest fieri major diametro, sive duplo radio sphæricitatis, ut patet : debet autem esse multo minor ipso radio ad evitandos errores figuræ sphæricæ, quorum correctio ubi quæritur, ut in objectivis, in quibus est omnino necessaria, supponitur in omnibus calculis apertura exigua respectu radii sphæricitatis, sine qua suppositione si ii destruantur in magna distantia a centro campi, non destruentur in medio campo. Adhibitis radiis sphæricitatum, qui admittant satis magnas aperturas, distantiæ focales prodibunt nimis longæ; quod si habeatur in objectivo, requirit nimiam longitudinem tuborum, in oculari autem imminuit augmentum, quod pendet ab ejus distantiæ brevitate.

73. Hinc

73. Hinc quamvis in vitris communibus inveniatur discrimen aliquod in distractione inducta pari refractione; eæ substantiæ non possunt adhiberi ad ejusmodi usum, sed requiritur pro altera e lentibus conjungendis flint, vel strass, & hoc posterius est adhuc magis idoneum, cum (num. 37) habeat majorem ejusmodi vim distractivam. Ea vis eo major inveniri solet, quo plus plumbi habetur in vitro. Generaliter eo aptiores erunt substantiæ conjungendæ cum vitro communi, quo major fuerit in iis valor $\frac{dm'}{m'-1}$, nimirum quo major differentia dm', & minor valor m'. Valor m non solet augeri multum, adhuc tamen minus commode accidit, quod in flint, & strass, quæ adhiberi solent, cum valore dm', crescit etiam valor m'. Verum cum in multo majore ratione crescat dm', quam $m'-1$, adhiberi possunt, & hic proponemus dimensiones pro ocularibus, quæ conveniunt pluribus ex ejusmodi binis substantiis combinandis cum pluribus vitris communibus. Sed ad habendas dimensiones accuratas, patet ex hisce ipsis formulis, esse necessariam determinationem qualitatum refractivarum utriusque substantiæ.

74. Et quidem ad relationem mutuam radiorum sphæricitatis satis est habere solam rationem valorum $\frac{dm}{dm'}$, & ad relationem ipsorum ad distantiam focalem lentis compositæ requiritur præterea uterque valor m, m': nam prima continetur (numer. 68) in formula $\frac{1}{f'} = -\frac{dm}{dm'} \times \frac{1}{f}$, sive $\frac{f}{f'} = -\frac{dm}{dm'}$, secunda (num. 69) in formula $\frac{1}{x} = -(m'-1) \times \frac{dm}{dm'} \times \frac{1}{f} + \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$, ubi omisso $\frac{1}{p}$, valor x', evadit distantia focalis lentis compositæ H, adeoque habetur $\frac{f}{H} = m-1 - \frac{dm}{dm'} \times (m'-1)$: sunt autem f, f' dimidii radii sphæricitatis isosceliarum æquivalentium (num. 46). Valores absoluti m, m' requiruntur etiam pro corrigendo errore figuræ sphæricæ in objectivis. Ea ipsa tria, nimirum

rum m, m', $\frac{dm}{dm'}$ inveniuntur admodum facile ope mei instrumenti methodo exposita in Opusculo I Tomi I.

75. Collectis omnibus, quæ deduximus ex formula binarum lentium, simul habebuntur sequentia theoremata. *Lens ocularis acromatica non potest esse simplex: non potest componi e binis lentibus constantibus ex eodem vitro: requirit duo vitra inducentia separationem colorum, pari refractione, non parum diversam, quæ nimirum habeant valores* $\frac{dm}{m-1}$ *non parum diversos: quo majus est eorum valorum discrimen in binis vitris, eo ipsa aptiora sunt ad componendam lentem acromaticam: debet pro lente composita convexa fieri convexa lens e materia minus distrahente, ut vitro communi, & concava e materia magis distrahente, ut flint, vel strass: ratio radiorum sphæricitatis lentium isoscelia-rum æquivalentium debet esse eadem, ac ratio valorum dm pertinentium ad earum substantias.* Accedunt sequentes formulæ, quæ vel sunt ipsæ propositæ, vel ex ipsis facile deducuntur. Factis radiis sphæricitatum substantiæ minus distrahentis a, $-b$, magis distrahentis a', $-b'$, & $\frac{1}{f}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$, $\frac{1}{f'}=\frac{1}{a'}-\frac{1}{b'}$, ac ratione sinuum in illa m, in hac m', cum differentiis pro binis filis coloratis dm, dm', distantia focali lentis compositæ H; habebuntur hujusmodi binæ æquationes $\frac{1}{f'}=-\frac{dm}{dm'}\times\frac{1}{f}$, $\frac{1}{H}=\frac{m-1}{f}+\frac{m'-1}{f'}=\frac{1}{f}\times(m-1-\frac{dm}{dm'}(m'-1))$.

76. Quoniam binæ sunt æquationes pro efformanda lente acromatica distantiæ focalis datæ, & valores determinandi sunt quatuor, nimirum a, b, a', b'; remanent binæ determinationes arbitrariæ. Ubi agitur de objectivo, aliam determinationem requirit correctio erroris figuræ sphæricæ: ea in ipso est maxime necessaria; cum in aperturis majoribus, quas ea objectiva requirunt, is error crescat ita, ut evadat admodum sensibilis in majore illa distantia focali, quæ objectivo tribui debet, ad habendum augmentum

tum satis magnum. Ea esset utilis etiam in oculari potissimum ad evitandum aliud vitium, quod sæpe occurrit in telescopiis habentibus campum satis magnum cum satis magno augmento. Id vitium consistit in eo, quod lineæ rectæ objecti detorqueantur ad arcus incurvos, atque eo magis curvatos, quo magis distant a centro campi. Provenit autem ex eo, quod distantia GI non est eadem pro ipsis filis homogeneis incurrentibus in omnia puncta aperturæ, sed major pro incurrentibus prope centrum, quam pro incurrentibus in majore distantia ab ipso; unde fit, ut & augmentum imaginis prope margines campi sit majus, quam prope centrum, & distantiæ punctorum objecti a centro campi augeantur in majore ratione pro punctis remotioribus ab ipso centro, quam pro propioribus (*).

77. Adhuc tamen, si apertura ocularium non sit nimis magna respectu radiorum sphæricitatis; id vitium non evadit sensibile, & aliunde correctio erroris figuræ sphæricæ requirit calculum multo complicatiorem, & ipsam ejusmodi lentium constructionem magis molestam. Plura, quæ ad ipsam pertinent, proponemus in capite secundo: hic autem insistemus soli correctioni colorum, quæ admittit determinationes multo simpliciores adhibitis tantummodo formulis numeri 75, & assumptis reliquis determinationibus arbitrariis. Poterunt autem pro unica lente convexa e vitro communi adhiberi etiam binæ convexæ ex eodem, quod evadit utile ad evitandam nimiam brevitatem radiorum sphæricitatis, quam in ea requirit lens concava ejus socia præstans effectum refractionis contrarium, qui ejus focum amandat ad distantiam multo majorem eâ, quæ haberetur per ipsam solam. Habetur semper lens simplex æquivalens compositæ ex pluribus ejusdem materiæ, quæ sola habens curvaturam majorem præstabit in ordine ad refractionem, & distractionem effectum eundem, quem præstant illæ omnes habentes curvaturas minores.

78. Si pro iis binis dicantur F, & F', quod in ea unica est *f*, & di-

(*) Omnis theoria pertinens ad hanc curvaturam exponetur uberius in secundo capite hujus Opusculi, adjectâ figurâ ad rem idoneâ.

& dicatur $\varkappa$ distantia focalis tam ejus solius, quam compositæ ex iis binis; erit $\frac{1}{\varkappa} = \frac{m-1}{F} + \frac{m-1}{F'}$, adeoque $\frac{1}{f} = \frac{1}{F} + \frac{1}{F'}$. Inde determinari potest, quod pertinet ad ipsas, quæ deinde collocari poterunt vel conjunctæ immediate, vel interpositâ inter ipsas lente illâ aliâ ex materia magis distrahente, cum (num. 60) quocumque ordine ponantur plures lentes conjunctæ, habeatur eadem communis distantia focalis, neglecto errore figuræ sphæricæ, & neglectâ lentium crassitudine.

79. Assumemus pro binis lentibus binas suppositiones, quarum singulæ continebunt binas determinationes arbitrarias: prior assumet lentem utramque isosceliam, posterior isosceliam eam, quæ est ex materia magis distrahente, & superficiem internam ejus, quæ est ex minus distrahente, congruentem cum internâ isosceliæ. Pro tribus lentibus, quarum binæ ex materia minus distrahente, & intermedia ex magis distrahente, assumemus præterea eas binas prorsus æquales, intermediam vero isosceliam, & eas binas in prima suppositione itidem isoscelias, in secunda cum superficiebus internis itidem congruentibus (*). Eæ suppositiones cum binis æquationibus determinant omnes radios sphæricitatis; sed hic assumemus pro unitate radium sphæricitatis lentis isosceliæ, quæ est ex materia magis distrahente: invento valore distantiæ focalis in ejusmodi unitatibus, habebitur relatio omnium radiorum sphæricitatis ad eam ipsam distantiam, quâ data in aliis unitatibus quibuscumque, ut in lineis pedis Parisiensis, invenientur facile reliqui radii omnes in iisdem.

80. Eæ quatuor positiones exhibebunt eosdem prorsus numeros pro radiis lentis compositæ convexæ, & concavæ, cum eo solo discrimine, quod in composita convexa lens e vitro magis distrahente erit concava utrinque, reliquâ, vel reliquis binis convexis;

(*) Has ipsas suppositiones assumpsimus etiam in secundo Opusculo Tomi I, ubi & formulas eruimus pro iisdem hisce combinationibus respondentes unitati ibi adhibitæ, & theoremata deduximus, ac regulas finales, quæ cum his vel penitus congruunt, vel ad hasce facile reducuntur.

xis; in concava e contrario illa erit convexa, hæc, vel hæ concavæ. Haberentur octo systemata pro lente composita: sed cum iidem valores obveniant pro composita convexa, & concava, permutatis tantummodo convexitatibus, & concavitatibus, remanent sola quatuor. Duplicabitur eorum numerus, si pro vitro magis distrahente adhibeatur vel flint, vel strass, pro quorum priore assumatur $\frac{dm}{dm'} = \frac{2}{3}$, & pro posteriore $= \frac{1}{2}$, ut haberi solet in ipsis satis proxime. Ex solæ suppositiones determinabunt relationem radiorum sphæricitatis omnium ad se invicem: pro relatione ipsorum ad distantiam focalem communem assumendi erunt itidem valores m, m', qui parum abludant in iis vitris a valore $\frac{3}{2}$. Eruemus inde octo systemata pro lente composita convexa, & totidem cum iisdem numeris habebuntur pro concava: erunt quatuor pro flint, & totidem pro strass: ex iis quatuor bina pro binis lentibus, alia bina pro tribus: ex iis binis unum pro lentibus omnibus isosceliis, & alterum pro superficiebus internis congruentibus.

81. Porro exhibendi erunt prius valores algebraici, ut determinatis accuratius singularum substantiarum valoribus m, m', $\frac{dm}{dm'}$, possit institui calculus accuratior: tum adhibebimus numeros simpliciores ex suppositione $m = m' = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ & $\frac{dm}{dm'} = \frac{2}{3}$, vel $= \frac{1}{2}$. Poterit autem fieri $\frac{dm}{dm'} = u$ ad faciliorem scriptionem, quod & hic superius præstitimus, & passim in tomo I.

82. Pro binis lentibus componentibus ocularem convexam erit (num. 79) $a' = -b' = -1$. Hinc $\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'} = -1 - 1 = -2$. Sed $\frac{1}{f'} = -\frac{dm}{dm'} \times \frac{1}{f} = -\frac{u}{f}$. Quare $\frac{u}{f} = 2$, & $f = \frac{1}{2}u$. Si lens convexa fuerit isoscelia; erit $a = -b = 2f = u$: pro flint $a = \frac{2}{3}$, pro strass $a = \frac{1}{2}$. Si binæ superficies internæ debeant congruere; erit $b = a' = -1$. Hinc ob $\frac{u}{f} = 2$, erit $\frac{2}{u} = \frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + 1$, & $\frac{1}{a} = \frac{2}{u} - 1$.

Pro

Pro flint $\frac{1}{a} = 2 \times \frac{3}{2} - 1 = 2$, & $a = \frac{1}{2}$. Pro strass $\frac{1}{a} = 2 \times 2 - 1 = 3$, & $a = \frac{1}{3}$. Inde habentur relationes radiorum ad se invicem. Pro distantia focali lentis tam duplicis quam triplicis valor $\frac{1}{H}$ est idem. Nam ex num. 60 valor $\frac{1}{H}$ pro duabus lentibus est $= \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'} = \frac{2(m-1)}{u} - 2(m'-1)$: pro flint, & strass $m-1 = m'-1 = \frac{1}{2}$, adeoque $\frac{1}{H} = \frac{1}{u} - 1$, nimirum pro flint $\frac{1}{H} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$, & $H = 2$, pro strass $\frac{1}{H} = 2 - 1$, & $H = 1$.

83. Si adhibeantur lentes tres, quarum binæ extremæ similes, & æquales; valor intermediæ erit idem, ac prius, & binæ extremæ simul æquivalebunt uni: erit nimirum $F' = F$, & $\frac{m-1}{F} + \frac{m-1}{F'}$, qui valor (num. 78) est $= \frac{m-1}{f}$; erit $= \frac{2(m-1)}{F}$, adeoque $\frac{2}{F} = \frac{1}{f} = \frac{2}{u}$, sive $\frac{1}{F} = \frac{1}{u}$. Si eæ fuerint isosceliæ, & radius sphæricitatis primæ $= a$, erit $\frac{2}{a} = \frac{1}{F} = \frac{1}{u}$, adeoque $a = 2u$, nimirum in flint $= \frac{4}{3}$, in strass $= 1$. Si superficies internæ debeant congruere; erit adhuc $b = a' = -1$, adeoque $\frac{1}{u} = \frac{1}{F} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + 1$, & $\frac{1}{a} = \frac{1}{u} - 1$: nimirum in flint $\frac{1}{a} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$, & $a = 2$, in strass $\frac{1}{a} = 2 - 1 = 1$, & $a = 1$. En igitur denominationes & formulas.

84. DENOMINATIONES.

Ratio sinuum in substantia distrahente $\begin{cases} \text{minus} \ldots\ldots & m \\ \text{magis} \ldots\ldots & m' \end{cases}$

Ratio differentiarum eorum valorum . . $\frac{dm}{dm'} = \ldots\ldots u$

Ra-

Radii sphæricitatum lentis distrahentis $\begin{cases} \text{minus} \dots\dots a\,,\, b \\ \text{magis} \dots\dots a',\, b' \end{cases}$

Distantia focalis omnium simul . . . . H

ÆQUATIONES GENERALES PRO COMPOSITA CONVEXA.

Positio arbitraria . . . . $a' = -b' = -1$

Pro distantia focali . . . . $\frac{1}{H} = \frac{2(m-1)}{u} - 2(m'-1)$

Pro casu binarum. $\begin{cases} \text{si prima sit isoscelia} \dots\dots\dots a = -b = u \\ \text{si superficies internæ congruant } \frac{1}{a} = \frac{2}{u} - 1\,,\, b = -1 \end{cases}$

Pro casu trium. $\begin{cases} \text{si prima sit isoscelia} \dots\dots\dots a = -b = 2u \\ \text{si superficies internæ congruant } \frac{1}{a} = \frac{1}{u} - 1\,,\, b = -1 \end{cases}$

In hoc casu trium lentium tertia debet esse æqualis, & similis primæ.

85. Si pro vitro communi, & flint adhibeantur $m = 1\frac{1}{2}$, $m' = 1\frac{1}{2}$, $\frac{dm}{dm'} = u = \frac{2}{3}$; habebuntur hujusmodi determinationes. Lens e flint erit utrinque concava isoscelia, & radius ejus sphæricitatis debebit fieri dimidius distantiæ focalis totius lentis compositæ: lens e vitro communi erit utrinque convexa. Ea in casu lentis compositæ e binis erit sola, & si sit isoscelia, habebit radium sphæricitatis $\frac{2}{3}$ radii concavæ, $\frac{1}{3}$ distantiæ focalis: si habuerit superficiem internam congruentem; radius ipsius erit æqualis radio concavæ, dimidius distantiæ focalis, radius externæ dimidius radii internæ, quadrans distantiæ focalis. In casu lentis compositæ e tribus duæ erunt convexæ, & si sint isosceliæ, habebunt radium $\frac{4}{3}$ radii concavæ, $\frac{2}{3}$ distantiæ focalis: si superficies internæ congruant, eæ lentes habebunt radium superficiei internæ itidem æqualem radio concavæ, dimidium distantiæ focalis: radius autem externæ erit duplus radii internarum, æqualis distantiæ focali.

86. Quod si adhibeatur vitrum commune, & strass, ac sup-

ponatur esse $m = m' = \frac{3}{2}$, $\frac{dm}{dm'} = \frac{1}{2}$; fiet lens concava ex ipso strass cum radio sphæricitatis æquali distantiæ focali : tum una, vel duæ convexæ e vitro communi : si adhibeatur una isoscelia ; debebit habere radium sphæricitatis dimidium radii prioris : si debeant superficies internæ congruere ; fiet radius internæ æqualis radio prioris, radius externæ ejus triens. Si autem adhibeantur duæ isosceliæ e vitro communi ; debebit radius omnium sphæricitatum esse æqualis radio prioris, ubi habebitur isoscelismus cum congruentia.

87. Pro lente composita concava lens e substantia magis distrahente erit convexa, ex minus distrahente una utrinque concava, vel binæ utrinque concavæ : mensuræ autem radiorum erunt eædem, ac in lente composita convexa tam relatæ ad se invicem, quam relatæ ad distantiam focalem foci virtualis.

88. Combinatio, in qua superficies internæ congruant, erit magis idonea ad conservandam vim luminis : nam in transitu immediato e vitro in vitrum vel habetur unica refractio, & ea perquam exigua, vel nulla : at ubi inter binas lentes interponitur aer, habetur satis copiosa reflexio tam in egressu e priore vitro in aerem, quam in ingressu ex aere in vitrum posterius. Sed oportet, superficies sint accuratissime æquales, ut prorsus congruant : si enim remaneat inter ipsas intervallum tenuissimum ; tum oritur ibi aliud colorum genus ortum ex alio capite, nimirum ex iis, quas Newtonus appellat vices facilioris reflexionis, & facilioris transmissus, ex quibus pendent colores laminarum tenuium. Hinc quicumque non speret accurationem in æqualitate, & congruentia superficierum, debet præferre systemata, in quibus omnes lentes tam convexæ, quam concavæ sint isosceliæ.

89. Sic evolvimus, quæcumque pertinent ad remedium adhibendum per unicam ocularem compositam. Ea quidem tollet colores, qui induci solent ab ocularibus ; sed non erit idonea pro telescopiis astronomicis, in quibus quæritur satis magnum augmentum, saltem si cum vitro communi adhibeatur flint, vel etiam si adhibito strass, adhibeantur in compositione lentes tan-

tum-

tummodo duæ. Nam distantia focalis lentis compositæ evadit multo major, quam sit distantia focalis singularum componentium e vitro communi; adeoque ut distantia focalis lentis compositæ sit exigua, quod requiritur ad habendum augmentum satis magnum, radii sphæricitatum debent fieri nimis breves, quod impedit aperturam satis magnam, adeoque minuit campum.

90. Id remedium est magis idoneum pro telescopiis exiguis, quæ adhiberi solent cum constructione Galileana ocularis concavæ, cum in iis (num. 29) non debeat haberi augmentum nisi exiguum. Hinc potest adhiberi ocularis composita etiam ex duabus tantummodo lentibus. Fiet convexa ex flint cum radio sphæricitatis dimidio ejus distantiæ focalis, quam debet habere lens composita; ac illi addetur concava isoscelia, quæ habeat radium sphæricitatis $\frac{2}{3}$ radii convexæ, nimirum $\frac{1}{3}$ distantiæ focalis totius compositæ: vel fiet convexa e strass cum radio sphæricitatis æquali ejus distantiæ focali, quam debet habere lens composita; ac illi addetur concava isoscelia, quæ habeat radium sphæricitatis trientem radii convexæ, adeoque trientem etiam distantiæ focalis lentis compositæ.

91. Ego quidem, ut jam innui in capite II Opusculi I Tom. I curavi fieri telescopiola cum ejusmodi oculari concava acromatica, quod successum habuit egregium: caruerunt coloribus, & distinctionem habebant singularem. Satis commodus occurret inferius usus ocularis acromaticæ etiam in systemate trium ocularium; sed antequam agamus de eo systemate, agemus in paragrapho sequenti de systemate duarum tantummodo, & ostendemus methodum expeditam liberandi telescopia astronomica invertentia objectum a coloribus ocularium adhibitis binis ocularibus tantummodo, quarum utraque sit ex eodem etiam vitri genere, ut ex quovis vitro communi.

§. IV.

De remedio adhibendo coloribus ocularium per binas oculares simplices ex eodem etiam communi genere vitri (*).

92. SINT in fig. 7 puncta A, C, A, D, D', B, G, G', B, I, *i* eadem, ac in fig. 3 Tab. I, & lens HKH (fig. 7 Tab. II) occurrat axi in puncto K inter puncta I, G: excipietur filum rubeum in puncto L remotiore a centro suo K, violaceum in puncto *l* propiore: hinc angulus refringens binarum superficierum lentis, qui (num. 42) est eo major, quo magis receditur a centro ipsius, erit major in L, minor in *l*: poterit ita augeri refractio fili rubei, minui refractio violacei, ut, compensatâ minore refrangibilitate

(*) Quæcumque in superioribus proposita sunt pro combinatione plurium lentium simplicium, non respiciunt nisi distantias focales ipsarum ita, ut quæ demonstrata sunt de separatione colorum, quæ ab ipsis inducitur, locum habeant, quæcumque adhibeatur combinatio sphæricitatum binarum superficierum ex iis numero infinitis, quæ juxta num. 45 exhibent eandem distantiam focalem. Itidem, quæ in præcedenti paragrapho proposita sunt de remedio adhibendo coloribus ocularium per unicam lentem acromaticam conjunctam cum binis simplicibus, non respiciunt nisi solas distantias focales earundem simplicium. Eodem pacto quæcumque proponentur in hoc, & in sequenti paragrapho tam pro determinatione anguli, quo bini radii diversæ refrangibilitatis digressi ab eodem puncto objecti sito extra axem telescopii, & transeuntes per centrum objectivi inclinantur ad se invicem, quam pro correctione, qua fiat, ut egrediantur ab oculari postrema per rectas parallelas, locum habent itidem, quæcumque adhibeatur combinatio radiorum sphæricitatis pro singulis lentibus ad habendam eandem distantiam focalem, quæ sola occurret in formulis adhibendis: licebit considerare singulas etiam, ut isoscelias. Discrimen ortum ab ea diversa earum sphæricitatum combinatione nihil aut prodest, aut obest, ubi agitur, ut in hoc primo capite, de solis ocularium coloribus. Hinc habebimus hic pro æqualibus lentes, quæ habeant distantias focales easdem. Hisce distantiis focalibus determinatis relinquetur indeterminatio orta ex libertate adhibendi diversas earundem sphæricitatum combinationes, quæ exhibeant eandem distantiam focalem. De his agemus in capite II, ubi earum consideratio occurret pro corrigendis, vel minuendis incommodis ortis ab errore sphæricitatis.

litate illius per excessum anguli refringentis, prodeant per rectas LVM, *lm* parallelas inter se, quod fieri non posset, si punctum K jaceret ultra I, ut in fig. 3 Tab. I, ubi angulus refringens in L est minor, quam in *l*.

93. Is parallelismus obtineri potest infinitis modis, sed oportet ita res disponere, ut radii digressi ex eodem puncto objecti, qui in fig. 1 conveniunt in focis F', *f'*, prodeant paralleli, vel accurate, vel proxime pro diversa oculorum constitutione, & alia evitentur incommoda, ut illud, ne punctum dirigens ejusmodi radios incidentes in lentem quampiam sit ipsi nimis proximum, quod si accidat, minimi ipsius defectus, minima pulvisculi granula ipsi adhærentia cadunt sub aspectum; cum intercipiant omnes radios provenientes ab eodem objecti puncto (*): vitandum itidem, ne ad habendum augmentum satis magnum, aliquis sphæricitatis radius sit ita exiguus, ut impediat aperturam sufficientem pro campo satis magno.

94. En combinationem maxime expeditam, & quæ iis tribus faciat satis. Sit lens HH (fig. 7. Tab. II) ex eadem substantia, ac BB, & habeat distantiam focalem æqualem trienti distantiæ focalis ipsius BB, quæ (num. 30) est proxime æqualis GI, & colloce-

(*) Id quidem facile perspicitur considerando in fig. 1 partem superficiei *h'h'* occupatam a radiis digressis ab eodem puncto objecti positi in directione CD'. Si granum pulveris adhærens ipsi superficiei fuerit majus eo spatio; intercipiet omnes radios digressos ab eo puncto, quod idcirco non cadet sub sensum visus, sed ejus loco nigricans macula, etiam si id punctum pertineat ad objectum lucidissimum: sed si id granum sit minus eo spatio; intercipiet quidem partem eorum radiorum, sed pars alia incidens in superficiem ipsam hinc, & inde ab eo puncto transmissa ad oculum, & collecta demum in ejus fundo excitabit ejus visionem: & quidem si id granum fuerit multo minus eo spatio; pars residua multo major parte interceptâ id efficiet, ut defectus hujus non animadvertatur. Porro quo focus *f'* fuerit propior lenti, eo spatium *h'h'* erit minus, adeoque eo minora pulvisculi granula intercipient vel omnes ejusmodi radios, vel maximam illorum partem, adeoque sub sensum cadent. Id spatium erit semper multo minus, quam exprimatur hic a figura; quia apertura objectivi AA erit multo minor respectu distantiæ focalis C*f'*, quæ hic exhibetur major ad reddendam figuram magis sensibilem. Hinc sine præcautione hic proposita sensibilia fient granula admodum exigua.

locetur ita, ut GK sit dupla ejus distantiæ focalis, cui idcirco erit proxime æqualis KI. Filum rubeum G'L, & violaceum G'*l* prodibunt per rectas LM, *lm* proxime parallelas, quod sic demonstratur.

95. Cum GK sit dupla distantiæ focalis lentis HH pro radiis rubeis; fila rubea digressa ex G coirent (num. 56) post transitum per lentem HH in axe in distantia æquali ipsi GK, adeoque & fila rubea digressa ex G' coirent (num. 49) in puncto M rectæ G'K transeuntis per K centrum lentis ad distantiam proxime æqualem GK: & quidem ob G'K paullo majorem, quam GK esset KM paullo minor ipsâ G'K. Est autem etiam G'L paullo minor, quam G'K, & LM paullo major, quam KM. Quare G'L erit proxime æqualis LM, & G'*l*, *l*M proxime æquales. Quoniam autem ob viciniam punctorum L, K, anguli KLI, K*l*M non multum differunt ab angulo recto, si concipiantur ex *l* ducta perpendicula in LI, LM, ea parum different a recta L*l*, adeoque multo minus a se invicem; etiam anguli LG'*l*, LM*l* erunt proxime æquales inter se.

96. Filum autem violaceum G'*l* prodibit per rectam *lm* jacentem in angulo K*l*M, & angulus *ml*M erit differentia refractionum M*li*, *mli* pertinentium ad fila rubeum, & violaceum, quæ concipiantur simul advenientia per G'*l*, ut producta CG' in E, angulus LG'*l* est differentia refractionum LG'E, *l*G'E pertinentium ad fila rubeum, & violaceum simul advenientia per rectam CG', quæ differentiæ debent habere (num. 41) ad ipsas refractiones M*li*, LG'E eandem rationem valorum *dm* ad *m*—1 pertinentium ad eandem earum lentium substantiam.

97. Porro refractio LG'E est proxime æqualis refractioni M*li*. Nam angulus M*li* est proxime æqualis angulo MLI ob viciniam punctorum L, *l*, & I, *i*: etiam MLI est proxime æqualis angulo CIG'; quia si LM occurrat axi in V; fila rubea KI, LI, quæ convergebant ad focum I lentis HH, convergent ad distantiam KV dimidiam KI (num. 56). Quamobrem IV erit proxime = VK, adeoque proxime = VL ob viciniam punctorum L, K, & angulus VLI, sive MLI proxime = VIL, sive = CIG'. Demum

mum CIG' est proxime = IG'E ob alterum internum ICG' dimidium campi simplicis multo minorem ipso aucto in CIG' per telescopium. Quare primus ille *Mli* est proximus ipsi IG'E, adeoque binæ refractiones rubei in G', & in *l* proxime æquales, & idcirco etiam proxime æquales earum partes similes LG'*l*, M*lm*, quæ sunt differentiæ earum refractionum fili rubei, & violacei. Cum igitur LM*l* sit proxime æqualis LG'*l*; erunt proxime æquales LM*l*, M*lm*, & LM, *lm* proxime parallelæ.

98. Admovendo nonnihil lentem HH lenti BB, & eam removendo, facile invenietur situs parallelismi, vel ejus exiguæ inclinationis eorum filorum ad se invicem, quæ efficiat, ut ea fila uniantur in fundo oculi correctâ illâ separatione NG'*n*, quam induxerat lens prima. Ea admotio, & remotio facta ab artifice multo facilius corriget effectus quantitatum exiguarum, quæ in hac demonstratione neglectæ sunt una cum effectu neglectæ crassitudinis vitri, quam longissima investigatio eorundem effectuum facta per geometriam, vel calculum. Quæ diximus, abunde sunt ad evincendum, binas lentes ex eadem materia, quarum altera habeat distantiam focalem triplam alterius, debere saltem proxime corrigere separationem colorum inductam a prima lente, si collocetur minor post majorem in distantia proxime dupla distantiæ focalis ipsius. Videndum jam, ubi collocandum sit hoc binarum lentium systema respectu objectivi AA, & an in eo evitentur illa alia incommoda, quæ diximus evitari debere.

99. Ad habendam distinctionem debet lens HH reddere proxime parallelos inter se radios delatos ab eodem unico puncto objecti remoti sito in axe telescopii, quos objectivum solum colligeret in suo foco posito alicubi in eodem axe in F. Quare ea lens (num. 55) debet eos excipere digressos e suo foco citeriore O posito ad distantiam focalem KO = KI, remanente ita & GO = KO = $\frac{1}{3}$ GI. Hinc lens BB debet efficere, ut ii uniantur in O; cumque GO sit minor, quam ejus distantia focalis GI, debet (num. 55) ipsos excipere convergentes; adeoque ipsa lens BB debet collocari citra focum objectivi F. Distantia autem GF ipsius lentis ab eo foco sic facile invenietur.

100. In

100. In formula (num. 50) $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$, applicata ad hanc lentem erit GI $= h$, GO $= x = \frac{1}{3} h$, GF $= p$, qui valor quæritur. Erit $\frac{3}{h} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$, adeoque $\frac{2}{h} = \frac{1}{p}$, & $p = \frac{1}{2} h$. Quare systema earum binarum lentium debebit ita collocari, ut prima jaceat citra focum objectivi ad distantiam dimidiam suæ distantiæ focalis. Ea distantia est major, quam in simplici telescopio astronomico figuræ 1 Tab. I esset distantia FG a lente BB; si pro ipsa adhiberetur hæc HH. Nam in eo casu esset ipsa FG æqualis distantiæ focali ejus lentis, & hìc est æqualis $\frac{1}{2}$GI $= \frac{1}{2}$KI; quæ KI est distantia focalis hujusce lentis HH: adeoque focus F distat a lente BB multo plus, quam distaret in eo telescopio habente eam unicam ocularem, quod evitat nimiam viciniam, quam vidimus debere evitari. Distantia vero foci O a lente HH non potest esse minor eâ, quæ habetur hìc, quæ est ejus distantia focalis.

101. Augmentum poterit esse satis magnum cum campo satis magno; erit enim ipsum augmentum duplo majus, quam si adhiberetur unica lens BB, quia augmentum determinaretur ab angulo GIG', sive VIL, & determinatur ab angulo KVL, qui est duplus ipsius VIL, cum æquatur binis internis, & oppositis VIL, VLI proxime æqualibus, & quidem in accessu puncti L ad centrum campi K ii duo anguli accedunt ad æqualitatem in infinitum, & augmentum ad duplum augmenti habendi per solam lentem BB. Hinc ea lens poterit fieri duplo minus convexa, quam alia, quæ sola præstaret idem augmentum: sic & ejus apertura potest fieri duplo major, quæ duplicata duplicabit campum. Lens HH non cogit imminuere eam aperturam; quia semiaperturæ GG', KL necessariæ ad transmittendum eundem radium CG' determinantem punctum extremum campi sunt proportionales distantiis GI, KI focalibus earum lentium, quæ lentes idcirco possunt fieri prorsus similes ita, ut accipiant eosdem numeros graduum in suis arcubus.

102. Posset generaliter solvi problema, quærendo distantiam fo-

focalem secundæ lentis ex quacumque etiam diversa substantia, ac ejus distantiam a prima BB, quæ inducant parallelismum filorum LM, lm: id problema remanebit indeterminatum. Sint earum lentium distantiæ focales h, h', cum suis valoribus m, m', ac fiat GK $= z$, & datis m, m', h, quæratur h', considerando GI, ut æqualem h. In formula (num. 50) $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$ erit $h = h'$, KI $= p = h - z$, KV $= x$, adeoque $\frac{1}{x} = \frac{1}{h'} + \frac{1}{h-z} = \frac{h+h'-z}{h'(h-z)}$. Assumpto VK $= x$ pro VL, & angulo IG'E, qui dicatur a, pro VIL, erit VL $= x$: VI $= h - z - x$ :: VIL $= a$: VLI $= \frac{a(h-z)}{x} - a$, qui poterit haberi pro æquali refractioni Mli. Hinc (numer. 41) LG'$l = \frac{adm}{m-1}$, & M$lm = \frac{adm'(h-z)}{x(m'-1)} - \frac{adm'}{m'-1} = \frac{adm'(h-z)(h+h'-z)}{h'(h-z)(m'-1)} - \frac{adm'}{m'-1} = \frac{adm'(h+h'-z)}{h'(m'-1)} - \frac{adm'}{m'-1}$.

103. Cum G' sit punctum dirigens radios rubeos incidentes in lentem HH, & M refractos; si fiat KM $= u$, in formula $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$, erit $x =$ KM $= u$, $h = h'$, $p = -$ KG' $= -$ KG $= -z$, adeoque $\frac{1}{u} = \frac{1}{h'} - \frac{1}{z} = \frac{z-h'}{h'z}$. Porro assumptis KM, KG pro LM, LG', erit LM $= u$: LG' $= z$ :: LG'$l = \frac{adm}{m-1}$: LM$l = \frac{azdm}{u(m-1)} = \frac{azdm(z-h')}{h'z(m-1)} = \frac{azdm}{h'(m-1)} - \frac{adm}{m-1}$. Hic valor debet fieri $=$ M$lm = \frac{adm'(h+h'-z)}{h'(m'-1)} - \frac{adm'}{m'-1}$ ad habendum parallelismum rectarum LM, lm; adeoque, instituta divisione per a, obtinebitur sequens æquatio

$$\frac{zdm}{h'(m-1)} - \frac{dm}{m-1} = \frac{dm'}{h'(m'-1)} \times (h+h'-z) - \frac{dm'}{m'-1}.$$

104. In ea æquatione habentur binæ indeterminatæ, h' exhibens speciem lentis secundæ per suam distantiam focalem, & z exhibens ejus collocationem per distantiam a prima: solutiones haberi poterunt infinitæ numero, assumptâ ad arbitrium alterâ ex iis, vel quapiam relatione alterius ad alteram. Sed cavendum, ne facta ea determinatione abitraria, dum deinde determinatur positio primæ lentis respectu foci objectivi F necessaria ad hoc, ut secunda lens excipiat radios, qui pertinent ad idem punctum objecti, divergentes a foco ejus citeriore O, distantia ejusdem primæ lentis ab objectivo obveniat ita exigua, ut evadat erronea suppositio facta distantiæ KI proxime æquali distantiæ focali radiorum parallelorum, & anguli VIL proxime æqualis angulo IG'E, ac præterea augmentum fiat nimis exiguum.

105. Determinatio maxime omnium expedita est illa, qua superius usi sumus, in qua utraque lens est ex eadem substantia, existente $\frac{dm'}{m'-1} = \frac{dm}{m-1}$, & KI est distantia focalis lentis secundæ, quod reddit $h - z = h'$, adeoque $z = h - h'$: tum enim æquatio finalis numeri 103 evadet $z = h + h' - z$, sive $h - h' = 2h'$, & $h' = \frac{1}{3} h$: nimirum erit $KI = \frac{1}{3} GI$, & $GK = 2KI$, uti posuimus. Hæc analysis illam determinationem exhibuit, quam immediate proposuimus, & demonstravimus more synthetico.

106. Ut ea, quæ inventa sunt, unico intuitu videnda pateant, en remedium adhibendum telescopiis astronomicis ad tollendos colores inductos ab ocularibus. *Capiantur binæ lentes convexæ ex eodem vitro communi quocumque, quarum prima habeat distantiam focalem, & aperturam triplam secundæ: collocentur in distantia a se invicem dupla distantiæ focalis minoris: prima collocetur citra focum objectivi in distantia ab ipso æquali dimidiæ suæ distantiæ focalis. Augmentum erit duplum ejus, quod præstaret prima lens sola, & campus æqualis illi, quem haberet ipsa sola.*

107. Ad habendam correctionem accuratiorem potest secunda lens

lens aptari tubulo, qui possit moveri intra tubulum primæ, ut admovendo, & removendo nonnihil ipsam ab altera inveniatur locus correctionis maximæ. Distinctio pro diversa oculorum constitutione poterit obtineri tam protrudendo tubulum majoris intra tubum objectivi, ut totum systema mutet distantiam respectu ipsius objectivi, quam protrudendo solum tubulum secundæ intra tubulum primæ, quod non turbabit ad sensum extinctionem colorum.

108. Hic secundus motus erit magis opportunus; si adhiberi debeat micrometrum. Ipsum non potest apponi nisi in situ O, in quo solo formatur imago objecti, nimirum in distantia a prima lente æquali trienti suæ distantiæ focalis, quæ est tota distantia focalis secundæ lentis. Ad hoc ut partes ejus micrometri subtendant in cælo eundem numerum minutorum pro oculis omnibus, debet retineri constans distantia primæ lentis ocularis ab objectivo, relicto motu secundæ soli.

109. In eodem loco debet collocari diaphragma, quod campi marginem determinet. Ipsius aperturam determinabit recta OT perpendicularis axi occurrens radio G'I extremo aperturæ lentis ocularis primæ in T. Cum sit KO æqualis & ipsa distantiæ focali lentis secundæ $=$ KI, erit OI $= \frac{2}{3}$ GI, adeoque & OT $= \frac{2}{3}$ GG'. Hinc apertura diaphragmatis erit $\frac{2}{3}$ aperturæ ocularis primæ. Debet fieri potius tantillo angustior, quam amplior: si fiat amplior; evadit prorsus inutilis.

110. In eo telescopio objectum apparebit inversum: posset fieri etiam telescopium, quod per duas oculares tantummodo exhiberet objectum directum, sed in eo separatio colorum, de qua hic agimus, evitari non posset, nisi factâ acromaticâ utrâque oculari, præter quam quod id telescopii genus habet plura alia incommoda adnexa, quorum causâ id quidem non est in usu.

111. Ad eam rem secunda ocularis HH (fig. 8) collocanda esset post I ad distantiam IK majorem ejus distantiâ focali OK: tum radius rubeus IL convergeret (num. 55) ad distantiam quandam KV, & objectum situm ad sinistram in directione CD' appareret itidem ad sinistram in directione VLT. Si lentes non sint acromaticæ; prima refringet magis filum violaceum, ut prius,

H 2 per

per rectam G*il*, quod debebit ob actionem secundæ convergere ad distantiam K*u* minorem KV, cum discedat (num. 55) a distantia K*i* majore, quam KI, & sit magis refrangibile. Hinc fila LV, *lu* se intersecarent in quodam puncto R, ac haberetur major separatio colorum per angulum TR*t*: nam is evaderet adhuc major angulo LG'*l*, cum distantia LR debeat evadere minor, quam sit LV, quæ in combinatione numeri sequentis evadit æqualis LI, adeoque minor quam LG'.

112. Si KI esset dupla distantiæ focalis KO; distantia KV evaderet (num. 56) æqualis ipsi KI, adeoque angulus LVK esset æqualis angulo LIK, sive GIG', qui determinat augmentum factum a prima lente. Quamobrem secunda restituens directionem objecti non minueret augmentum factum a prima. Longitudo systematis GV a prima lente usque ad oculum collocandum in V esset æqualis longitudini GR figuræ 3 Tab. I systematis lentium trium; si lens secunda esset æqualis primæ: quia ibi GK continet binas distantias focales lentium æqualium, KP alias binas, & PR quintam: hic in fig. 8 (Tab. II) GI haberet unam, IK duas, KV alias duas. Sed FG distantia primæ lentis a foco objectivi esset major; quia radii digressi ab unico puncto objecti sito in axe, & coeuntes in F non deberent prodire a prima lente paralleli, ut in fig. 3 Tab. I, sed convergentes ad distantiam GO (fig. 8 Tab. II) duplam ejus distantiæ focalis: debent enim semper coire in foco citeriore lentis ultimæ ad hoc, ut prodeant ex ipsa paralleli. Hinc (num. 56) deberent discedere a distantia GF itidem dupla distantiæ focalis, quod augeret nonnihil longitudinem telescopii.

113. Id incommodum esset perquam exiguum, adeoque nullius momenti; sed aliud multo majus occurrit in diminutione campi. Si enim semidiameter aperturæ KL sit quanta maxima conciliari potest cum ejus lentis curvatura; GG' esset ejus dimidia ob GI dimidiam IK: adeoque si & lenti BB relinquatur apertura æqualis aperturæ KL; dimidium ipsius evaderet inutile, & campum determinaret sola GG' dimidia KL. Si lens HH admoveretur magis lenti BB; ratio semiaperturæ utilis GG' ad KL cresceret, adeoque manente KL cresceret ipsa GG' cum campo: sed pun-

ctum

ctum V recederet a K, imminuto KVL, adeoque imminuta quantitate augmenti. Si autem HH removeretur a BB; cresceret augmentum, imminutâ KV; sed adhuc magis minueretur ratio GG' ad KL, adeoque campus evaderet adhuc minor: nec quidquam prodesset distantia focalis secundæ lentis imminuta, vel aucta, ut facile ostendi potest. Verum quæ huc usque diximus, abunde sunt ad reddendam rationem, cur independenter etiam a coloribus, de quibus hîc agimus, rejecta fuerit ejusmodi combinatio jam ab ipso initio a constructoribus telescopiorum; licet ea sit simplicior, quam combinatio lentium trium, quæ semper fuit in usu. Colores autem, qui in ea evitari non possunt, nisi adhibendo utramque lentem acromaticam, multo magis nos cogunt, ut eam hîc rejiciamus.

§. V.

De remedio colorum inductorum ab ocularibus per lentes tres, quarum una acromatica.

114. Quo magis crescit numerus lentium, eo major evadit indeterminatio problematis: quamobrem hîc amplitudinem ipsius contraham determinatione arbitraria, quæ magis accedat ad veterem usum communium telescopiorum non invertentium objecta, & tamen destruat colores inductos ab ocularibus. Nimirum assumam positionem priorum duarum lentium ejusmodi, ut (fig. 3 Tab. I) focus I primæ lentis pro radiis rubeis divergentibus a puncto C, sit etiam focus secundæ pro radiis iisdem parallelis, ut idcirco filum G'IL debeat prodire e secunda per rectam LV parallelam axi: & in hoc quidem paragrapho agam solum de systemate trium lentium ocularium, quarum binæ sint simplices ex eodem vitri genere, & tertia sola composita acromatica; sed proponam plura magis generalia, quorum usus occurret etiam in sequentibus paragraphis.

115. Primo quidem determinabo punctum O', in quo filum violaceum G'*il* detortum per *lq* occurrit rubeo G'LQ. Concipiatur

CG'

CG' producta in E, & G'L, G'l in Z, z; sit vero HH ex eadem substantia, ac BB. Seclusâ mente tertiâ lente MM, ducatur recta G'K, producaturque, donec occurrat rectæ LV in Q, & concipiatur lQ. Si ex G' discederent radii rubei per G'K, G'L, G'l; deberent coire (num. 49) in eodem puncto rectæ G'K transeuntis per centrum K lentis HH: adeoque cum G'K, LV coeant in Q, ad id punctum abiret & G'l per rectam lQ: ac proinde Qlq erit differentia refractionum fili rubei, & violacei advenientium per eandem rectam G'il. Refractio rubei est angulus zlQ proxime æqualis ZLQ, sive LIK, cui est proxime æqualis refractio IG'E rubei in G' (num. 97), ubi differentia refractionis rubei, & violacei est angulus LG'l. Quare eæ differentiæ ob æqualem vim distractivam earum lentium ex eadem materia erunt (num. 41) æquales. Porro ob inclinationem G'L ad axem non nimis magnam possunt considerari anguli LG'l, LQl ut reciproce proportionales longitudinibus LG', LQ, & potest accipi GK pro G'L, & LO' pro lO'. Quare erit LQ ad GK, sive KQ ad G'K, ut Qlq, sive QlO' ad LQl, sive O'Ql, nimirum ut QO' ad O'l, sive O'L, & componendo G'Q ad G'K, sive QL ad KI, ut QO' + O'L, sive eadem QL ad LO'. Hinc KI, sive KO = LO'.

116. Inde habetur hujusmodi elegans theorema. *Si primæ duæ lentes sint ex eodem vitri genere, & earum foci congruant, utcumque sint æquales, vel inæquales earumdem distantiæ focales; fila, rubeum, & violaceum radii advenientis ad centrum objectivi a puncto objectivi sito extra axem, separata a prima lente conjungentur a secunda in distantia æquali suæ distantiæ focali.* Hoc affirmavi num. 31 promittens ejus demonstrationem. Id alia methodo inveni ante aliquot annos, & exhibui in Opusculo edito Mediolani sermone italico pertinente ad theoriam telescopiorum dioptricorum.

117. Hic statim patet, remedium iis coloribus adhiberi; si sola etiam tertia lens MM fiat acromatica, & collocetur ita, ut ejus focus citerior congruat in O cum foco ulteriore secundæ, sive ipsa habeat eandem distantiam focalem, ac præcedentes, sive omnes

omnes omnium trium distantiæ focales sint diversæ. Demonstratio parum differt ab adhibita num. 65. Fila omnia coloris utriusque delata ad ejusmodi lentem directione RPO deberent uniri in ejus foco O, & omnia delata directione PO' in foco O'. Quare omnia digressa ex O' deberent ab ipsa ita refringi, ut prodirent eâdem directione parallelâ O'P: adeoque fila, O'Q rubeum, & O'q violaceum, debebunt prodire inter se parallela. Cum PO' sit aliquanto longior in fine campi, quam PO; deberet lens tertia protrudi aliquanto plus versus secundam: verum etiam alii neglectus adhibiti in demonstrationibus inducunt discrimina, ob quæ omnia deberet protrudi nonnihil antrorsum, retrorsum ipsa lens tertia, donec appareat colorum disparitio, ut etiam num. 98 monuimus.

118. In hac combinatione ad habendam distinctionem debet prorsus, ut in communi, punctum F esse focus communis ulterior objectivi AA, & citerior ocularis BB pro radiis rubeis parallelis, vel potius juxta num. 32 pro mediis: tum I focus communis ulterior lentis BB pro radiis divergentibus a C, citerior lentis HH pro parallelis: demum O focus pariter ulterior, & citerior lentium HH, MM utriusque pro parallelis. Sic radii delati ab eodem puncto objecti sito in axe, & admodum remoto habiti pro parallelis convenient in F: inde digressi prodibunt a lente BB paralleli: colligentur a lente HH in O: prodibunt e lente MM paralleli.

119. Distantia primæ lentis ab objectivo erit summa distantiarum focalium utriusque: distantia primæ ocularis a secunda erit paullo major, quam summa distantiarum focalium earumdem lentium: nam GI est paulo major, quam distantia focalis GF lentis BB. Est nimirum FG ad GI in ratione CF ad CG per numerum 57, cum hìc punctum F sit idem focus citerior lentis BB, qui in fig. 6 Tab. II, ad quam refertur is numerus, notatur litterâ P: ea autem ratio debet accedere ad æqualitatem, cum ad habendum augmentum satis magnum distantia focalis lentis ocularis BB debeat esse multo minor, quam objectivi AA, ut est satis notum, & patebit paulo inferius. Demum distantia lentium HH, MM debebit esse summa distantiarum focalium earum lentium.

120. Ad

120. Ad habendam distinctionem pro diversa oculorum constitutione hic etiam prorsus, ut in telescopiis communibus, satis erit admovere objectivo pro myope, removere pro presbyta, vel totum systema trium ocularium, vel solam postremam ocularem MM. Prior motus non turbabit ad sensum theoriam colorum, cum debeat esse perquam exiguus, adeoque nihil ad sensum mutet angulum IG'E, differentiam refractionum LG'l, & distantiam LO' unionis filorum G'L, G'l. Motus posterior reddit divergentia, parallela, vel convergentia fila QR, qr. Quamobrem per hunc posteriorem determinari debet extinctio colorum: tum inventâ per ejus motum eâ extinctione, vel, si quid semper supersit, quod sensu percipi possit, minimâ colorum quantitate in fine campi, & ocularibus in ea distantia connexis inter se, protrudendus deinde erit tubulus continens id omne systema ad obtinendam distinctionem de more.

121. Imago objecti formabitur itidem, ut in telescopiis communibus, in FF', & in OO'. In utrovis loco potest apponi diaphragma; sed locus aptior erit FF', ubi habetur imago, quæ locum non mutat mutata positione totius systematis trium lentium, dum distantia imaginis OO' a lente HH mutatur nonnihil eo motu. Margo diaphragmatis positi in FF' debet evadere satis distinctus: esset distinctissimus; si ibi unirentur in singulis punctis foci radii omnes pertinentes ad singula puncta objecti: erit eo major ea distinctio marginis, quo fuerit major ea unio, cui cum faveat plurimum acromatismus objectivi, idem favebit plurimum ei ipsi distinctioni.

122. Diameter diaphragmatis debebit esse paullo minor, quam apertura lentis ocularis BB. Si sit major, evadit inutilis, quia tum radii, qui transeunt prope marginem diaphragmatis ipsius, cadunt extra aperturam lentis ocularis. Ad hoc, ut omnes radii transmissi perveniant ad ocularem, & per eam ad oculum, debet in primis esse GG' ad FF', ut est CG ad CF: præterea debet haberi amplitudo adhuc paullo major, ut excipiat in fig. 1 radios advenientes ad spatium G'H'h' situm a G' ad partes oppositas centro G. Verum ne apertura diaphragmatis evadat ex parte

te inutilis, debet apertura lentis secundæ (fig. 3) HH esse ad aperturam lentis BB, saltem ut est distantia focalis KI lentis secundæ ad GI paullo majorem distantiâ focali primæ, in qua ratione est KL ad GG'. Apertura autem tertiæ debebit esse æqualis aperturæ secundæ ob PQ = KL.

123. Oculus debebit collocari in R ad distantiam PR æqualem distantiæ focali lentis tertiæ MM. Ibi excipiet radios omnium punctorum objecti existentium in angulo DCD' jacente circumquaque circa axem directione RST. Augmentum imaginis erit determinatum a ratione anguli PRQ ad angulum GCG', & diameter campi a duplo angulo GCG'. Utriusque mensuræ facile determinantur datis distantiis focalibus lentium, & earum aperturis.

124. Tangentes angulorum GIG', GCG' sunt $\frac{GG'}{GI}$, $\frac{GG'}{GC}$, quæ sunt ut GC ad GI, sive permutando in numero 119, ut CF ad FG, quibus sunt proxime proportionales ii ipsi anguli; nam primus est semper exiguus, secundus non nimis magnus, ac ea ratio angulorum accedit ad veram in infinitum, si punctum G' accedat in infinitum ad G. Quare habebitur hujusmodi theorema: *augmentum in telescopio habente unicam ocularem habetur dividendo distantiam focalem objectivi per distantiam focalem ocularis*. Et quidem id theorema habet locum in telescopio tam figuræ 1, quam 2, ac ex eodem constat id, quod affirmavimus num. 119, distantiam focalem ocularis debere esse multo minorem distantiâ focali objectivi ad habendum augmentum satis magnum.

125. Angulus LIK æquatur angulo GIG', & si lentium omnium distantiæ focales sint æquales, angulus PRQ æquabitur angulo KIL ob latera circa angulos rectos æqualia. Quare in casu distantiarum focalium æqualium augmentum post ejusmodi tres lentes remanet idem, ac post primam solam. Sed si distantiæ focales sint inæquales; $\frac{KL}{KI}$, $\frac{PQ}{PR}$ erunt tangentes angulorum KIL, PRQ, adeoque eæ tangentes accurate, & ipsi anguli proxime ut PR, KI. Si hæc ratio componatur cum ratione FC ad FG, quæ est ratio anguli GCG' ad GIG', sive KIL; erit tangens anguli

PRQ ad tangentem GCG' accurate, & angulus ad angulum proxime, ut est FC×KI ad FG×PR. Patet autem, hanc demonstrationem habere locum, quotiescumque foci lentium primæ, & secundæ congruant in I, quæcumque fuerit distantia tertiæ a secunda, cum pendeat ab æqualitate rectarum KL, PQ, & hæc a parallelismo rectarum KP, LQ. Inde hujusmodi theorema: *augmentum per tres lentes oculares, quarum priores duæ habeant focos congruentes inter se, & prima focum suum congruentem cum foco objectivi, habetur dividendo productum ex distantiis focalibus objectivi, & lentis ocularis intermediæ per factum ex distantiis focalibus ocularium extremarum.*

126. Inde autem constat, 1°. mutatis in eadem ratione distantiis focalibus binarum tantum ocularium, intermediæ, & alterius ex extremis, augmentum remanere idem: 2°. posse haberi augmentum majus duplici modo, nimirum minuendo distantiam focalem utriuslibet ex ocularibus extremis, vel augendo distantiam focalem ocularis intermediæ. Secundus augendi modus reddit aliquanto longius systema ocularium; adhuc tamen est omnino præferendus primo potissimum hic, ubi tertia ocularis debet esse composita; quia difficilior est constructio accurata lentium brevioris foci etiam in lentibus simplicibus, sed multo magis hic, ubi tertia debet esse composita ex convexa, & concava, quæ posterior cum producat focum (num. *89*), cogit inducere curvaturas multo majores tam convexæ, quam concavæ; nisi adhibeatur vitrum strass satis distrahens cum vitro communi, & fiant binæ lentes convexæ, quo casu (num. *86*) lens composita habet omnes sphæricitates æquales, & ex formulis expositis num. 84 facile eruitur, distantiam focalem lentis compositæ in eo casu fore æqualem illi, quam haberet una sola e binis convexis.

127. Videndum interea, quid accidat campo, cujus habenda est ratio. Campum determinat angulus GCG', cujus anguli is est duplus: is facile invenitur, datis CG, GG'. Hæc secunda est tangens ejus anguli ad radium = CG, quæ potest considerari, ut æqualis arcui ejus dimidii, & ejus duplum, sive tota apertura, ut æqualis arcui totius campi. Arcus æqualis radio continet 57°.

17'

17'. 45", sive proxime 57°. 18' = 3438'. Quare erit ut CG distantia objectivi a prima lente ad 2GG' aperturam primæ ocularis, ita 3438 ad numerum minutorum campi, & habebitur hujusmodi regula : *numerus 3438 multiplicetur per aperturam primæ lentis, & dividatur per distantiam ipsius ab objectivo, ac habebitur campus telescopii in minutis*.

128. Hæc apertura primæ lentis debet esse illa, quæ relinquitur a diaphragmate, cujus diameter determinabitur determinatâ eâ aperturâ, quæ potest tribui oculari ipsi : non potest hæc apertura fieri major, quam sit dimidia distantia focalis, ne curvatura nimia augendo errorem figuræ sphæricæ deformet objectum, & quo est minor respectu ejus distantiæ, eo melius res procedet ; sed campus, eâ imminutâ, minuitur. Eadem apertura debet relinqui utilis tota a reliquis binis lentibus, quarum aperturæ si sint minores debitâ, reddent inutilem partem ipsius. Facile est autem determinare mensuras harum aperturarum necessarias ad relinquendam utilem totam aperturam illius primæ determinantis campum. In hoc systemate, in quo foci primæ, & secundæ ocularis conveniunt, semiaperturæ utiles lentis secundæ KL, & tertiæ PQ erunt inter se æquales, si negligatur exiguus excessus secundæ L*l*. Ipsa secunda KL est æqualis primæ GG', si sint æquales rectæ GI, IK, quarum secunda est accurate æqualis distantiæ focali lentis secundæ, prima proxime æqualis distantiæ focali lentis primæ : & si hæ distantiæ focales sint inæquales ; debebit esse KL ad GG' in ratione ipsarum KI, GI.

129. Hinc ubi adhibendæ sint lentes, quæ habeant distantias focales inæquales ; pro determinanda serie aperturarum utilium, & per ipsas campo telescopii, potest incipi a tertia lente determinando aperturam, quæ ipsi tribui possit, respondentem ejus distantiæ focali. Apertura secundæ assumetur æqualis ipsi, tum apertura primæ fiet ad aperturam hujus in ratione, quam habent earum distantiæ focales : hæc postrema apertura lentis primæ multiplicabitur per 3438, & dividetur per distantiam primæ lentis ab objectivo, ad habendum numerum minutorum campi : per aperturam inventam pro prima determinabitur apertura diaphragmatis.

necessaria ad habendam utilem hanc aperturam lentis primæ : ad eam obtinendam multiplicabitur ipsa apertura primæ lentis per distantiam focalem objectivi, & dividetur productum per summam distantiarum focalium ipsius, & lentis ejusdem.

130. Si eo pacto obvenerit apertura lentis primæ nimia respectu ejus distantiæ focalis; tum ea minuenda erit ita, ut non excedat dimidium ipsius distantiæ, & reliquæ aperturæ utiles lentium, ac diaphragmatis minuentur in eadem ratione : apertura lentis secundæ in hoc systematum genere nunquam evadet major justo; quia ipsius distantia focalis nunquam debet fieri minor, quam distantia focalis lentis tertiæ, quod sine ullo fructu minueret augmentum. Determinatâ aperturâ alterius ex extremis ita, ut non sit major justo, reliquarum aperturæ possunt relinqui utcumque majores iis, quas regula exposita præbuerit, quod nihil nocebit campo : tantummodo pars aliqua aperturarum relictarum remanebit eo casu inutilis : sed non possunt adhiberi minores. Proderit etiam præbere primæ aperturam paullo majorem propositâ, quo tutius liberetur tota apertura diaphragmatis, quæ si esset vel tantillo major justâ; id ipsum evaderet inutile.

131. Aperturæ nimis magnæ respectu distantiæ focalis nocent ex pluribus capitibus : inducunt confusionem in fine campi, & colores, ac deformant objectum curvando rectas lineas. Vitium colorum minuitur plurimum a remediis, de quibus agimus in hoc Opusculo : residuum illorum, & reliqua duo vitia oriuntur ab errore figuræ sphæricæ, quæ omnia minui possunt per commodiorem distributionem sphæricitatum in singulis lentibus, quam investigabimus in capite II : hìc illud addemus tantummodo : si quid eorum accidat post determinationes hìc propositas; satis erit minuere aperturam diaphragmatis, quâ imminutâ, minuentur in eadem ratione reliquæ aperturæ utiles, & campus : artifex per successivam diaphragmatum minorum applicationem inveniet, quid maxime conveniat : sic etiam si distinctio in medio campo non fuerit satis bona ob nimium augmentum; poterit successive augere distantiam focalem primæ lentis, vel minuere secundæ : quo perfectior fuerit materia, & opus objectivi, eo majoris augmenti te-

ti telescopium erit capax : ea omnia melius determinabit experientia , & attentatio , quam theoria , quæ evadit nimis complicata .

132. Si tres lentes sint simplices , & æquales ; ipsarum aperturæ fieri possunt omnes æquales : sed si lens tertia habeat distantiam focalem breviorem ; ejus apertura minor relinquet aperturas utiles reliquarum duarum minores , quam earum curvaturæ ferre possint : si lens prima fiat brevioris distantiæ focalis ; tum ejus apertura imminui potest in eadem ratione ejus distantiæ imminutæ , relictâ integrâ aperturâ reliquarum duarum ; quia singularum aperturæ ad suas distantias focales habebunt adhuc rationem eandem . Si fiat lens secunda distantiæ focalis majoris ; tum & ejus apertura utilis , & apertura utilis primæ evadent minores , quam ferre possint ipsarum curvaturæ . Assumptâ curvaturâ lentis tertiæ , quantam permittet ipsius distantia focalis , debebit assumi apertura secundæ æqualis ipsi , tum apertura primæ minor ipsâ in ratione distantiæ focalis ipsius ad distantiam focalem ejusdem secundæ .

133. Inde patet , manente apertura lentis tertiæ , si lens secunda fiat distantiæ focalis longioris , in eadem ratione imminui campum , in qua crescit augmentum apparens objecti , nimirum in ratione distantiæ focalis ipsius mutatæ : nam in ea ratione crescit productum ex distantia focali ipsius , & objectivi , a quo pendet augmentum , & decrescit apertura utilis lentis primæ , a qua pendet campus .

134. Si tertia lens debeat esse acromatica ; tum ejus apertura non poterit habere rationem eandem ad suam distantiam focalem , nisi ipsa fiat ex binis lentibus communibus , & strass : quia omnes curvaturæ lentium ipsam componentium erunt majores , quam pro distantia focali totius lentis compositæ ; adeoque patietur ipsa lens aperturam minorem , quam pati posset lens simplex ejusdem distantiæ focalis , quod reddet minores aperturas utiles reliquarum , & proinde campum minorem . Jam hinc redditur minus commodus ejus usus : sed præterea si quærendum esset augmentum majus per imminutionem distantiæ focalis lentis tertiæ ;

res

res evaderet maxime incommoda ex alio etiam capite : nimirum radii sphæricitatum deberent fieri nimis exigui , si non adhibeatur strass cum duplici lente e vitro communi : ea nimia curvatura redderet difficiliorem accuratam constructionem ejusmodi lentium. Hinc in primis telescopiis , quæ curavi perficienda cum ejusmodi lentium systemate , quæsivi augmentum majus per imminutionem distantiæ focalis lentis primæ : curavi tertiam acromaticam longioris distantiæ focalis , secundam distantiæ focalis ejusdem cum ipsa , primam brevioris ; ut prima ipsa determinaret augmentum , quod reliquæ duæ habentes eandem distantiam focalem utcumque majorem relinquunt integrum : id eo casu habetur , ut in telescopio figuræ primæ habente unicam lentem convexam , dividendo distantiam focalem objectivi per distantiam focalem ipsius ocularis primæ . Illæ distantiæ focales longiores reliquarum duarum nihil prosunt campo : permittunt quidem aperturam majorem lentis tertiæ augendam cum ejus distantia focali aucta , & majorem itidem aperturam secundæ : sed iis auctis apertura utilis primæ remanet eadem , quæ esset , si distantiæ focales , & aperturæ earum duarum essent minores in ratione quavis : nam apertura secundæ ad aperturam utilem primæ debet esse , uti sunt earum distantiæ focales , adeoque , auctâ distantiâ focali , & aperturâ secundæ in ratione eadem quacumque , & manente distantia focali primæ , remanet eadem etiam ipsius apertura . Adhuc tamen longiores distantiæ focales lentis secundæ , & tertiæ prosunt faciliori constructioni tertiæ compositæ , cum requirant curvaturas ipsius non ita magnas , productis earum radiis.

135. Lens acromatica habens distantiam focalem unius pollicis non nimis incommode componi potest per binas lentes convexas e vitro communi , & tertiam concavam etiam e flint. Radii sphæricitatum lentis concavæ evadunt proxime linearum 6 (num. 85), radii sphæricitatum utriusque convexæ isosceliæ linearum 8 : commodius tamen fieret e vitro communi combinato cum strass , quo casu omnes sphæricitates lentis compositæ haberent radium unius pollicis . Si reliquæ duæ lentes simplices habeant distantias focales itidem unius pollicis , & id systema adhibeatur cum obje-

ctivo

ctivo acromatico pedum trium, obtinetur augmentum 36; nam id augmentum (num. 125) est $= \frac{CF \times KI}{FG \times PR} = \frac{36 \times 1}{1 \times 1}$. Id quidem est nimis exiguum; nam objectiva acromatica trium pedum, si sint satis bona, possunt habere aperturam pollicum trium, quæ debet exhibere augmentum multo majus. Id potest duplicari tam facta primâ lente cum distantia focali linearum 6, quam facta secunda pollicum 2, & triplicari tam facta prima linearum 4, quam facta secunda pollicum 3.

136. Campus in utraque methodo minuitur in eadem ratione, in qua augmentum crescit. Si lenti acromaticæ detur apertura linearum 6, & omnes distantiæ focales sint æquales; prima lens habebit itidem lineas 6 aperturæ utilis: distantia lentis ocularis ab objectivo erit linearum $3 \times 144 + 12 = 444$. Quare campus evadet $\frac{6 \times 3438}{444} = 46$. Si prima lens habeat distantiam focalem 6; retentis reliquarum distantiis focalibus pollicis unius, & aperturis linearum 6, ejus apertura utilis erit 3, quæ itidem conveniet ipsius curvaturæ duplo majori. Erit $GF = 6$, adeoque $CG = 438$, & campus $= \frac{3 \times 3438}{438} = 23$. Si retineretur distantia focalis primæ pollicis unius, & fieret ea distantia secundæ pollicum duorum, retentâ eâdem lente tertiâ; apertura hujus tertiæ retinenda esset linearum 6, adeoque & secunda haberet 6: prima habens pollicem pro distantia focali posset quidem habere aperturam linearum 6, si esset sola: sed cum ejus distantia focalis sit dimidia distantiæ focalis lentis secundæ, non essent utiles nisi 3 lineæ: nam existente KI dupla GI, & existente KL tantummodo linearum 6, ut PQ, debent hæ esse duplæ GG', & ipsa GG' tantummodo linearum 3. Esset FG linearum 12, $CG = 444$, & campus $\frac{3 \times 3438}{444} = 23$, ut prius. Divisor 444 non est idem, ac prior 438, quod oritur a differentia distantiæ FG, quæ cum sit exigua respectu totius CG, non mutat valorem quoti nisi per fractionem unius minuti, quæ hic negligitur.

In

In utraque autem mutatione augmentum evadit 72 : nam in valore $\frac{CF \times KI}{FG \times PR}$ prima mutatio reddit FG duplo minorem, secunda duplo majorem KI.

137. Patet in hoc exemplo, utroque modo duplicari augmentum, & campum evadere duplo minorem. Verum secunda mutatio habet nonnihil incommodi ex eo, quod producat telescopium per tres pollices. Factâ enim primâ lente cum distantiâ focali linearum 6, & retentis reliquis unius pollicis, evadit FI pollicis unius, tum usque ad R habentur alii 4, adeoque FR = 5: sed retentâ primâ unius pollicis, & factâ secundâ duorum, evadit FI = 2, IO = 4, OR = 2, adeoque FR = 8. Tres pollices adjecti sunt fere $\frac{1}{11}$ totius. Campus cum exiguo illo augmento 36 erat satis magnus, nimirum minutorum 48 continens totam diametrum lunæ cum ejus dimidio: is quidem utcumque haberi posset; si omnes lentes essent simplices: sed cum tertiâ acromaticâ per concavam ex flint non posset haberi tantus, quia apertura linearum 6 esset æqualis integro radio sphæricitatis concavæ, quæ est nimis magna: multo majus incommodum inde haberetur pro augmento 72, in quo campus 24 adhuc imminutus evadit nimis exiguus.

138. Hoc incommodum campi nimis imminuti evitari non potest; si colores impediri debeant adhibitâ tertiâ lente acromaticâ cum lente cava ex flint: evitaretur eâ adhibitâ ex strass, quo casu campus, & augmentum essent prorsus eadem, ac in veteri methodo trium lentium e vitro communi simplicium. Verum aliud incommodum occurrit ex imminuta vi luminis; cum lens composita acromatica multo plus luminis intercipiat, quam simplex, potissimum si constet e tribus lentibus, præterquam quod ipsa trium lentium constructio auget laborem artificis. Eam ob causam quæsivi, an posset impediri effectus divisionis colorum factæ ab ocularibus per lentes tres simplices, nec successu res caruit, ut patebit in paragrapho sequenti.

§. VI.

§. VI.

De remedio colorum inductorum ab ocularibus per lentes tres simplices.

139. PRIMO quidem determinabimus angulum TSt, quo color violaceus distrahitur a rubeo in egressu e systemate communi trium lentium simplicium, quod promisimus num. 31, tum proponemus ejus vitii remedia. Manentibus cæteris in fig. 3 ipsa etiam lens tertia in systemate communi est simplex, ex eodem vitri genere cum duabus reliquis, & transit per Q occursum rectæ LV cum G'K productâ: sunt autem distantiæ focales omnium trium lentium æquales cum centris coincidentibus, adeoque GK proxime æqualis LQ, & (num. 115) angulus Qlq proxime $= LG'l$: tum $QO' = O'L$, proxime $= O'l$, adeoque angulus $QO'q$ proxime duplus anguli Qlq, sive $LG'l$. Concipiantur radii rubei digressi per rectas O'Q, O'q e puncto O' foco lentis MM pro radiis advenientibus directione PO', ii debebunt prodire per rectas QR, qr' parallelas rectæ O'P. Quare angulus $r'qr$ est differentia refractionis radiorum rubei, & violacei advenientium per eandem rectam O'q, qui ob qr', SR parallelas debet esse $= TSt$. Ut is comparetur cum angulo $LG'l$, ponatur u in occursu rectarum O'q, QR.

140. Ipse $r'qr$ debet æquari (num. 41) refractioni rubei uqr' multiplicatæ per $\frac{dm}{m-1}$; cumque $LG'l$ æquetur angulo $IG'E$ itidem multiplicato per $\frac{dm}{m-1}$; differentia angulorum TSt, $LG'l$ erit differentia ipsorum uqr', $IG'E$ multiplicata per $\frac{dm}{m-1}$. Est $IG'E = GIG' + GCG'$, & $GIG' = LIK = QRP = VQu = QuO' + QO'u = uqr' + QO'q$. Quare angulus uqr' deficit ab $IG'E$ per $GCG' + QO'u$, & hæc summa ducta in $\frac{dm}{m-1}$ exhibebit differentiam ipsorum TSt, $LG'l$. Horum angulorum hic habetur ratio; cum quæratur differentia distractionum in G', & S, quæ est ordinis inferioris; dum in aliis perquisitionibus assumitur an-

gulus IG'E pro æquali angulo GIG', & uqr pro æquali angulo VQR, qui æquatur hic ipsi GIG'. Ea proxima æqualitas indicat proximam æqualitatem ipsarum distractionum, quarum discrimen ipsum hic quærimus.

141. Sit angulus GCG' $= c$, & augmentum factum a prima lente n, ac erit (num. 41) angulus LG'l $= \frac{dm}{m-1}(nc+c)$: positis, ut num. 63, $c = 30'$, $n = 20$, $\frac{dm}{m-1} = \frac{1}{27}$, is angulus ibi evadit $= 23'$, adeoque QO'u $= 46'$. Hinc GCG' + QO'u $= 30' + 46' = 76'$, & differentia angulorum TSt, LG'l $= \frac{76}{27}$, sive proxime minutorum $2\frac{1}{4}$, quibus distractio colorum TSt, in egressu e tertia lente est paullo minor, quam LG'l, sive NG'n in egressu e prima. Ea inventa fuerat num. 63 $= \frac{30 \times 21}{27}$, $= \frac{630}{27}$: cum igitur hæc differentia sit $= \frac{76}{27}$, est ad ipsam, ut 76 ad 630, nimirum minor, quam pars octava totius distractionis factæ a prima lente.

142. Hæc diminutio distractionis, cum primum ipsam animadverti, spem mihi præbuit corrigendi eam penitus, etiam per lentes simplices, ut innui in Opusculo, quod ante hosce quatuor annos edidi Mediolani conscriptum italice. In eo proposui tantummodo remedium paragraphi præcedentis petitum a tertia lente composita acromatica: ibidem determinavi etiam quantitatem ejus diminutionis, sed minus accurate, quam hic persecutus sum accuratius. Inveni postea remedium per duas lentes pro telescopio invertente objectum, quod hic exposui §. IV; ac deinde id ipsum transtuli ad systema lentium trium reddentium directionem objecti. Plura haberi possunt systemata, quæ id præstent: incipiam ab admodum simplici, & parum dissimili ab eo, qui habetur in ipso illo paragrapho tertio.

143. Sint (fig. 9 Tab. II) lentes omnes e vitro communi, ac priores duæ habeant distantias focales æquales cum foco I communi, tertia remaneat in eadem distantia KP $=$ GK transiens

per

per idem punctum Q, quod in fig. 3 Tab. I erat concursus rectarum G'K, LV; sed habeat distantiam focalem dimidiam distantiæ reliquarum. Erit PO (fig. 9 Tab. II) dupla distantiæ focalis ipsius pro radiis parallelis axi, adeoque PO' proxime dupla ejusdem pro radiis habentibus directionem ipsius. Hinc rectæ QR, *qr'*, per quas egrederentur ex ea lente fila rubea advenientia per O'Q, O'*q*, non erunt parallelæ, sed convergent ad quoddam punctum X ipsius rectæ O'P; & cum PO' sit paullo major, quam dupla distantia focalis radiorum habentium ejus directionem; erit (numer. 56) PX paullo minor ipsâ. Quare ob viciniam punctorum P, Q poterunt haberi QX, *q*X pro æqualibus QO', *q*O', & anguli QX*q*, QO'*q* pro æqualibus inter se. Porro angulus *rq*X, quem radius violaceus delatus per rectam *l*O'*q*, & egressus per *qr* continet cum via *qr'*X ejus radii rubei concepti ut delati per eandem rectam O'*q*, debet esse æqualis angulo QO'*q*. Nam ob PR dimidiam KI, habendus erit angulus QRP pro duplo anguli LIK: hinc si habeatur *uqr'* pro æquali VQR, sive QRP, & IG'E pro æquali GIG', sive LIK; refractio in *q* erit dupla refractionis in G', & idcirco differentia *rq*X refractionum rubei, & violacei delatorum per eandem rectam O'*q*, dupla differentiæ LG'*l*, cujus cum sit duplus in eo casu (num. 139) etiam angulus QO'*q*; erit *rq*X = QO'*q*. Hinc idem *rq*X = QX*q*, adeoque via radii rubei QRX parallela viæ violacei *qr*.

144. Idem casus occurrit hic, qui num. 94, ubi in fig. 7 ex eo, quod KG erat dupla distantiæ focalis lentis HH, radii G'L, G'*l* assumpti sunt ut convergentes per LM, *l*M ad distantiam paullo minorem rectâ G'K, rectæ LG', *l*G' assumptæ pro æqualibus rectis LM, *l*M, angulus LM*l* assumptus pro æquali angulo LG'*l*, cui cum æqualis esse deberet angulus M*lm* ob refractiones in G', & L æquales, deductus est inde parallelismus rectarum LM, *lm*.

145. Videndum jam hic etiam, quæ sit positio totius systematis respectu foci objectivi F (Fig. 9), quid accidat augmento, & campo. Radii pertinentes ad idem punctum objecti, quos objectivum colligit in suo foco F, debent prodire e postrema lente MM proxime paralleli. Hinc debent discedere ab ipsius distantia

 foca-

focali, quæ sit $Pa' = \frac{1}{2}$, factis nimirum distantiis focalibus reliquarum $= 1$. Quare ob $KP = 2$ erit $Ka' = \frac{3}{2}$, adeoque lens HH debet eos excipere (num. 55) divergentes a quodam puncto a, ut eos colligat in ea distantia majore, quam sit ejus distantia focalis; ad quam nimirum convergerent, si advenirent paralleli. Invenietur a per formulam solitam (num. 50) $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$. Erit hic $x = Ka' = \frac{3}{2}$, $h = 1$, $p = Ka$. Quare $\frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{p}$, & $\frac{1}{p} = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$, ac $p = -3$. Valor Ka evasit negativus ob divergentiam, $Ka = 3$ debet jacere contra directionem radiorum advenientium, nimirum versus G. Est autem $KG = 2$, adeoque $Ga = 1$. Debet igitur lens prima BB eos reddere divergentes a distantia Ga, adeoque (num. 56) distantia GF, e qua eos excipit divergentes, debet esse ipsius dimidia. Debet igitur systema collocari post focum objectivi ita, ut ab eo distet per dimidium distantiæ focalis primæ lentis, quod est æquale distantiæ focali lentis tertiæ.

146. Augmentum esset proxime idem, ac si haberetur sola lens tertia, vel omnes tres lentes essent ejusdem distantiæ focalis cum ea ipsa lente tertia. Id facile eruitur ex theorematis numerorum 124, & 125. Pro utroque ibi supposita est coincidentia focorum objectivi, & primæ ocularis, quæ habetur semper, ubi adhibetur lens unica, sed non habetur hic, ubi adhibentur tres lentes cum distantia tertiæ a secunda majore, quam sit summa earum distantiarum focalium: idcirco evasit GF æqualis non distantiæ focali integræ lentis primæ, sed ejus dimidiæ. Adhuc tamen illud theorema secundum habet locum etiam sine coincidentia eorum focorum; dummodo distantia GF lentis primæ a foco objectivi, & distantia focalis ipsius lentis primæ, sint exiguæ respectu distantiæ focalis objectivi, quod semper accidet in exemplis, quæ adhibebimus. Prima conditio reddit in fig. 3 Tab. I proxime æquales CF, CG, secunda (num. 57) GI proxime æqualem distantiæ focali lentis BB. Hinc si distantia focalis objectivi dicatur b, & distantiæ focales ocularium h, h', h''; ratio anguli

GIG'

GIG' ad GCG', quæ ibi erat CG ad GI; erit adhuc proxime eadem, ac b ad h. Ratio autem anguli QRP ad KIL = GIG', erit adhuc, ut ibi, eadem ac KI ad PR, sive h' ad h''. Quare ratio ex iis composita, quæ est ratio anguli QRP ad GCG', exprimens augmentum, erit bh' ad hh''. Ejus valor erit $\frac{bh'}{hh''}$(*): porro is erit idem, qui esset; si valores h, h', quos hic supponimus æquales inter se, essent æquales ipsi h''; & erit idem ac $\frac{b}{h''}$, qui valor (num. 124) exhiberet augmentum, si lens tertia esset sola. Porro inde patet, positionem foci objectivi respectu primæ lentis in ordine ad reddendos sensibiles pulveres ipsi adhærentes non esse magis incommodam, quam debeat esse in communibus telescopiis pari augmento, & quam sit in omnibus positio foci præcedentis postremam lentem, quæ debet distare ab ipsa per ejus distantiam focalem.

147. Campus itidem fieri poterit idem, ac si tertia lens MM esset sola, vel omnes tres æquales: nam factâ semiaperturâ PQ, quantam permittit lens ipsa tertia, quæ est convexa plus, quam cæteræ, poterunt ipsi fieri æquales KL, GG', quarum prior debet esse ipsi semper æqualis in quovis e casibus congruentiæ focorum in I, posterior debet esse æqualis priori pro hoc casu priorum binarum lentium æqualium. Quamobrem hæc combinatio non est incommoda.

148. Potest reddi commodior duplicando campum, & retinendo eandem distantiam. Satis est in MM pro unica lente, quæ habeat distantiam focalem dimidiam, adhibere duas simul conjunctas æquales prorsus prioribus. Nam ex num. 60 patet, distantiam focalem utriusque lentis simul conjunctæ fore dimidiam distantiæ focalis singularum, si negligatur earum crassitudo. Hinc adhibitâ ea lente compositâ habebuntur omnia, quæ habebantur in simplici dimidiæ distantiæ focalis; sed duplo minor curvatura du-

(*) Ob eandem rationem intervallorum CF, CG proxime æqualium in mensura campi accipiemus sæpe primum ex iis pro secundo.

duplo majorem aperturam permittet; adeoque duplicari poterit semiapertura PQ, quæ reddat KL, GG' duplas.

149. Hæc substitutio duarum lentium loco unius efficit, ut hoc remedium pertineat ad systema quatuor ocularium; sed illud hîc propono, considerando compositam e binis conjunctis ut unicam. Dixi, per eam conjunctionem obtineri posse aperturam duplam, quæ exhibeat campum duplo majorem: hîc nimirum respexi tantummodo aperturam proportionalem radiis sphæricitatum, quæ comprehendat arcus similes. Ad determinandam relationem aperturarum, quæ destruat, vel reddat minima reliqua incommoda ab iis pendentia, requiritur investigatio multo complicatior, in qua inquirendum est potissimum in differentiam augmenti pro diversa distantia puncti objecti a centro campi, a qua oritur potissimum incommodum aperturarum majorum justo; quærendum ibi etiam, quid prodesse possit mutatio binarum sphæricitatum lentis æquivalentis cuivis ex isosceliis, quid noceat singularum crassitudo. Id materiam præbebit novis perquisitionibus: interea illud est evidens, aucto lentium numero augeri combinationes quantitatum indeterminatarum, quæ pro vitiis corrigendis adhibendæ sunt; quod quidem spem præbet correctionis majoris, & plurium vitiorum. Eam ob causam hæc substitutio binarum lentium pro unica potest esse utilis; licet nonnihil incommoda sit eo ex capite, quod quo plures lentes adhibentur, eo plus luminis amittitur per crassitudinem vitri, quod nunquam est accurate diaphanum, & per reflexiones in quovis ingressu, & egressu.

150. En igitur hoc remedium. *Determinato augmento, quod sperari possit ab objectivi perfectione, & apertura, dividatur distantia focalis ipsius objectivi per numerum, qui exprimit id augmentum: quotus erit distantia focalis lentis tertiæ: hæc assumatur vel simplex, vel composita ex binis conjunctis, quarum singulæ habeant distantiam focalem duplam. Assumantur aliæ binæ lentes, quæ habeant distantias focales duplas ejus, quam habet tertia simplex, vel æquales illi, quam habent singulæ e binis illam componentibus. Aperturæ omnes ipsarum lentium fiant æquales inter se, non majores dimidiâ distantiâ focali*

cali lentis tertiæ, si ea sit sola, vel cujusvis e quatuor lentibus, si ea sit composita. Bina intervalla primæ a secunda, & secundæ a tertia fiant æqualia inter se, singula vero dupla distantiæ focalis lentis primæ, vel secundæ: collocetur diaphragma in foco objectivi, cujus apertura sit paullo minor aperturis ocularium. Distinctio habebitur, ubi systema ocularium ita admotum fuerit ipsi diaphragmati, ut lens prima distet ab ipso circiter per dimidium distantiæ focalis lentis tertiæ simplicis, vel compositæ. Hæ positiones erunt non penitus accuratæ, sed veris proximæ: ad habendas accuratiores, adhibenda erit methodus proposita num. 98. Distantia tertiæ lentis a secunda invenietur, ipsam promovendo, & retrahendo nonnihil, donec colores effugiant sensum, vel evadant minimi, nimirum donec, eâ auctâ adhuc magis nonnihil, & imminutâ, color rubeus in limite inter objectum admodum lucidum, & obscurum succedat violaceo, & vice versâ, quo indicio facile deprehendetur distantia debita: constitutâ primâ lente respectu secundæ in ea distantia, totum systema trium lentium movendum erit nonnihil antrorsum, retrorsum; donec pro diversa oculorum constitutione habeatur distinctio maxima.

151. Infinitæ aliæ combinationes haberi possunt, quæ corrigant eam colorum separationem: facile invenietur formula generalis pro casu, in quo omnes tres lentes sint ex eadem materia, & priorum duarum foci conveniant in I (fig. 9 Tab. II), quicumque fuerint radii sphæricitatum. Omnia erunt communia huic figuræ cum figura 3 usque ad puncta O, O', sed tertia lens MM poterit occurrere rectis iisdem LO'V, $lO'u$ in aliis punctis Q, q pro diversa ejus distantia a lente secunda HH: semper autem fila rubea, quæ concipiantur delata per rectas lQ, $lO'q$ prodibunt per rectas QR, qr', & filum violaceum delatum per rectam $lO'Q$ prodibit per rectam qr, quarum directiones non erunt eædem ac in fig. 3. Erit autem R focus ulterior lentis MM pro radiis rubeis parallelis axi, ac a' focus ipsius citerior. Sint ut num. 146, distantiæ focales trium lentium h, h', h'', & angulus LG'l dicatur a. Erit (num. 116) LO' = KO = h', & angulus LG'l ad

LO'l

LO'l proxime ut G'L, sive GK ad LO', ac GI proxime $= h$, adeoque LO' $= h'$: GK $= h + h'$ :: LG'l $= a$: LO'l $=$ QO'q cujus valor erit $= \frac{(h+h')a}{h'}$. Pariter ut PR, $= h''$, ad KI $= h'$, ita angulus LIK, sive GIG', vel IG'E ad PRQ, sive VQR, vel uqr, adeoque (*) ita LG'l $= a$, ad $r'qr = \frac{h'a}{h''}$. Is angulus debet esse æqualis angulo QXq ad habendas QX, qr parallelas, & anguli QO'q, QXq debent esse proxime in ratione reciproca rectarum QO', QX, quæ sunt proxime æquales rectis O'P, PX. Quare erit O'P : PX :: $\frac{h'a}{h''} : \frac{(h+h')a}{h'}$ :: h'^2 : $h''(h+h')$. Porro in formula solita $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$ applicata ad tertiam lentem MM pro radiis digressis ex O', & coeuntibus in X est PO' $= -p$, PX $= x$, $h'' = h$. Quare fiet h'^2 : $h''(h+h')$ :: $-p : x = -\frac{ph''(h+h')}{h'^2}$. Hinc $-\frac{h'^2}{ph''(h+h')} = \frac{1}{x} = \frac{1}{h''} + \frac{1}{p} = \frac{p+h''}{ph''}$, & $p + h'' = -\frac{h'^2}{h+h'}$, ac $p = -h'' - \frac{h'^2}{h+h'}$ (**).

152. In hac formula h, h', h'' exprimunt tres distantias focales, p valorem PO' proxime æqualem distantiæ PO lentis tertiæ a foco ulteriore secundæ, & $h + h'$ est proxime æqualis distantiæ secundæ a prima, $h' - p$ est distantia tertiæ a secunda; cum

(*) Nam LG'l, $r'qr$ sunt distractiones respondentes refractionibus IG'E, uqr: cum eæ æquentur ipsis multiplicatis per $\frac{dm}{m-1}$ (num. 41), debent esse, ut ipsæ.

(**) Si libeat potius assumere ad arbitrium distantiam tertiæ lentis a secunda; habebitur $-p$ demptâ inde distantiâ focali h' ipsius secundæ, quod exhibebit distantiam focalem tertiæ adhibendæ in ea distantia ad extinguendos colores. Sed præstat assumere ad arbitrium ipsam lentem tertiam, cum multo facilius sit datam lentem collocare in distantia, quæ respondeat formulæ, quam lentem efformare, quam requirit formula pro data distantia.

cum ea distantia sit KO + OP, & KO sit $= h'$, OP assumpta hic in directione contraria directioni PO, quæ induxit valorem p negativum respectu formulæ pertinentis ad tertiam lentem. Quare ipsa relinquit ingentem indeterminationem; cum exhibeat unicum nexum inter quatuor valores indeterminatos. Aliam determinationem addit augmentum n, quod cum sit $= \frac{bh'}{hh''}$, requirit $\frac{hh''}{h'} = \frac{b}{n}$. Sed videndum, quid accidat aperturis pro campo, & distantiæ lentis primæ a foco objectivi. Horum determinatio generalis exhibebit regulas simplices, & elegantes; sed interea statim hic incurrit in oculos combinatio omnium simplicissima, in qua omnes distantiæ focales sint æquales. Fiat $h'' = h' = h = 1$: erit $p = -\frac{1}{1+1} - 1 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$. Quare *habebitur correctio colorum, si adhibeantur tres lentes simplices prorsus æquales ex eadem materia, quarum priores binæ collocentur in distantia æquali duplæ distantiæ focali singularum, ac tertia a secunda distet per eas distantias focales* $2\frac{1}{2}$.

153. Augmentum in hoc casu itidem erit hic, ut num. 146, idem, ac si haberetur sola tertia lens, vel eæ tres lentes æquales haberent focorum coincidentiam; quia ejus valor erit $\frac{bh'}{hh''}$, qui ob $h = h'$ evadit $\frac{b}{h''}$ æqualis valori exprimenti (num. 124) augmentum factum per solam lentem tertiam. Hinc si omnes hæ tres lentes sint æquales lenti tertiæ numeri 150, habebitur hic idem augmentum, ac ibi; & patet, aperturam, qua campus determinatur, fore eandem in utroque casu. Sed distantia GF primæ lentis a foco objectivi esset hic (*) dimidia ejus, quæ ha-

 be-

(*) Hic comparantur bina systemata lentium ocularium: primum est id, quod proponitur numero 143, in quo priores binæ habent distantias focales æquales, tertia dimidiam, sive ipsa sit sola, habens convexitatem majorem, & suam distantiam focalem minorem, sive composita e binis contiguis habentibus curva-

beretur ibi. Nam esset hìc $PO = 1\frac{1}{2}$, & $Pa' = 1$; adeoque $Oa' = \frac{1}{2}$, $Ka' = \frac{1}{2}$ ob KO itidem $= 1$, unde eruitur, ut numer. 145, $Ka = 3$, $Ga = 1$, $GF = \frac{1}{2}$. Sed hìc unitas est ipsa distantia focalis lentis tertiæ æqualis reliquis; ibi erat distantia focalis præcedentium dupla distantiæ focalis lentis tertiæ. Quare ibi unitas erat duplo major, quam hìc, & distantia $GF = \frac{1}{2}$ ibi duplo major quam hìc: nimirum ibi æqualis toti distantiæ focali lentis tertiæ, hìc dimidiæ distantiæ focali ipsius. Et cum ad habendum idem augmentum distantia focalis lentis tertiæ utrobique debeat esse eadem; erit GF ibi duplo major quam hìc.

154. Id reddit duplo magis incommodum hoc systema in ordine ad reddendos sensibiles pulveres *primæ lentis*. Reddit quidem hæc combinatio paullo brevius totum systema ab F ad R. Nam hìc habetur $RK = 3\frac{1}{2}PR$, $KG = 2$, $GF = \frac{1}{2}$, adeoque $RF = 6PR$: ibi autem $RK = 5PR$, $KG = 4$, $GF = 1$, adeoque $RF = 10PR$; ac proinde totum systema lentium ibi est longius, quam hìc per quadruplum distantiæ focalis lentis tertiæ: sed id sane non compensat tanto majus incommodum pulverum, adeoque illud systema est præferendum huic. Accedit, quod ibi duplicari potest apertura lentis tertiæ substituendo uni simplici compositam e binis habentibus curvaturam duplo minorem: hìc vero id fieri non potest, cum hæc combinatio requirat distantias focales omnium trium æquales, unde fit, ut si tertiæ compositæ ex binis minus curvis præbeatur apertura major, reliquæ duæ ipsam ferre non possint. Oporteret duplicare omnes, quod nimis mi-

vaturas easdem, ac priores duæ, ut idcirco singulæ habeant distantias focales suas æquales distantiis focalibus earum singularum, sed distantia focalis lentis tertiæ compositæ ex iis binis sit dimidia, nimirum æqualis ei, quæ in eodem numero tribuitur illi unicæ: secundum systema est id, de quo hìc agitur, lentium tantummodo trium, quarum singulæ habeant distantiam focalem eandem, quam ibi habebat illa tertia lentium tantummodo trium. In illo priore Pa' distantia focalis lentis tertiæ, sive sit sola, sive composita e binis, est dimidia distantiæ focalis singularum præcedentium, in hoc posteriore est æqualis ipsis earum distantiis focalibus. Hinc in utroque systemate Pa' distantia focalis tertiæ est eadem: distantiæ autem focales præcedentium, & intervallum Oa', in hoc secundo sunt dimidia eorum, quæ fuerant in priore.

minueret vim luminis. Quamobrem systemati trium lentium æqualium habentium distantiam tertiæ a secunda majorem distantiâ mutuâ priorum, debet præferri systema, in quo præcedentes duæ habeant distantiam focalem duplam distantiæ focalis lentis tertiæ compositæ e binis, sed distantia tertiæ a secunda æquetur distantiæ harum mutuæ.

155. Infinitæ aliæ positiones fieri possunt, ut patet, assumendo binas alias determinationes diversas, uti factum est in singulis e duabus combinationibus, quas huc usque consideravimus, in quibus distantiæ focales priorum duarum lentium assumptæ sunt æquales inter se, distantia vero focalis tertiæ in priore dimidia earum, in posteriore æqualis etiam ipsa. Iis assumptis determinarentur eâdem methodo & aperturæ pro campo, & distantia primæ lentis a foco objectivi pro pulveribus, ac iis determinatis ea systemata compararentur cum iisdem jam consideratis. Sed præstat exhibere determinationem generalem, quæ evadit admodum elegans & simplex.

156. Quod pertinet ad augmentum, id erit (num. 146) $= \frac{bh'}{hh''}$. Facile demonstratur, eum valorem non posse crescere, quin decrescat campus in eadem ratione, si nulla apertura possit habere rationem majorem quâpiam determinatâ ad suam distantiam focalem, & aperturæ in una quapiam combinatione jam habeant omnem magnitudinem, quam habere possunt. Nam is valor non potest crescere, nisi crescente ratione $\frac{h'}{h}$, vel decrescente h''. Ratio $\frac{h'}{h}$ est proxime $\frac{KI}{GI} = \frac{KL}{GG'}$. Manente h'', manebit PQ, & KL, & auctâ eâ fractione, minuetur in eadem ratione ejus denominator GG', & campus: manente autem ea fractione, & imminuto h'', minuetur in eadem ratione PQ, adeoque & KL, & GG' cum campo. Quare in examine combinationum contentarum in formula $h'' + p = -\frac{h'^2}{h+h'}$, omissâ consideratione campi, satis erit considerare augmentum, cui erit semper reciproce ptoportiona-

nalis ipse campus, & distantiam foci objectivi a prima lente ob pulveres.

157. Ad habendum augmentum æquale cuivis numero dato n, satis erit juxta num. 146, efficere $n = \frac{bh'}{hh''}$, sive $\frac{hh''}{h'} = \frac{b}{n}$, quæ æquatio cum æquatione $h'' + p = -\frac{h'^2}{h+h'}$ exhibebit duas determinationes quatuor valorum indeterminatorum h, h', h'', p, relictis adhuc binis aliis indeterminationibus. Ope prioris ex hisce binis æquationibus facile comparatur augmentum horum systematum cum augmento casus simplicissimi, in quo lens ocularis sit unica. Si ejus distantia focalis dicatur H; erit (num. 124) idem valor $n = \frac{b}{\mathrm{H}}$. Quare $\frac{b}{\mathrm{H}} = \frac{bh'}{hh''}$, sive $\mathrm{H} = \frac{hh''}{h'}$; unde profluit hujusmodi theorema. *Lens unica simplex, quæ præberet idem augmentum, habet distantiam focalem æqualem producto ex distantiis focalibus extremarum diviso per distantiam focalem intermediæ.*

158. Valor n assumendus erit major, vel minor pro diversa perfectione objectivi, & ejus distantia focali b, nec eum satis accurate determinabit theoria. Pro telescopiis communibus theoria exhibet pari perfectione objectivi simplicis augmentum n proportionale reciproce radici quadratæ valoris b; sed pro acromaticis, in quibus binæ substantiæ non colligunt, nisi bina tot filorum coloratorum genera, non poterit determinari ea ratio, nisi determinetur quantitas erroris residui pertinentis ad reliqua fila, & plurium errorum, qui profluunt a quantitatibus neglectis. Idcirco ea omnia sperari non possunt a sola theoria, sed a diuturna, & multiplici experientia. Nimirum satis cognito genere vitrorum, quod adhibetur, & constructis plurimis objectivis, ac variatis combinationibus, quæ diversa augmenta exhibeant, determinari poterit aliquid eo pertinens. Selecto quovis systemate, quod faciat satis conditionibus reliquis per relationem quantitatum h, h', h'' ad se invicem, valor n augeri poterit, vel minui in data quavis ratione, augendo numeratorem h', vel minuendo am-

bos

bos valores h, h'' denominatoris in eadem ratione ob valorem b permanentem, & valor p variatus itidem ita, ut satisfaciat æquationi secundæ, retinebit eandem correctionem colorum.

159. Distantia foci objectivi F a prima lente, quæ respondeat æquationi secundæ destruenti colores, sic facile determinabitur. Valor PO $= p$ erit $= - h'' - \frac{h'^2}{h + h'}$, cum num. 151 sit PO', pro qua sumitur hic PO $= -p$, & $p + h'' = - \frac{h'^2}{h + h'}$, qui valor negativus ob directionem contrariam radiis advenientibus, relinquit OP $= h'' + \frac{h'^2}{h + h'}$: hinc ob a'P $= h''$ evadit Oa' $= \frac{h'^2}{h + h'}$, & ob KO $= h'$ fit Ka' $= \frac{h'^2}{h + h'} + h' = \frac{hh' + 2h'^2}{h + h'}$. Is valor in formula generali (num. 50) $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$ respectu lentis HH evadit $= x$: in eadem pro h ponendum erit h' pertinens ad eam lentem, ac habebitur $\frac{h + h'}{hh' + 2h'^2} = \frac{1}{h'} + \frac{1}{p}$, sive $\frac{1}{p} = \frac{h + h'}{(h + 2h')h'} - \frac{1}{h'} = \frac{h + h' - h - 2h'}{(h + 2h')h'} = - \frac{1}{h + 2h'}$, vel $p = - h - 2h'$. Valor p est Ka, cujus directionem exprimit signum negativum, adeoque aK $= h + 2h'$; cumque sit GK $= h + h'$, remanet aG $= h'$. Is valor negative sumptus debet sumi pro x in formula $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$ applicata ad primam lentem retento h pro h, adeoque erit $- \frac{1}{h'} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$, & $\frac{1}{p} = - \frac{1}{h} - \frac{1}{h'}$, sive GF $= p = - \frac{hh'}{h + h'}$, cujus signum negativum exprimit itidem directionem ipsius a G versus F contrariam directioni radiorum advenientium. Inde habetur hujusmodi elegans, & satis generale theorema. *Quævis combinatio trium ocularium ex eodem vitri genere habentium focos primæ, & secundæ lentis congruentes, quæ corrigat distractionem colorum, debet habere primam lentem positam ultra focum objectivi in distantia æquali*

li producto ex distantiis focalibus priorum duarum lentium diviso per earum summam.

160. Si priores binæ lentes fuerint æquales; habebitur dimidium distantiæ focalis singularum ex iis. Sic in binis combinationibus, quas assumpseramus prius, inventa est num. 145, & 153 distantia eadem foci objectivi ab oculari primâ $= \frac{1}{2}$, cum distantia focalis tam primæ, quam secundæ esset utrobique $= 1$. Ii sunt casus particulares contenti sub hoc generali. Pulveres adhærentes lenti primæ erunt eo minus sensibiles, quo fuerit major quotus ortus ex ea divisione. In omnibus hisce combinationibus diaphragma collocandum erit in foco objectivi, & debebit habere aperturam paullo minorem aperturâ utili lentis primæ: oculus autem debet collocari in R in distantia a lente tertia æquali ejus distantiæ focali.

161. Cum valor Oa' evaserit $= \frac{h'^2}{h+h'}$, patet, distantiam KP lentis secundæ, ac tertiæ fore semper majorem summâ distantiarum focalium KO, a'P, & excessus erit $\frac{h'^2}{h+h'}$, ubi $h + h'$ est proxime æqualis distantiæ GK lentis primæ a secunda. Inde eruitur theorema sane elegans, & regula simplex. *Ad destruendam distractionem colorum adhiberi poterunt tres lentes ex eodem vitri genere habentes distantias focales quascunque: collocatis prioribus binis in distantia proxime æquali summæ distantiarum focalium earundem lentium, collocanda erit tertia in distantia a secunda excedente summam distantiarum focalium earundem: pro excessu sumenda erit quantitas tertia proportionalis post distantiam primæ a secunda, & distantiam focalem secundæ; sive quadratum distantiæ focalis secundæ divisum per summam distantiarum focalium primæ & secundæ.*

162. Hæc itidem regula congruit cum iis, quæ inventa fuerant pro illis binis casibus particularibus. Distantia KP num. 145 erat $= 2$ existentibus distantiis focalibus priorum duarum lentium $= 1$ tertiæ $= \frac{1}{2}$. Distantia mutua priorum erat $= 2$, nimirum æqualis summæ distantiarum focalium priorum binarum lentium: distan-

distantia vero secundæ a tertia $= 2$ excedit summam distantiarum focalium ipsarum $1\frac{1}{2}$ per $\frac{1}{2}$, sive per $\frac{1}{1+1}$. Eadem ex numer. 152 prodit $= 2\frac{1}{2}$: sunt autem ibi distantiæ focales omnes $= 1$: Distantia mutua priorum est pariter $= 2$; distantia autem posteriorum $2\frac{1}{2}$ pariter superat summam distantiarum focalium $1 + 1 = 2$ per $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$.

163. Generalibus determinationibus potest addi longitudo totius systematis a foco objectivi F usque ad oculum collocandum in R. Est $FG = \frac{hh'}{h+h'}$, $GI = h$, $IO = 2h'$, $Oa' = \frac{h'^2}{h+h'}$, $a'R = 2h''$: est autem summa terminorum primi, & quarti $\frac{h'^2 + hh'}{h+h'} = h'$: hinc habebitur $h + 3h' + 2h''$; adeoque hujusmodi theorema : *Longitudo totius systematis erit summa distantiarum focalium unius lentis primæ, trium secundæ, duarum tertiæ.*

164. En igitur conditiones, quæ habendæ sunt ob oculos, in seligenda combinatione trium lentium ex eodem vitri genere, quarum priores duæ habeant focos congruentes, totum autem systema destruat colores.

Distantiæ focales objectivi, & trium ocularium b, h, h', h''

I. Distantia lentis primæ a secunda . . . . $h + h'$

II. Distantia lentis secundæ a tertia . . . . $h' + h'' + \frac{h'^2}{h+h'}$

III. Distantia lentis primæ a foco objectivi posito extra ipsam . . . . $\frac{hh'}{h+h'}$

IV. Augmentum n . . . . $\frac{bh'}{hh''}$

Accedunt sequentes determinationes.

V. Distantia focalis lentis simplicis præstantis idem augmentum . . . . $\frac{hh''}{h'}$

VI. Distantia oculi a lente tertia . . . . h''

VII. Longitudo totius systematis ocularium . . . $h + 3h' + 2h''$

VIII. Longitudo totius telescopii . . . . $b + h + 3h' + 2h''$

IX. Aper-

IX. Aperturæ lentium e, e', e'', cum æquationibus . . . . $e' = e''$, $e = \frac{he'}{h'}$

X. Apertura diaphragmatis a paullo minor quam . . . . e

XI. Campus proxime (*) . . . . $\frac{3438a}{b}$

165. Consideratis omnibus, videtur omnium simplicissima combinatio, in qua distantiæ focales lentium primæ, & secundæ sint æquales inter se, & habeant distantiam focalem satis magnam, lens autem tertia habeat breviorem. Distantia lentis tertiæ a secunda debebit fieri æqualis distantiæ focali ipsius cum $\frac{1}{2}$ distantiæ focalis unius e prioribus binis, quia valor $\frac{h'^2}{h+h'}$, qui additur valori $h' + h''$ (num. 164 II) evadit in eo casu $= \frac{1}{2}h'$. Quo lens tertia habuerit minorem distantiam focalem, eo majus erit augmentum, quæcumque fuerint distantiæ focales reliquarum: campus autem erit eo minor, quo id augmentum erit majus. Quo distantiæ focales reliquarum fuerint majores, eo minus apparebunt pulveres; quia lens prima eo magis distabit a foco objectivi. Proderit etiam longitudo earum distantiarum focalium ad minuendos errores figuræ sphæricæ ipsarum; quia ipsarum aperturæ in ea combinatione debent æquari illi, quæ tribuetur lenti tertiæ multo magis curvæ: quo ea longitudo fuerit major, eo erit magis idonea ad eos usus: sed nimia earum longitudo augebit nimis longitudinem totius systematis, & producet telescopium plus æquo.

166. Pro tertia lente simplici poterit poni lens composita ex duabus habentibus distantiam focalem duplo majorem, quod permittet aperturam majorem, adeoque majorem campum, paribus reliquis

(*) Proxime; quia pro divisore deberet assumi distantia objectivi a prima oculari, quæ præter distantiam focalem objectivi $= b$ habet etiam distantiam foci ipsius objectivi ab oculari eadem. Sed juxta num. 146 pro mensura campi proxima substitui potest distantia focalis objectivi b distantiæ ipsi objectivi ejusdem ab oculari: atque id fieri poterit etiam in iis combinationibus, in quibus prima ocularis jacet nonnihil citra ipsius objectivi focum.

liquis omnibus. Augmentum majus poterit obtineri minuendo distantiam focalem lentis primæ, sed eo pacto minuetur & campus: poterit autem obtineri idem augmentum cum eodem campo tam augendo distantiam focalem secundæ lentis, quam minuendo eam primæ: tum distantia primæ lentis a secunda erit itidem æqualis summæ earum distantiarum focalium, & distantia secundæ a tertia continebit summam distantiarum focalium earundem cum quadrato secundæ diviso per summam primæ, & secundæ. Quid maxime conveniat, experientia docebit melius, quam theoria (*). Ea melius, quam theoria, docebit, quæ distantia foci objectivi a prima lente tolerari possit, sine nimio incommodo orto a pulveribus.

167. Si quæratur combinatio pro objectivo habente distantiam focalem pedum trium, quæ augmentum exhibeat 54; poterunt fieri primæ duæ lentes distantiarum focalium æqualium quarumcunque: tertia debebit habere distantiam focalem linearum octo, quia hæc sola cum eo objectivo exhibet id augmentum dividendo pollices 36 per $\frac{2}{3}$: si ipsi tribuatur apertura dimidia distantiæ focalis linearum quatuor, reliquæ binæ habebunt aperturam eandem: tum in formula (num. 164) pro campo $\frac{3438a}{b}$, erit $a = 4$, $b = 36 \times 12$,

 adeo-

(*) Tam theoria hic exposita pro corrigendo errore refrangibilitatis, & extinguendis coloribus, qui visum percellant, quam ea, quæ habebitur in capite II pro corrigendo eo errore sphæricitatis, qui incurvat rectas objecti lineas, & confusionem inducit, mihi exhibuit combinationem simplicissimam, & quæ est admodum commoda pro artificibus, lentium quatuor prorsus æqualium, quarum singulæ sint plano-convexæ, ubi satis est, planum sit proxime tale, nam curvatura admodum exigua nihil officeret, secunda habeat planum obversum objecto, reliquæ tres oculo, ac tam distantia primæ a secunda, quam secundæ a tertia æquetur duplo distantiæ focalis singularum, quarta sit contigua tertiæ ita, ut eæ binæ simul æquivaleant uni habenti distantiam focalem dimidiam distantiæ focalis singularum, quo pacto fit, ut hæc combinatio pertineat ad systema trium ocularium, quarum postrema habens distantiam focalem dimidiam duplicet augmentum, aperturæ autem sint omnes æquales, diaphragma tantillo minus. Experientia multiplex jam confirmavit hujus systematis utilitatem.

adeoque campus proxime $= \frac{3438 \times 4}{36 \times 12} = \frac{3438}{108} = 32'$. Si fiat distantia focalis lentis tertiæ unius pollicis, & distantia secundæ dupla distantiæ primæ; augmentum erit idem, quia in formula $\frac{bh'}{hh''}$ valores h', h'' dupli exhibebunt eundem valorem $\frac{h'}{h''}$: campus itidem erit idem, licet apertura e'' lentis tertiæ possit fieri duplo major, quam prius, quia cum debeat esse $e' = e''$ (num. 164), & $e = \frac{he'}{h'}$, ejus valor erit idem, duplicatis valoribus e', & h': campus augeri poterit tantummodo factâ lente tertiâ compositâ e binis, quarum singulæ sint unius pollicis. Distantia focalis lentis compositæ erit $\frac{1}{2}$, adeoque augmentum idem ac prius: tum si apertura compositæ fiat dimidia distantiæ focalis utriuslibet e componentibus; erit duplo major: adeoque manentibus reliquis aperturis campus evadet minutorum 64, qui quidem est satis magnus, continens nimirum bis diametrum lunarem.

168. Quo fuerit major vis refractiva vitri, eo id erit aptius pro ocularibus; quia requiretur curvatura minor ad habendam eandem distantiam focalem, & cum curvatura minore poterit induci apertura major. Videntur idcirco præferenda pro ocularibus vitra flint, & strass, quæ habere solent majorem vim refractivam. Ea habent majorem etiam vim distractivam, quamobrem sunt minime idonea pro objectivis simplicibus, quia inducunt multo majorem colorum separationem: pro compositis acromaticis eo magis sunt idonea, quo major est eorum vis distractiva, & eo minus, quo vis refractiva est major; quia vis refractiva major lentis concavæ, pro qua adhibentur ea vitra in compositione objectivi, producit distantiam focalem ipsius. Sed pro ocularibus, si adhibeantur remedia, quæ hic propono, vis distractiva major nihil nocet, cum combinationes exhibitæ corrigant distractionem ipsam, vis autem refractiva major prodest plurimum, cum reddat breviorem distantiam focalem pari curvatura. Vim refractivam omnium corporum diaphanorum maximam habet adamas, in quo valor $m - 1$ est proxime $= 1\frac{1}{2}$, dum in vitris communi-

bus

bus est $\frac{1}{2}$, ut idcirco, pari angulo, refractio in ipso sit triplo major, quam in vitris communibus, quod redderet triplo minorem curvaturam respondentem eidem distantiæ focali. Si posset haberi vitrum, quod ejusmodi vi refractiva esset præditum; id quidem esset egregium pro ocularibus.

169. Verum vitra flint, & strass, & alia quæcumque, quæ habeant vim distractivam multo majorem, idcirco sunt minus opportuna pro ocularibus extra casum, in quo quæratur ocularis, quæ sit acromatica ipsa per conjunctionem binorum vitrorum habentium qualitates distractivas diversas, quod eadem correctio colorum haberi potest per combinationes adeo simplices, & commodas adhibendo vitra ejusdem generis etiam communia, dum illa vitra multo magis distrahentia multo difficilius obtinentur satis pura, licet ea difficultas sit minor, ubi agitur de frustis exiguis, quam ob causam constant etiam majore pretio, dum vitra minus distrahentia passim occurrunt, & idcirco appellari solent communia. Verum ne hæc quidem adhibenda sunt sine delectu; sæpissime enim in iis inveniuntur inæqualitates internæ, quæ radios ita detorquent ante appulsum ad superficiem secundam, ut rem omnem perturbent, & confusionem pariant, utcumque sint exactæ superficierum politissimarum curvaturæ calculis initis respondentes.

170. Et vero etiam ubi adhibentur quæcumque vitrorum genera, etiam eorum, quæ appellamus communia, cavendum illud, ut omnes tres lentes adhibeantur ex eadem vitri specie, quod facilius obtinebitur, si omnes abscindantur ex eadem lamina: nam illud discrimen, quod invenitur non solum inter diversa vitra flint, sed etiam inter diversa communia, obest effectui respondenti formulis, in quibus suppositæ sunt qualitates distractivæ lentium omnium eædem. Si primæ duæ lentes non habeant distantiam focalem eandem; res aliter se habebit in figuris 3, 7, 9. Concursus fili rubei G'LV in fig. 3, & 9 cum violaceo G'lu non fiet in distantia LO' æquali distantiæ focali KO secundæ lentis, uti eam invenimus num. 115 ex æqualitate angulorum LG'l, Q'lq; porro ex ea æqualitate rectarum LO', KO profluxerunt illæ formulæ numeri 164. Suppositio ejusdem qualitatis vitri lentis pri-

mæ, & secundæ in fig. 7 exhibuit (num. 97) æqualitatem angulorum LMl, Mlm, & eadem suppositio pro lente prima, & tertia exhibuit (num. 143) differentiam rqX refractionum in q duplam differentiæ LG'l refractionum in G', quæ differentiæ utrobique assumptæ sunt proportionales refractionibus radii rubei in iisdem punctis, cum hæ illas exhibeant multiplicatæ per eundem valorem $\frac{dm}{m-1}$. Mutato vitrorum genere debet induci etiam ratio pertinens ad valores $\frac{dm}{m-1}$ diversos pro diversis substantiis. Ex ea mutatione profluunt consectaria diversa, quæ possunt utique inveniri calculo rite instituto; sed exhibent formulas aliquanto minus simplices.

171. Pro invenienda distantia LO' figuræ 3 Tab. I determinabitur prius LQ ope hujusmodi proportionum GI : IK :: G'I : IL, adeoque GI $= h$: GK $= h + h'$ :: G'I : G'L :: IK $= h'$: LQ $= \frac{h'(h+h')}{h}$: tum LQ $= \frac{h'(h+h')}{h}$ ad LG' proxime $=$ GK $= h + h'$, ita proxime LG'l, quem angulum num. 151 appellavimus a, ad LQl, qui erit $= \frac{ha}{h'}$. Porro si fiat, ut valor $\frac{dm}{m-1}$ pertinens ad primam lentem ad eum valorem pertinentem ad secundam, ita 1 ad n, quæ erit ratio distractionis LG'l $= a$ ad distractionem Qlq; valor hujus erit na. Quare erit QO' : O'l $=$ O'L :: QlO' $=$ Qlq : O'Ql $=$ LQl :: an : $\frac{ah}{h'}$ :: nh' : h, & componendo $h + nh'$: h :: QO' + O'L $=$ QL $= \frac{h'(h+h')}{h}$: O'L $= \frac{h'(h+h')}{h+nh'}$. Si ambæ lentes prima, & secunda sint ex eodem vitri genere; erit $n = 1$, adeoque O'L $= h' =$ OK, uti fuerat inventum numero 115. Si prima lens sit e vitro communi, secunda e flint; erit $n = \frac{3}{2}$: si hæc secunda fuerit e strass; erit $n = 2$.

172. Inventâ LO' in fig. 3, quæ erit eadem, ac in fig. 9 Tab. II, licebit progredi, ut num. 151, ad determinandam in fig. 9 distantiam, ad quam tertia lens data collocari debeat respectu secun-

cundæ. In formula $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$ applicata ad ipsam tertiam MM ponendum erit h'' pro h, & obtinendus novus valor x ad habendum $\frac{1}{p} = \frac{1}{x} - \frac{1}{h''}$, sive $p = \frac{h''x}{h'' - x}$. Is valor determinabitur prorsus ut ibi, assumpto tantummodo novo valore n', qui sit quartus geometrice proportionalis post valores $\frac{dm}{m-1}$ pertinentes ad substantias lentium primæ, & secundæ, ac unitatem. In primis pro angulo $QO'q$ habebitur eadem proportio, ac ibi, mutato tantummodo valore LO', qui ibi erat $= h'$, in hunc hic inventum $= \frac{h'(h+h')}{h+nh'}$, adeoque erit $LO' = \frac{h'(h+h')}{h+nh'}$: $GK = h + h' :: LG'l = a : LO'l = QO'q = \frac{(h+nh')a}{h'}$. Angulus $LG'l = a$ ad angulum $r'qr$ erat ibi, ut refractio IG'E ad refractionem uqr, quæ ratio inventa est ibidem eadem, ac ratio h'' ad h': hic ea ratio erit componenda cum ratione binorum $\frac{dm}{m-1}$, nimirum 1 ad n': hinc erit angulus $r'qr = \frac{n'h'a}{h''}$, qui angulus debet esse ut ibidem $= QXq$. Tum eodem progressu calculi erit $O'P$: $PX :: QXq = \frac{n'h'a}{h''} : QO'q = \frac{(h+nh')a}{h'} :: n'h'^2 : h''(h+nh')$.

In formula $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$ applicatâ ad lentem tertiam pro radiis digressis ex O', & coeuntibus in X, erit & hic, ut ibi, $PO' = -p$, $PX = x$, & $h'' = h$, adeoque erit hic $n'h'^2 : h''(h+nh') :: -p : x = -\frac{ph''(h+nh')}{n'h'^2}$, & $\frac{1}{x} = -\frac{n'h'^2}{ph''(h+nh')} = \frac{1}{h''} + \frac{1}{p} = \frac{p+h''}{ph''}$, ac demum $p + h'' = -\frac{n'h'^2}{h+nh'}$, $p = -h'' - \frac{n'h'^2}{h+nh'}$.

173. Posito pro casu vitrorum ejusdem speciei $n' = n = 1$, redit

redit $p = - h'' - \frac{h''^2}{h + h'}$ formula eadem, quæ num. 151. Cum hæc sit simplicior, & facilius sit determinare valorem $\frac{dm}{m-1}$ pro unica specie vitri, quam pro tribus ad habendos valores n, n', præstat adhibere pro omnibus lentibus frusta vitri exsecta ex eadem lamina, quæ erunt speciei ejusdem. Notandum autem hic erit pro omnibus hisce formulis, cum per ipsas non inveniantur valores accurati, sed tantummodo veris proximi ob quantitates ordinum inferiorum neglectas, posse inveniri accuratiores adhibendo pro singulis superficiebus methodum adhibitam in postremo supplemento Tomi præcedentis ad inveniendos errores, qui supersunt, & id genus falsæ positionis compositæ, quo ibi usi sumus ad eos corrigendos. Sed calculus evadit admodum longus, & molestus. Multo expeditius res potest perfici, inventâ correctione colorum per mutationem distantiæ lentis tertiæ a secunda, & mutatâ distantiâ totius systematis ab objectivo pro acquirenda distinctione.

174. Eadem methodus rem perficiet etiam pro casu, in quo libeat augere distantiam focalem lentis secundæ ad habendum augmentum majus; quamobrem omittimus determinationem distantiæ postremarum lentium pro eo casu. Posset fieri perquisitio pro casu, in quo foci priorum binarum lentium non congruant; sed perquisitio ipsa esset magis implexa: invenimus autem combinationes satis idoneas pro congruentia eorum focorum, adeoque a systemate trium lentium transibimus jam ad systema lentium quatuor (*), de quo proferemus nonnulla non inutilia in paragrapho sequenti.

§. VII.

(*) Etiam in iis, quæ proposuimus in hoc paragrapho, occurrit usus quatuor lentium, ubi proposita est compositio tertiæ e binis contiguis; sed illæ binæ, quæ tertiam componunt, considerantur ibi tanquam si esset lens unica, adhibitis binis ad habendam tantummodo minorem curvaturam. In ordine ad colores eæ binæ reipsa agunt, tanquam si pro iis haberetur unica habens distantiam focalem eandem, ac ipsarum systema.

§. VII.

De combinatione lentium quatuor simplicium.

175. SYSTEMA quatuor lentium ob multo majorem indeterminationem indiget perquisitione multo operosiore ad eruendas combinationes simplices, & facilis evolutionis, existentibus multo magis complicatis formulis generalibus. Hinc modo pauca admodum proponemus, quæ potius viam sternant ad ulteriora tentamina.

176. Primum quidem se offert casus simplicissimus figuræ 3 Tab. I (*), in quo omnes priores tres lentes habeant distantias focales æquales cum focis coincidentibus, in quo invenimus (numer. 141) distractionem colorum TS*t*, sive QS*q* parum discrepantem a distractione NG'*n*, sive LG'*l*: uti enim in fig. 7 radii G'I, G'*i* redditi sunt paralleli in LM, *lm* per additionem novæ lentis HH post BB, ita ibidem nova lens addita post MM potest reddere parallelos radios SR, S*r*. Determinatio ejus novæ lentis fiet in ipsa figura 7, sumendo in hac posteriore puncta G, G', I, *i* pro illius punctis P, S, R, *r* cum hoc discrimine, quod in fig. 7 punctum G' jacet in ipsa lente BB ex parte dextera respectu axis, & in fig. 3 S ex parte sinistra citra MM in distantia, quæ facile determinatur: tum HKH ipsius figuræ 7 referet quartam lentem addendam.

177. Cum in fig. 3 in casu focorum pertinentium ad priores duas lentes coincidentium in I sit LO' = KO (num. 116), & addità tertià lente MM æqualis distantiæ focalis, debeat esse punctum O focus communis lentium HH, MM; erit KO = OP = O'Q, adeoque LO' = QO', & L*l* = Q*q*, & ob angulum QS*q* proxime æqualem LG'*l*, erit QS proxime æqualis LG', sive = GK = 2KI = 2PR, & addità QR proxime æquali PR, fiet SR pro-

(*) Cum sæpe hic transiri debeat a figura 3 ad 7, & viceversa, satis est semel demum monere id, quod in superioribus jam toties habuimus, figuram 3 haberi in tabula I, figuram 7 in Tabula II.

proxime $= 3PR$. Hinc in figura 7 erit censenda G'I proxime $= 3PR$ figuræ 3, adeoque proxime $= 3GI$ figuræ 7. Congruant in I foci lentium BB, HH ipsius figuræ 7, & fiat $GI = h$, $KI = z$, qui erit proxime valor etiam rectæ LI : erit $G'L = 3h - z$. Si etiam G'*l* esset radius rubeus, ut G'L; convenirent in recta G'K producta ad distantiam KM inveniendam ope formulæ generalis $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$ applicatæ ad lentem HH. In ea applicatione manebit valor h, & erit $p = G'K$, sive proxime G'L $= -(3h - z)$, ac $KM = x$. Hinc $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} - \frac{1}{3h-z}$.

178. Jam vero angulus M*lm*, cui debet esse æqualis angulus LM*l* ob parallelismum, est differentia refractionum respondens refractioni ejus radii rubei M*li*, sive proxime MLI, & num. 97 ostensum est, existente I foco lentis HH, esse angulum VLI proxime æqualem angulo VIL, sive GIG', cui in fig. 3 respondet SRP, sive QRP æqualis angulo LIK, sive GIG', vel proxime IG'E. Quare differentia refractionis M*lm* figuræ 7 habenda erit pro æquali differentiæ LG'*l* figuræ 3, sive anguli RS*r* ejusdem, qui respondet angulo IG'*i* figuræ 7, vel LG'*l*. Quare ut num. 94 debebit esse LG' proxime æqualis LM, & G'K, KM proxime æquales. Est G'K proxime $= 3h - z$, & $KM = x$ formulæ finalis numeri superioris. Hinc $\frac{1}{3h-z} = \frac{1}{h} - \frac{1}{3h-z}$, & $\frac{2}{3h-z} = \frac{1}{h}$, sive $2h = 3h - z$, adeoque $z = h$.

179. Debet igitur KI esse æqualis GI. Nimirum quarta lens debet applicari tertiæ sine intervallo, & habere distantiam focalem ipsi æqualem. Hæc est combinatio numeri 148 orta ex duplicatione lentis tertiæ. In ea adhibendæ sunt quatuor lentes similes, & æquales ex eadem materia: collocandæ autem tam prima respectu secundæ, quam secunda respectu tertiæ ad distantiam duplam distantiæ focalis singularum, evadente augmento duplo illius, quod exhiberetur ab una sola ex iis lentibus, campo eodem, quod illa sola habere posset, & distantiâ GF figuræ 3 dimi-

dimidiâ ejus, quam requireret ipsa sola, sed æquali illi, quæ haberetur, si obtineretur idem augmentum per lentem unicam, vel per tres æquales, factâ nimirum ipsarum distantiâ focali duplo minore. Hæc combinatio quatuor lentium haberet idem augmentum, & distantiam GF eandem cum casu unius, vel trium æqualium habentium distantiam focalem duplo minorem, sed campus fieri posset duplo major, quæ omnia determinata sunt paragrapho superiore.

180. Hæc applicatio mihi occasionem præbuit totius perquisitionis ipsius paragraphi superioris, nec inutile futurum arbitror hìc etiam proponere seriem, & nexum idearum, quarum quæ simplicissimæ sunt, plerumque postremæ occurrunt. Videram jam olim ortum colorum telescopicorum ex ocularibus, quarum causâ ii sæpe occurrunt & in telescopiis, quæ appellant acromatica, & in telescopiis ipsis catadioptricis. Eorum genesim persecutus ante aliquot annos in Italia, inveneram id, quod hìc demonstratum num. 115 proposui num. 116, nimirum fila separata a prima lente conjungi a secunda in ipsius foco ulteriore, si eæ sint ex eodem vitri genere, & focus ulterior primæ congruat cum citeriore secundæ. Id ipsum longe alia & complicatiore methodo demonstraveram in Opusculo italice edito, ac proposueram ibidem remedium lentis tertiæ compositæ acromaticæ. Ibidem animadverteram, separationem colorum in egressu a tertia lente simplici esse aliquanto minorem in casu trium lentium æqualium, quam in primo egressu e prima, & indicaveram, inde suboriri spem correctionis per lentes, quæ sint e vitro communi omnes.

181. Superiore anno (*) de eadem re cogitans inveni correctionem per lentes duas ex eodem vitro communi, quam hìc proposui in §. 4; quia animadverteram, quod tamen erat visu facile, posse eadem methodo correctionem obtineri additâ lente quartâ post tertiam. Adhibui autem methodum, quam hìc exponam

 paul-

(*) Cum hæc imprimo in Italia anno 1783, jam anni octo elapsi sunt ab eo tempore, quo hoc primum hujus Opusculi caput conscripsi in Gallia.

paullo inferius, revocandi ad examen combinationes nonnullas quatuor lentium, quæ observatæ fuerant in nonnullis telescopiis Anglicanis, & ejus ope inveni ea, quæ in ipsis pertinent ad augmentum, campum, distantiam primæ lentis a foco objectivi connexam cum sensu pulverum, ac separationem colorum in egressu e postrema lente, & mutationem inducendam ad destruendos colores. Illud autem mihi accidit in pluribus ejus generis combinationibus, ut semper invenerim focum objectivi quam proximum primæ lenti, vel combinationes, quæ objecta per curvaturam rectarum linearum deturparent plurimum; quamobrem eam perquisitionem tum quidem omisi: post plures menses eam iterum aggressus sum exordiendo ab hac translatione remedii petiti a secunda lente adjecta post primam, ad quartam adjectam post tertiam, & evagatus longiore ambitu demum animadverti quartam æqualem tertiæ, & ipsi adhærentem. Cum eæ binæ, neglectâ crassitudine, quam in omnibus hisce perquisitionibus neglexi, debeant præstare eundem effectum respectu refractionis, & distractionis colorum, quem præstat lens unica habens distantiam focalem duplo minorem, regressus ad lentes tres, primum exposui directe remedium petitum a tertia lente habente distantiam focalem duplo minorem, & positâ ad distantiam eandem, quam prius habebant illæ duæ æquales conjunctæ; ac inde progressus ad formulam generalem trium lentium habentium focos primæ, & secundæ conjunctos, ejus consectaria exposui in eodem superiore paragrapho. Hic fuit idearum nexus, in quo, quæ statim debuissem videre, nonnisi longo, & flexuoso ambitu deprehendi, & eum ambitum hìc protuli, cum ex hac additione lentis quartæ conjunctæ cum tertia æquali ortum duxerint illa reliqua.

182. Hìc etiam ab hoc casu particulari liceret progredi ad magis generales; sed formulæ obveniunt admodum complicatæ. Indicabo tantummodo methodum, qua calculus iniri possit pro casu quatuor lentium, quarum priores duæ habeant focum ulteriorem primæ congruentem cum citeriore secundæ, ac foci ulteriores tertiæ & quartæ sint congruentes. Ad id præstandum oportet redire ad ea, quæ in superiore paragrapho agendo de systema-

stemate trium lentium ex eadem substantia, demonstrata sunt pro prioribus binis habentibus eam focorum congruentiam ante considerationem tertiæ. In figura 9 Tab. II omnia pro hoc casu erunt eadem ac in figura 3 Tab. I usque ad puncta OO'. Habebuntur binæ lentes BB, HH, cum earum distantiis focalibus GI $= h$, IK $=$ KO $=$ LO' $= h'$, sint autem Q, q, P occursus lentis tertiæ collocatæ in distantia nondum definita, cum radiis LO', lO', & axe KO, ac prodeant ex ipsa per rectas QRX, qr'X radii rubei, qui concipiantur delati per rectas O'Q, O'q, & radius violaceus reipsa delatus per rectam O'q prodeat per qr (*). E num. 151 erunt GI $= h$, IK $=$ LO' $= h'$, angulus LG'$l = a$, QO'q $=$ LO'l $= \frac{(h+h')a}{h'}$, qui erit itidem valor anguli QO'q in fig. 9. Sit ibidem distantia focalis lentis MM itidem h'', & distantia OP, sive O'P $= -p$, & erit in formula $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$ applicata ad lentem MM ponendum h'' pro h, adeoque $\frac{1}{x} = \frac{1}{h''} + \frac{1}{p}$: factis autem ut PX $= x$ ad PO' $= -p$, sive QX ad QO', ita QO'q $= \frac{(h+h')a}{h'}$ ad QXq, habebitur valor hujus anguli $= \frac{-(h+h')ap}{h'} \times \frac{1}{x} = \frac{-(h+h')ap}{h'} \times (\frac{1}{h''} + \frac{1}{p}) = -\frac{(h+h')ap}{h'h''} - \frac{(h+h')a}{h'}$: angulus autem $r'qr$, sive Xqr erit per eundem numerum $= \frac{h'a}{h''}$. Horum differentia erit convergen-

(*) Recta qr non debet hic prodire parallela rectæ QR, ut numero 143, sed inclinata ad ipsam in angulo majore, vel minore pro diversa distantia focali lentis tertiæ, & positione ipsius respectu secundæ. Angulus ejus inclinationis hic est determinandus per ea duo elementa: ipsi erit censendus æqualis angulus RSr, sive TSr figuræ 3, nempe angulus LG'l figuræ 7, qui debebit corrigi a quarta lente HH, uti præstitum est initio hujus paragraphi pro casu trium lentium æqualium cum focis congruentibus tam primæ, & secundæ, quam secundæ, & tertiæ: hic focus ulterior secundæ non congruit cum citeriore tertiæ, sed foci ulteriores tertiæ, & quartæ congruunt, ut ibi.

tia rectarum XQ, rq, quæ in fig. 3 exhibebit angulum RSr, sive QSq, cujus valor analyticus idcirco habebitur constans tribus terminis.

183. Hinc in eadem fig. 3 quæcumque sit distantia lentis tertiæ a secunda, puncto Q indicante occursum rectæ QV cum ipsa, habebitur valor analyticus utriusque anguli QO'q, QSq per h, h', h'', p, a, atque id ita, ut ibi valor a sit coefficiens singulorum e terminis. Porro considerari poterunt rectæ QO', QS, ut reciproce proportionales iis angulis, & factis QSq : QO'q :: QO' : QS, in valore hujus postremæ lineæ elidetur a, & QO' accipi poterit pro $= \text{PO}' = -p$. Hinc habebitur QS per h, h', h'', p: cumque etiam QR sumi possit pro $= \text{PR} = h''$, habebitur & SR. Cum eo, & valore anguli RSr, migrabitur ad figuram 7, ut num. 176, ponendo valorem inventum rectæ RS pro IG', & valorem anguli RSr pro IG'i. In ipsa fig. 7 GI erit itidem $= h''$, & fiet KI $= z$; tum reliqua omnia, ut numer. 177, & 178, adhibitis tantummodo hisce binis valoribus rectæ IG', & anguli IG'i, pro illis, qui ibi habebantur. Obtinebitur eodem prorsus modo æquatio, quæ præter quatuor valores distantiarum focalium h, h', h'', z, continebit p. Determinatis ad libitum quatuor ex iis quinque valoribus, invenietur quintus; eritque distantia lentis primæ a secunda $= h + h'$, secundæ a tertia $= h' + p$, tertiæ a quarta $= h'' - z$, quartæ ab oculo $= z$. Facile autem regressu facto a lente quartâ ad præcedentes, invenirentur etiam puncta dirigentia radios incidentes in quamvis ex iis lentibus, adeoque innotesceret etiam distantia foci objectivi a lente prima, qui focus dirigit radios incidentes in ipsam illâ eâdem methodo, quæ satis colligi potest ex exemplis, quæ supra proposuimus, & quam paullo inferius hìc evolvemus pro casu generali, in quo nulli etiam foci congruant, distantiæ autem focales sint utcumque diversæ, ac etiam utcumque diversæ substantiæ singularum lentium.

184. Licet in casu, quem hìc consideravimus, habeantur binæ positiones arbitrariæ, quæ problematis amplitudinem contrahant, suppressis binis aliis indeterminatis, nimirum distantiâ lentis primæ

mæ a secunda, & tertiæ a quarta, & adhibeantur omnes quatuor substantiæ ejusdem speciei; adhuc tamen satis patet, quam immensus sit numerus casuum, qui considerari possint variando ad arbitrium positionem quatuor e quinque indeterminatis, quæ remanent. Combinationes simplices, & satis utiles sperari non poterunt a formulis generalibus adeo complicatis; sed longa attentatione utendum erit, donec reflexionibus quibusdam institutis circa plures casus particulares, & quandoque etiam casu mere fortuito, inveniantur, quæ usui esse possint.

185. Si mutentur binæ illæ suppositiones arbitrariæ, quibus hìc usi sumus, in alias; poterunt inveniri aliæ formulæ non nimis compositæ, ut si priores binæ lentes haberent focos alio modo congruentes, nimirum congruentes etiam focos priorum duarum ulteriores, uti congruunt hìc ulteriores postremarum. Eo casu augmentum respondens primæ duplicaretur a secunda, ut augmentum tertiæ a quarta, & campus fortasse augeri posset pari augmento imaginis objecti. Posset autem induci extinctio colorum, vel mutatâ distantiâ focali cujuspiam ex ipsis, vel distantiâ mutuâ binarum quarumcumque. Sed ea perquisitione nunc saltem omissa proponam methodum, qua generaliter inquiri poterit in systema quodvis propositum, ut innotescat augmentum cum campo, & distantia foci objectivi a prima lente, cum quantitate separationis colorum residua, ac methodus extinguendi colores ipsos per mutationem cujuspiam e distantiis focalibus, vel e distantiis lentium mutuis. Id facile obtinebitur idoneâ applicatione formulæ generalis, qua toties jam usi sumus $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$.

186. Sit in figuris 10, & 11 Tab. III objectivum AA, quatuor oculares BB, B'B', B''B'', B'''B''', & occurrat ipsis axis in C, D, D', D'', D''', sit vero F focus objectivi: figura 10 exhibebit progressum radiorum, qui adveniant ad objectivum e puncto objecti ita remoto, ut habeantur pro parallelis, uti in fig. 1 Tab. I est radius dA respectu DC, qui quidem debent prodire vel paralleli ex lente quarta, vel nonnihil convergentes, aut divergentes pro diversa constitutione oculorum; sed considerabimus parallelismum in

in egressu, & ex eo determinabimus distantiam foci objectivi a prima lente. Figura 11 exhibebit progressum radii provenientis a puncto objecti sito extra axem, uti in eadem fig. 1 est radius D'C respectu ejusdem DC, qui ab oculari dividitur in fila colorata, & ex eo determinabimus quantitatem distractionis eorundem filorum in egressu e quarta lente postrema, quæ quidem figura exhibebit simul & augmentum, & campum, & singularum lentium aperturas utiles una cum apertura diaphragmatis. Possent ea omnia expediri per formulas generales notas geometris; sed præstat hic adhibere calculum numericum applicatum exemplo, ex quo facile pateat, quid in singulis casibus præstandum sit, omissis formulis complicatioribus, & retento usu maxime simplicium.

187. Pro objectivo distantiæ focalis pedum 6 propositum mihi fuit systema ocularium quatuor e vitro communi, quarum distantiæ focales, incipiendo ab ea, quæ prima radios excipit obversa objectivo, erant linearum 14, 21, 27, 32, intervalla autem inter ipsas 23, 44, 40, & aperturæ 9, 13, 11, 12, ac apertura diaphragmatis positi in foco citeriore postremæ ocularis 7. In utraque figura erit $DD' = 23$, $D'D'' = 44$, $D''D''' = 40$, $CF = 6 \times 144 = 864$, & si distantiæ focales ocularium dicantur h, h', h'', h''', erunt $h = 14$, $h' = 21$, $h'' = 27$, $h''' = 32$. Quærenda erit in fig. 10 distantia DF primæ lentis a foco objectivi F: tum in fig. 11 accedent aperturæ utiles lentium ocularium, & diaphragmatis, augmentum, campus, quantitas colorum residua.

188. Deveniat in figura 10 radius quidam e mediis, cujus speciei respondeant eæ distantiæ focales, directione parallela axi ad punctum objectivi K: detorquebitur inde ad ipsius focum F, & occurret primæ oculari BB alicubi in E. Abeat a prima lente ad secundam per rectam EH, quæ producta, si opus sit, occurrat axi in G, tum a secunda ad tertiam per HM, quæ axi occurrat itidem in I, deinde a tertia ad quartam per rectam MP occurrentem axi in N. E quarta prodeat per rectam PR, quæ ad habendam distinctionem debet prodire parallela ipsi axi, vel pro di-

diversa oculorum constitutione nonnihil convergens; vel divergens, sed considerabimus parallelam.

189. Ex suppositione hujus parallelismi invenietur DF ope formulæ $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$, ubi h distantia focalis singularum lentium, p distantia puncti dirigentis radios incidentes, cujusmodi puncta respectu quatuor lentium sunt F, G, I, N, distantia dirigentis refractos x, cujusmodi puncta sunt G, I, N, & infinitum versus RQ. Eundum erit ordine retrogrado a valore $x''' = \infty$ ad inveniendos p''', x'', p'', x', p', x, p: dum ii inveniuntur, figura describetur, quæ vitandæ confusionis gratia calculum dirigat, ponendo puncta extrema distantiarum inventarum ultra, vel citra lentes, prout ii valores obvenerint positivi, vel negativi: postremus valor p exhibebit quæsitam DF. Formula mutabitur in hanc $\frac{1}{p} = \frac{1}{x} - \frac{1}{h} = \frac{h-x}{hx}$, adeoque $p = \frac{hx}{h-x}$.

190. Valores x habebuntur a formula: valores h jam habentur: valores x, & $h - x$ invenientur pro præcedentibus lentibus ex inventis p pro sequentibus per formulam, & datis DD', D'D'', D''D''', qui addentur valoribus p, vel ab iis subtrahentur pro diverso valore positivorum, vel negativorum, qui ipsi nimirum considerati directione opposita D'D, D''D', D'''D'' erunt negativi. Ex ejusmodi positionibus en calculum numericum.

Pro lente 4 est $x''' = \infty$, $h''' = 32$, $p''' = \frac{32 \times \infty}{32 - \infty} = -32 =$ D''N: hinc ND''' $= 32$, D''N $=$ D''D''' $-$ ND''' $= 40 - 32 = 8$.

Pro lente 3 erit D''N $= x'' = 8$; $h'' = 27$; $h'' - x'' = 19$; $p'' = \frac{8 \times 27}{19} = 11{,}37 =$ D''I: hinc D'I $=$ D'D'' $+$ D''I $= 44 + 11{,}37 = 55{,}37$.

Pro lente 2 erit D'I $= x' = 55{,}37$; $h' = 21$; $h' - x' = -34{,}37$; $p' = \frac{55{,}37 \times 21}{-34{,}37} = -33{,}83 =$ D'G: hinc DG $=$ D'G $-$ D'D $= -33{,}83 + 23 = -10{,}83 =$ DG.

Pro

Pro lente 1 erit DG $= x = - 10,83$; $h = 14$; $h - x = - 10,83 - 14 = - 24,83$; $p = \frac{10,83 \times 14}{-24,83} = - 6,11 =$ DF.

191. Habetur igitur distantia primæ lentis a foco objectivi paullo major lineis 6, & signum negativum ostendit, eam collocandam esse ultra ipsum. Ex ea distantia, & distantia focali objectivi CF $= 864$ habetur CD $= 864 + 6,11 = 870,11$, cum qua pergendum ad fig. 11. In ea CE est radius pertinens ad punctum objecti situm extra axem traductus per centrum ipsius objectivi ad sensum irrefractus, & incurrens in punctum E primæ lentis, a qua dividitur in fila colorata. Concipiemus unum ex intermediis EGH, cum extremo violaceo Egh : distantias focales assumemus eas, quæ pertinent ad ipsum medium, cum ejusmodi distantia focalis inveniri soleat, ubi ea quæritur excipiendo imaginem objecti satis remoti efformatam a lente quapiam. Distantiam eorum filorum duplicabimus deinde ad habendam distractionem coloris rubei a violaceo.

192. Occurrat filum medium cæteris lentibus in H, M, P, & rectæ EH, HM, MP axi in G, I, N, ac via ipsius post egressum e quarta lente in R ; litteræ autem eædem, sed minusculæ adhibeantur pro radio violaceo. Figura idonea cuivis casui hic etiam delineari non poterit, nisi post calculum numericum. In eo progrediendum erit a valore p ad valores x, p', x', p'', x'', p''', x''', quorum ope invenientur omnia, quæ quæruntur adhibendo eandem formulam $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$, ubi erit $x = \frac{ph}{p+h}$. Et quidem pro radiis mediis adhibebimus eosdem valores, h, h', h'', h''' : sed pro violaceis ipsos sic generaliter inveniemus ope valoris $\frac{dm}{m-1}$, qui in iis vitris communibus, in quibus esse solet circiter (num. 38) $= \frac{1}{27}$, posito m pro filis rubeis, & dm pro differentia rubeorum a violaceis ; erit is valor $\frac{1}{55}$, posito m pro filis mediis, dm pro differentia mediorum a violaceis, & idem erit major in vitris magis distrahentibus, ut flint, & strass.

193. Sit

193. Sit $\frac{dm}{m-1} = \frac{1}{q}$, & in formula $\frac{m-1}{f} = \frac{1}{h}$ (num. 50) posito H pro distantia focali violaceorum erit $\frac{1}{H} = \frac{m+dm-1}{f}$ $= \frac{1}{h} + \frac{dm}{f}$, sed $\frac{1}{f} = \frac{1}{h(m-1)}$. Quare $\frac{1}{H} = \frac{1}{h} + \frac{dm}{h(m-1)}$ $= \frac{1}{h} + \frac{1}{hq} = \frac{q+1}{hq}$. Facto pro quopiam vitro communi $q = 55$; erit $H = \frac{55h}{56}$. Quare cum sit $h = 14$; $h' = 21$; $h'' = 27$; $h''' = 32$; erit $H = 13,75$; $H' = 20,62$; $H'' = 26,52$; $H''' = 31,43$.

194. Jam vero puncta dirigentia radios incidentes, adeoque terminantia valores p respectu earum lentium, incipiendo a prima pro filis mediis erunt C, G, I, N, & puncta dirigentia radios refractos terminantia valores x erunt pro iisdem G, I, N, R, exhibebuntur autem ejusmodi puncta pro filis violaceis a litteris C, g, i, n, r.

195. En calculum pro filis mediis.

Pro lente 1 erit $CD = p = -870,11$, $h = 14$, $p + h$ $= -856,11$, $x = \frac{-870,11 \times 14}{856,11} = 14,23 = DG$: hinc $D'G = D'D - GD = -23 + 14,23 = -8,77$.

Pro lente 2 erit $D'G = p' = -8,77$, $h' = 21$, $p' + h'$ $= 12,23$, $x' = \frac{-8,77 \times 21}{12,23} = -15,06 = D'I$: hinc $D''I$ $= D''D' + D'I = -44 - 15,06 = -59,06$.

Pro lente 3 erit $D''I = p'' = -59,06$, $h'' = 27$, $p'' + h''$ $= -32,06$, $x'' = \frac{-59,06 \times 27}{-32,06} = 49,74 = D''N$: hinc $D'''N = D''N - D''D''' = 49,74 - 40 = 9,74$.

Pro lente 4 erit $D'''N = p''' = 9,74$, $h''' = 32$, $p''' + h''' =$ $41,74$, $x''' = \frac{9,74 \times 32}{41,74} = 7,47 = D'''R$.

196. Pro filis violaceis sic habebitur.

Pro lente 1 erit $CD = p = -870,11$, $H = 13,75$, $p + H = -856,36$, $x = \frac{-870,11 \times 13,75}{-856,36} = 13,97 = Dg$: hinc $D'g = D'D - gD = -23 + 13,97 = -9,03$.

Pro lente 2 erit $D'g = p' = -9,03$, $H' = 20,62$, $p' + H' = 11,59$, $x' = \frac{-9,03 \times 20,62}{11,59} = -16,07 = D'i$: hinc $D''i = D''D' + D'i = -44 - 16,07 = -60,07$.

Pro lente 3 erit $D''i = p'' = -60,07$, $H'' = 26,52$, $p'' + H'' = -33,55$, $x'' = \frac{-60,07 \times 26,52}{-33,55} = 47,48 = D''n$: hinc $D'''n = D''n - D''D''' = 47,48 - 40 = 7,48$.

Pro lente 4 erit $D'''n = p''' = 7,48$, $H''' = 31,43$, $p''' + H''' = 38,91$, $x''' = \frac{7,48 \times 31,43}{38,91} = 6,04 = D'''r$.

197. Ope horum valorum invenientur facile aperturæ utiles duplæ rectarum DE, D'H, D''M, D'''P. Ponemus hìc derivationes pro filis mediis, & ad latus similes expressiones pro violaceis.

$$DG : D'G :: DE : D'H = \frac{DE \times D'G}{DG} \ldots D'h = \frac{DE \times D'g}{Dg}$$

$$D'I : D''I :: D'H : D''M = \frac{DE \times D'G \times D''I}{DG \times D'I} \ldots D'm = \frac{DE \times D'g \times D''i}{Dg \times D'i}$$

$$D''N : D'''N :: D''M : D'''P = \frac{DE \times D'G \times D''I \times D'''N}{DG \times D'I \times D''N} \ldots\ldots D'''p = \frac{DE \times D'g \times D''i \times D'''n}{Dg \times D'i \times D''n}.$$

198. Hæ expressiones, assumptâ utcumque primâ semiaperturâ DE exhibebunt reliquas D'H, D''M, D'''P, D'h, D''m, D'''p; sed ne aliqua sit nimis magna respectu cujuspiam e distantiis focalibus, potest initio assumi $DE = 1$, nimirum unius lineæ: inventis reliquis in ea suppositione, ea, quæ respectu suæ distantiæ focalis fuerit omnium maxima, augeri poterit ita, ut ejus di-

dimidium non excedat: tum reliquæ omnes augebuntur in eadem ratione.

199. Expressionibus numeri 197 poterit addi etiam expressio pro apertura diaphragmatis ponendi in foco anteriore postremæ lentis. In hac combinatione, in qua focus objectivi F jacet inter ipsum objectivum, & primam ocularem, habentur duæ imagines objecti. Altera in foco ipso objectivi in FF', altera in foco anteriore lentis postremæ, nimirum, si in fig. 11 sumatur D'''T parallela, & æqualis D'''N figuræ 10, in TT'. In utrolibet loco potest poni diaphragma, quod si ponatur in FF' debebit habere aperturam paullo minorem aperturâ lentis primæ ob FF' paullo minorem DE: si autem ponatur in TT', erit $TD''' = h''' = 32$, adeoque dabitur & $TN = TD''' + D'''N = 9{,}74 + 32 = 41{,}74$. Erit autem

$$D'''N : TN :: D'''P : TT' = \frac{D'''P \times TN}{D'''N}.$$

Si focus objectivi caderet post primam lentem; tum imago non haberetur nisi unica in TT', adeoque ibi tantum diaphragma collocari posset ad habendum campi marginem satis distinctum.

200. Eædem expressiones numeri 197 exhibent etiam augmentum n, pro quo assumi potest tangens anguli D'''RP divisa per tangentem anguli DCE. Illa est $\frac{D'''P}{D'''R}$, hæc $\frac{DE}{DC}$; cumque sit $D'''P =$

$\frac{DE \times D'G \times D''I \times D'''N}{DG \times D'I \times D''N}$; erit augmentum $= \frac{DC \times D'G \times D''I \times D'''N}{DG \times D'I \times D''N \times D'''R}$.

Hæc expressio non pendet ab aperturis, cum DE evaserit e calculo per divisionem: sed inventis ad alios usus aperturis, habebitur facilius per formulam $\frac{DC \times D'''P}{DE \times D'''R}$, ubi poterit etiam assumi $DE = 1$, dummodo assumatur D'''P respondens ei ipsius valori. Habetur itidem campus, qui juxta num. 127 erit $= \frac{3438' \times 2DE}{DC}$.

Pro hoc valore oportebit determinare magnitudinem absolutam aperturæ 2DE; dum augmentum habetur independenter ab ipsa, eliso per divisionem valore DE in ejus expressione.

201. Ex iisdem expressionibus patebit, an colorum separatio inducta per primam ocularem adhuc permaneat, an sit correcta, an etiam plusquam correcta. Si sit correcta; debent PR, *pr* esse parallelæ inter se, adeoque $\frac{D'''P}{D'''R} = \frac{D'''p}{D'''r}$. Si hæc æqualitas non habeatur; poterit videri, quantum distrahantur colores; sed ad eam determinationem requiritur itidem determinatio magnitudinis absolutæ valoris DE. Nimirum inveniendi sunt anguli D'''RP, D'''*rp*, qui habent pro tangentibus $\frac{D'''P}{D'''R}$, $\frac{D'''p}{D'''r}$. Si primus sit minor secundo, colores non erunt satis correcti: si major, erunt plusquam correcti: differentia eorum angulorum exhibebit quantitatem distractionis colorum medii, & violacei, quæ duplicata exhibebit distractionem violacei a rubeo. Porro ad habendam absolutam magnitudinem eorum angulorum, oportet habere absolutas magnitudines D'''P, D'''*p*, quarum valores involvunt valorem DE; dum hujus valor non est necessarius, ubi quæritur tantum, an eæ binæ fractiones sint æquales inter se; nam is ingreditur expressionem utriusque numeratoris, adeoque, demptâ etiam DE ex expressione utriusque, residua debent exhibere æqualitatem, si ea exhibetur a valoribus integris.

202. Ad habenda hæc omnia, & potissimum ad habendam accuratius distractionem colorum, erit opportunum adhibere logarithmos, qui dum retinentur in progressu ab alia apertura ad aliam, minus erroris inducitur, quam ubi assumuntur statim numeri, contemptis fractionibus inferioribus. Pro quantitate dispersionis colorum requiritur exactitudo major, cum ipsa dispersio pendeat a differentia perquam exigua angulorum, qui ipsi sunt exigui. Ut pateat progressus omnis calculorum hujusmodi in exemplo combinationis propositæ, exhibebimus hîc seriem calculi numerici instituti per logarithmos digestam in tabulam, cujus singulas partes deinde explicabimus. Ea tabula cum evadat latior paginâ hujus editionis, ponitur hîc extrahenda ad latus more tabularum continentium figuras ad calcem hujus paragraphi post numerum 245 pag. 128.

203. Ha-

203. Habentur in ea tabula loculamenta XI Romanis numeris distincta, & a se invicem separata per binas rectas lineas, quibus singula terminantur circumquaque, ac deinde fere omnia dividuntur in plures partes per singulas lineas transversales. Continentur in iis omnia, quæ pertinent ad figuram 11. Calculus pro figura 10 multo brevior pro iis, quæ habentur numero 190, est prorsus similis illi, qui habetur hic num. IV pro iis, quæ continentur num. 195, adeoque ejus exemplum hic omittimus.

204. Num. I habentur fundamenta calculi, nimirum in prima linea quatuor valores intervallorum inter vitra incipiendo ab objectivo, in secunda distantiæ focales quatuor ocularium, & formula pro inveniendo valore u distantiæ focalis puncti dirigentis radios refractos ex valore p distantiæ puncti dirigentis incidentes, & distantiâ focali: ea habetur num. 192.

205. Num. II habetur calculus pro inveniendis distantiis focalibus lentium ocularium pertinentibus ad radios extremos violaceos ex valoribus h numeri I, methodo exposita num. 193, ubi eas appellavimus H, & invenimus $H = \frac{55h}{56}$. Prima columna numeri II continet numeros, secunda eorum logarithmos disjunctos ab iis per sola punctula, quod fit itidem in omnibus reliquis loculamentis. Semper in fine cujusvis lineæ habentur logarithmi valorum, qui sunt in initio ejusdem, & pro valoribus existentibus in numeratore fractionis sunt logarithmi ipsi; pro valoribus autem existentibus in denominatore sunt eorum complementa arithmetica, quæ ut discernantur a logarithmis, designantur lineolâ habente directionem ipsius lineæ superpositâ primæ notæ exhibenti characteristicam: ea complementa efformantur de more demendo singulas logarithmi notas a 9, & postremam a 10. Ii logarithmi omnes omnino, præter duos in numeris IV, & V, desumpti sunt e tabulis communibus, in quibus numeri non pertingunt, nisi ad 10000, sine partibus proportionalibus, quod contrahit calculum; satis sunt enim ubique 4 notæ pro iis, quæ hic quæruntur: eæ poterant esse satis etiam pro iis valoribus; sed in iis retenta est quinta nota, quam calculus exhibuerat,

cum

cum ea ter tantum occurreret in initio calculorum, & usui esset in capiendis summis, ac differentiis.

206. Ejus numeri II priores duæ lineæ continent log. 55, & compl. log. 56, tertia eorum summam = log. $\frac{55}{56}$. Tum sequentes 4 habent distantias focales h cum suis logarithmis. Singulis hisce logarithmis additur logarithmus lineæ tertiæ, & summæ notantur in postremis 4 lineis in columna logarithmorum: logarithmus lineæ 8 est summa linearum 3, & 4, logarithmus lin. 9 est summa lin. 3, & 5, & ita porro: harum summarum quæruntur in tabula logarithmorum numeri correspondentes, qui singuli notantur ad latus, & ii sunt valores distantiarum focalium H = 13,75; 20,62; 26,52; 31,43.

207. Ii ponuntur numero III, sed ibi appellantur itidem h, h', h'', h''', cum debeant applicari eidem formulæ valoris x numeri I pro calculo pertinente ad radios violaceos, qui habetur num. V, ut valores priores $h = 14$; 21; 27; 32 applicantur eidem formulæ pro radiis mediis. Idcirco commoda est positio numeri III in eadem columna cum V, in qua ejus usus occurrit.

208. Calculus numeri IV, & V exhibet 4 valores x pertinentes ad 4 lentes deductos ex valoribus p, h: singulæ e 4 partibus eorum loculamentorum respondent singulis lentibus. Prima utrobique continet 4 lineas, reliquæ tres quinas singulæ: hæ quatuor lineæ primæ partis, & postremæ quatuor cujusvis e sequentibus destinatæ sunt pro valoribus $p, h, p+h, x$: harum prima habet distantiam lentis ad eam pertinentis a præcedente, quæ addita valori x invento in postrema linea partis præcedentis exhibet novum valorem p pro ipsa. Illæ lentium distantiæ sumuntur ubique in iis loculamentis in directione contraria directioni radiorum advenientium, adeoque iis præmissum est signum negativum. Habita ratione signorum in reliquis valoribus positivis, vel negativis, prout conspirant cum directione ipsa radiorum eorundem, vel ipsi opponuntur, signum valoris x exhibet, ad quam plagam accipi debeat ejus valor respectu lentis ad efformandam hanc figuram juxta num. 189, & idem cum valore negativo distantiæ lentium exhibet signum valoris p æqualis eorum summæ.

209. In

209. In prima parte numeri IV habetur ex num. 191 valor DG $=-870,11=p$ in prima linea, in secunda $h=14$ ex num. I, in tertia $p+h$ summa negativa per subtractionem positivi minoris a negativo majore : prioribus est adnexus suus logarithmus ; postremo, qui fuerat denominator, complementum arithmeticum logarithmi. In quarta fit summa logarithmorum, cui ad latus adscribitur valor $x=14,23=$ DG respondens ei summæ erutus e tabulis, & positivus ob duo signa negativa in præcedentibus tribus terminis formulæ. Prima linea secundæ partis continet valorem D'D $=-23$ desumptum ex num. I, sed negativum, ut diximus, cujus summa cum positivo DG $=14,23=x$ lineæ superioris postremæ in parte prima, exhibet pro secunda linea valorem D'G $=-8,77=p'$. Cum eo, cum h', & $p'+h'$ invenitur eodem modo in postrema linea partis secundæ x': & inde patet progressus similis ad p'', x'', p''', x'''. Similis autem est methodus in numero V cum solo discrimine valorum h, qui pro eo sumuntur e num. III. Sic habentur num. IV, & V calculi indicati num. 195, & 196 subducti ope logarithmorum, qui deinde usum habent in reliquo calculorum progressu.

210. In sequentibus 4 loculamentis habentur, quæ pertinent ad aperturas ; adhibitis formulis numerorum 197, & 199. Num. VI supponitur DE $=1$. Hinc valor D'H evadit $=\frac{\text{D'G}}{\text{DG}}$. Pro ipso assumitur complem. log. DG ex linea 4 num. IV logarithmus D'G ex lin. 6. Factâ summâ, obtinetur in lin. 3 log. D'H, & ejus valor $=0,62$. Pro D''M debet is valor multiplicari per $\frac{\text{D''I}}{\text{D'I}}$: hinc linea 4 continet compl. log. D'I assumptum ex ejus log. lineæ 9 num. IV, linea 5 log. D''I ex 11 ipsius IV. Pro linea 6 fit summa præcedentium trium linearum log. D'H + compl. log. D'I + log. D''I, quæ in ipsa exhibet log. D''M, & ejus valorem 2,42. Is multiplicatus per $\frac{\text{D'''N}}{\text{D''N}}$ exhibet D'''P, quamobrem in linea 7, & 8 habentur compl. log. D''N, & log. D'''N ex linea 14, & 16 num. IV. Summa logarithmorum contento-

rum

rum in postremis tribus numeris exhibet in lin. 9 log. D'''P, & ejus valorem 0,47.

211. Eo pacto obtinentur semiaperturæ 4 lentium; 1; 0,62; 2,42; 0,47. Si eæ comparentur cum distantiis focalibus h numeri I = 14; 21; 27; 32; tertia 2,42 habet rationem maximam ad $h'' = 27$, cum sit ejus pars circiter $\frac{1}{11}$. Quare huic lenti tribuenda est apertura quantam ferre potest maximam. Si apertura sumatur dimidia distantiæ focalis; erit semiapertura D''M $= \frac{27}{4} = 6,75$. Omnes reliquæ augendæ erunt in eadem ratione valoris 2,42, quem habebat prius, ad hunc novum 6,75; adeoque debent priores valores singularum multiplicari per $\frac{6,75}{2,42}$. Id fit numero VII.

212. In prima ejus linea habetur logarithmus numeri 6,75 erutus ex tabulis, in secunda complementum logarithmicum valoris prioris D''M desumptum ex lin. 6 num. VI. Horum summa exhibet in lin. 3 logarithmum valoris DE, cum ejus valor præcedens = 1 habuerit logarithmum = 0. Is autem additus cum singulis logarithmis priorum valorum D'H, D'''P, existentibus in eadem columna in lineis 3, & 9 numeri VI exhibet hic in lineis 4 & 5 logarithmos novorum valorum earundem D'H, D'''P. Sic jam obtinentur 4 semiaperturæ utiles absolutæ lentium in lineis 3, 4, 1, 5 hujus numeri, quæ sunt 2,79; 1,72; 6,75; 1,32; adeoque aperturæ integræ utiles evadunt 5,58; 3,44; 13,5; 2,64.

213. Postrema apertura absoluta exhibet aperturam diaphragmatis, cujus dimidium TT' fuerat num. 199 $= \frac{D'''P \times TN}{D'''N}$. Ea obtinetur numero VIII. Prima ejus linea habet TD''' $= h''' = 32$, secunda D'''N cum suo complemento logarithmico eruto ex lin. 16 numeri IV, tertia TN earum summam cum suo logarithmo eruto e lin. 18 ejusdem numeri, quarta D'''P cum suo logarithmo, quæ habentur in lin. 5 numeri VII, quinta summam præcedentium trium, cujus logarithmi numerus 5,66 exhibet quæsitam TT', & ejus duplum 11,32 aperturam integram ejus diaphragmatis.

214. Num.

214. Num. IX obtinentur semiaperturæ respondentes colori violaceo extremo. Earum basis est valor absolutus primæ DE inventus num. VII, qui est communis omnibus coloribus. Is habetur in linea 1: reliqua omnia procedunt hîc cum litteris minoribus eodem pacto, quo num. VI cum majoribus, assumptis logarithmis valorum correspondentium ex num. V, ut pro illo ex IV. Habetur in lin. 2, & 3 compl. log. Dg, & log. $D'g$ ex lin. 4, & 6 numeri V. Horum summa cum præcedenti, nimirum summa omnium trium præcedentium exhibet logarithmum $D'h$, cujus valor ipsi respondens invenitur in tabulis 1,80. Tum lineæ 5, 6, 8, 9 continent compl. log. $D'i$, log. $D''i$, compl. log. $D''n$, log. $D'''n$ ex lineis 9, 11, 14, 16 numeri V. Linea 7 habet log. $D''m$, & 10 log. $D'''p$, quorum singuli sunt summæ trium immediate præcedentium. Hoc pacto habentur $D'h = 1,80$, $D''m = 6,75$, $D'''p = 1,06$.

215. Hi valores cum valoribus numeri VII exhibent ea, quæ pertinent ad distractionem colorum, & habentur numero XI. Sed e solo num. IV deducitur primo distantia oculi a lente postrema, quæ est in ejus postrema linea $D'''R = 7,47$. Deinde etiam deducuntur augmentum n, & campus c, quorum formulæ habentur num. 200, & calculus pro ipsis hîc num. X. Pro primo habetur ibi $\frac{DC \times D'''P}{DE \times D'''R}$, ubi valores $D'''P$, DE erui possunt tam e num. VI, quam e VII, cum in utroque habeant eandem rationem; sed melius est ipsos assumere ex VI, in quo supponitur $DE = 1$, adeoque remanet $\frac{CD \times D'''P}{D'''R}$. Habetur num. VI $D'''P$ in postrema linea, ex qua transfertur huc in lineam 2. Prima hîc habet log. CD e lin. 1 num. IV, & tertia compl. log. $D'''R$ ex ejus linea postrema. Summa eorum trium logarithmorum exhibet in linea 4 logarithmum augmenti n, quod evadit 55,16.

216. Formula pro campo erat $\frac{3438 \times 2\,DE}{CD}$; sed hîc valor DE debet desumi e num. VII, cum pendeat campus a tota apertura absoluta. Omisso 2 habetur dimidius campus, translato log. DE in

lineam 5 hujus numeri X e lin. 3 num. VII assumpto log. 3438 e tabulis, & compl. log. CD e lin. 1 hujus numeri ipsius X pro lineis 6, & 7. Eorum trium summa exhibet in linea 8 log. 11',03, cujus duplum est campus = 22',06.

217. Numero XI habetur primo quidem distractio colorum per differentiam angulorum D'''RP, D'''rp; tum lens, quæ si esset sola, exhiberet idem augmentum. Eorum angulorum tangentes sunt $\frac{D'''P}{D'''R}$, & $\frac{D'''p}{D'''r}$. In linea 1 habetur log. D'''P e postrema num. VII, in secunda compl. log. D'''R e 3 lin. X, in quarta log. D'''p e postrema num. IX, in quinta compl. log. D'''r e postrema numeri V. Summa linearum 1, & 2 exhibet in 3 log. tan. D'''RP, & summa 4, & 5 in 6 log. tan. D'''rp, qui anguli obveniunt 10°. 2'. 18", & 9°. 58'. 40". Eorum differentia 3'. 38" exhibet in linea 7 distractionem violacei minus refracti a medio magis refracto, cujus duplum 7'. 16" est in linea 8 distractio violacei postremi a primo rubeo.

218. Augmentum a lente unica habetur (num. 124) dividendo distantiam focalem objectivi per distantiam focalem ocularis. Hinc distantia focalis ocularis habebitur dividendo augmentum n per distantiam focalem objectivi. Habetur in lin. 9 log. 864 ex tabulis, in 10 compl. log. n e linea 4 num. 10. Eorum summa exhibet in lin. 11 logarithmum distantiæ focalis ejus lentis = 15,66.

219. Hæc pertinent ad tabulam exhibentem valores quæsitos. Sed si libeat determinare etiam pro ipsa lente æquivalente campum, & colores; id facile præstabitur. Si ipsi daretur apertura dimidia suæ distantiæ focalis; haberetur pro ipsa 7,83 : distantia autem objectivi ab oculari esset $864 + 15,66 = 879,66$, adeoque campus $\frac{3438 \times 7,83}{879,66} = 30'. 36''$. Separatio colorum esset (num. 61) $\frac{dm}{m-1} \times c(n+1)$, ubi pro radio medio, & violaceo $\frac{dm}{m-1} = \frac{1}{55}$ (num. 192), c dimidium campi, n augmentum. Hinc

Hinc ea distractio esset $\frac{15',30 \times 56,16}{55} = 15'.37''$, cujus duplum exhiberet distractionem violacei a rubeo 31'.14''. Formula distractionis $\frac{dm}{m-1} \times c(n+1)$ pro diversis distantiis a centro campi erit eadem posito c pro ea distantia; adeoque ipsa distractio proportionalis ei distantiæ, quæ idcirco in medio inter centrum, & marginem campi ipsius non erit nisi 15'.37''.

220. Determinatis eo pacto omnibus, quæ pertinent ad systema ocularium, primo loco se offert illud, de quo agimus, distractio colorum, quam inducit. Illa quidem inventa est (numer. 217) 7'.16'', dum in unica lente æquivalente est (num. 219) 31'.14''. Hæc combinatio plusquam corrigit distractionem colorum, & inducit oppositam, quæ est pars circiter quarta prioris; oportet corrigere hanc ipsam, quod infinitis modis præstari potest. De ea correctione agemus, post alias considerationes eorum, quæ pro eo systemate deduximus.

221. Augmentum 55 pro telescopio communi pedum sex est nimium, pro acromatico nimis exiguum. Fieri potest majus, vel minus servatâ ad sensum eâdem distractione colorum, & ratione inter aperturas utiles lentium minuendo, vel augendo in quapiam communi ratione omnes distantias focales omnium quatuor lentium ocularium: nam imminutâ in eadem ratione in fig. 10 etiam distantiâ DF primæ lentis a foco objectivi, & omnibus intervallis lentium, habebitur figura prorsus similis priori ab FG usque ad PR, adeoque radii prodibunt itidem paralleli: in figura autem 11 mutatio distantiæ DC erit exigua respectu totius; adeoque DG adhuc parum differet a distantia focali lentis primæ. Sed ratio anguli DGE ad DCE, quæ determinat augmentum factum a prima lente, evadet major, vel minor in eadem ratione, in qua erit major, vel minor ratio DC manentis ad sensum ad DG mutatam, nimirum in qua erit minor, vel major distantia focalis primæ lentis. Reliquæ autem lineæ, & anguli servabunt inter se rationem eandem, adeoque angulus postremus D'''RP ad primum DGE servabit itidem rationem eandem priorem; hinc etiam aug-

mentum in egressu e postrema lente erit in eadem ratione majus, vel minus eo, quod habebatur prius.

222. Sed si fiat hæc mutatio distantiarum omnium in data illa ratione; mutabuntur in eadem omnes etiam aperturæ utiles ocularium, cum tertia debeat respondere suæ distantiæ focali, & reliquæ omnes ad ipsam habere rationem eandem, ac prius. Hinc mutabitur & campus in eadem ratione illa communi, cum manente ad sensum DC, debeat mutari angulus DCE in eadem ratione cum DE. Campus 22' in hac combinatione evasit nimis exiguus pro telescopio pedum 6, cum vix contineat $\frac{2}{3}$ diametri lunaris. Fuisset adhuc minor, si lens tertia haberet aperturam propositam numero 187, quæ erat tantum linearum 11, & hæc tota fuisset utilis. Reliquæ, & campus debuissent imminui in ratione hujus aperturæ 11 ad assumptam (num. 212) 13,5, adeoque campus provenisset tantummodo 18'. Factâ etiam aperturâ lentis tertiæ 13,5, adhuc evasit multo minor, quam esset campus unicæ lentis, qui est 30'.36" (num. 219), & qui esset idem adhibitis tribus lentibus æqualibus huic, dum ratio potissima, vel etiam unica multiplicandi oculares, debet esse ampliatio campi, quæ per ejusmodi multiplicationem obtineri possit pari augmento. Adjunctâ lenti tertiæ quartâ æquali, posset haberi duplo adhuc major, nimirum 61 itidem cum eodem augmento, adeoque fere triplo major, quam per hanc combinationem ocularium.

223. Causa ejus diminutionis campi potissima est nimia vicinia punctorum G, I respectu lentis secundæ B'B', & nimia distantia D'D" secundæ a tertia, quod effecit tanto reliquis majorem semiaperturam D"M, respectu primæ unitatis assumptæ = DE, unde effectum est, ut attributo ipsi D"M eo numero linearum, quem permittit distantia focalis h'', minor linearum numerus habitus sit pro ipsa DE, & idcirco contraxit primam DE, a qua campus pendet immediate. Posset augeri campus auctâ distantiâ DD', & imminutâ D'D", quo pacto evaderet D"M multo minus inæqualis respectu reliquarum. Sed tum omnis fere calculus deberet iterum institui ad determinandum augmentum, & distractionem colorum. Progressus superioris calculi docet saltem, quæ mutatio institui debeat

debeat ad reddendam minus imperfectam combinationem propositam.

224. Hæc tanta inæqualitas aperturarum ostendit, quam magna pars reliquarum aperturarum sit inutilis. Aperturæ propositæ (num. 187) sunt 9; 13; 11; 12; dum hìc obvenerunt (numer. 212) 5,58; 3,44; 13,5; 2,64. Prima ibi assumpta est fere duplo major, secunda fere quadruplo, quarta plusquam quadruplo major, quam tertia ferre posset: ipsa autem tertia multo minor, quam ferre posset ejus distantia focalis. Calculorum superiorum ingens est usus etiam ad deprehendendum, quid fieri possit circa aperturas. Si eæ sint majores justo; id nihil nocet: remanet tantummodo earum magna pars inutilis: adhuc tamen ubi agitur de quodam systemate ocularium pro certa quadam longitudine distantiæ focalis objectivi, præstat per examen hujus generis inquirere in aperturas: nam eo pacto fieri possunt aperturæ paulo majores justo, evitato labore inutili, quo poliantur partes superficierum, quæ inutiles manere debeant, & vero etiam crassitudinem tubi continentis systema ocularium majorem necessariâ.

225. Apertura diaphragmatis TT′ hìc obvenit (num. 213) 11,32, scilicet $11\frac{1}{3}$. Propositum fuerat (num. 187) linearum 7. Id erat nimis exiguum etiam respectu illius aperturæ lentis tertiæ, quæ ibi erat 11. Vel ex ipsa figura constat, ejus aperturam debere esse non adeo minorem, quam sit apertura lentis præcedentis, nimirum minorem tantummodo in ratione TN ad D″N, quæ hìc est (numer. VIII, & IV) ratio 41,74 ad 49,74; sive proxime 4 ad 5. Hinc aperturæ 11 lentis tertiæ poterat respondere apertura diaphragmatis 9, & apertura 7 relinquebat utiles tantum 9 lineas lentis primæ, quo pacto campus deberet esse in ea combinatione adhuc minor. Is invenitur factis, ut apertura diaphragmatis inventa 11,33 ad propositam 7, ita campus 22′ inventus (numer. 216) ad novum, qui remaneret 13′, 36″. Campus igitur in proposita combinatione erat prorsus intolerabilis ob exiguitatem.

226. Diaphragma majus justo est prorsus inutile, ut patet ex ipsa figura, in qua si puncta T′t jaceant ultra postremos radios

MN,

MN, *mm*, radii omnes transeunt per aperturam tanquam si ipsum diaphragma non adesset. Debet esse tantillo arctius, quam requirat calculus hic institutus ex aperturis ocularium; quia in puncto T fig. 11, quod respondet puncto N fig. 10, non uniuntur simul accurate omnes radii, ne homogenei quidem provenientes ab eodem puncto objecti, at aberratio est paullo major extra axem in T', adeoque distinctio in margine campi erit aliquanto minor debitâ, si pars tantummodo radiorum provenientium a punctis objecti sitis in extremo campo transeat, parte interceptâ a margine diaphragmatis. Si fiat ea apertura multo arctior; id nihil obest distinctioni: tantummodo minuuntur omnes aperturæ utiles, & campus in eadem ratione, in qua minuitur apertura diaphragmatis infra terminum respondentem aperturis lentium. Idcirco vel oportet minuere nonnihil aperturam diaphragmatis, & campum, vel augere nonnihil aperturam ejus lentis, quæ habet totam aperturam utilem, ad conservandum campum integrum, qui determinabitur a diaphragmate.

227. Hæc combinatio habet etiam majus incommodum a pulveribus adhærentibus primæ lenti, quam systema unicæ lentis, vel trium æqualium, quæ idem augmentum exhibeant; ea ibi esset totius distantiæ focalis, adeoque linearum (num. 118) $15\frac{1}{3}$; dum hic non habentur nisi 6 (num. 190). Si corrigantur ibi colores, adhibitis pro tertia lente binis æqualibus conjunctis; ea distantia evadit duplo minor (num. 150) sed adhuc major, quam in hoc systemate, nimirum fere 8, dum hic habetur 6. In ea combinatione 4 lentium æqualium, quarum postremæ duæ conjunctæ ita, ut æquivaleant unicæ habenti distantiam focalem dimidiam, augmentum esset duplo majus, quam in lente unica ejusdem distantiæ focalis cum campo eodem, adeoque augmentum $=110$ cum campo 31' (num. 219). Quare ex utroque capite augmenti, & campi illa combinatio esset melior hac: esset autem melior etiam ob minorem longitudinem totius systematis. Nam ibi haberetur in fig. 3 in FG, & PR dimidium distantiæ focalis $15\frac{1}{3}$, in GK, & KP duplum, adeoque in FR $5\times15\frac{1}{3}=78\frac{1}{3}$. Hic in fig. 11 in FD 6, in DD' 23, in D'D'' 44, in D''D''' 40, in

in D'''R $7\frac{1}{3}$, adeoque in FR $120\frac{1}{3}$. Si quis velit in eo systemate 4 lentium æqualium destruentium colores idem augmentum tantummodo 55; tum satis erit adhibere omnium distantias focales duplo majores, nimirum $31\frac{1}{3}$. Erit quidem duplo major etiam longitudo totius systematis, adeoque $156\frac{2}{3}$. Sed istam productionem compensabit duplo major distantia primæ lentis a foco objectivi, quæ evadet $15\frac{2}{3}$, & campus, qui fieri poterit duplo major, nimirum 62'; dum hîc non pertingit nisi ad 22', & si adhibeatur apertura diaphragmatis proposita, nonnisi ad 13'.36". (num. 225).

228. Accedit, quod hæc combinatio relinquit (num. 217) distractionem colorum = 7'. 16", quam illa corrigit. Hi colores corrigi possunt mutatâ aliquâ e lentibus, vel e lentium distantiis, & problema, quo quæratur mutatio eam correctionem exhibens, est admodum indeterminatum, ut patet. Hîc retentis tribus prioribus lentibus, & earum distantiis, quæremus mutationem inducendam in solam postremam, quæ mutatio corrigat colores: methodus fuse exposita huc usque inserviet pro revocando ad trutinam quovis proposito systemate 4 lentium, & corrigendis ejus coloribus.

229. Pro obtinenda hac correctione colorum determinandum erit primo punctum S figuræ 11 Tab. III, in quo coeunt directiones filorum NP, *np* prodeuntium a lente penultima, & angulum NS*n*, quem efformant in ipso congressu. Utrumque determinabitur ope lineolarum M*m*, P*p*, quas exhibent differentiæ aperturarum, quæ habentur in numeris tabulæ VII, & IX. In hoc systemate casu fortuito obvenit D''*m* in posteriore = 6,75 prorsus ut D''M in priore, quod ostendit, concursum eorum filorum fieri in ipso appulsu ad tertiam lentem B''B'' coeuntibus ibi punctis M, *m*. Logarithmus D''*m* in lin. 7 numeri IX est paullo minor, quam D''M in lin. 1 num. VII, quod indicat D''*m* paullo minorem, & cum itidem D'''*p* in linea postrema num. IX sit minor, quam D'''P in postrema numeri VII; patet inde, concursum fieri paullo ante appulsum ad B'''B'''. Sed cum sit ita exiguus ille defectus logarithmi, ut numeri non differant ne per unam quidem

dem centesimam; poterit assumi hic Mm pro nulla, & punctum S ut congruens cum M.

230. Si haberetur aliqua differentia sensibilis ipsarum $D''M$, $D''m$, uti habetur differentia $D'''P = 1,32$ (num. VII) a $D'''p = 1,06$ (num. IX); deberent assumi eæ differentiæ, ut est $Pp = D'''P - D'''p = 0,26$: & si altera earum esset positiva, altera negativa; punctum S caderet inter M, & P: si essent ambæ positivæ, vel ambæ negativæ; caderet in punctum aliquod rectæ MP productæ ad partem minoris ex iis binis differentiis. In primo casu fieret ut summa, & in secundo ut differentia eorum valorum ad Pp, ita PM, pro qua assumi potest $D'''D''$, ad $D'''S'$. Tum pro angulo PSp fieri posset ejus sinus $\frac{Pp}{PS}$, vel $\frac{Pp}{D'''S'}$ consideratâ PS, ut perpendiculari ad $B'''B'''$, ad quam parum admodum inclinatur, & habitâ $D'''S'$ pro æquali ipsi PS. Is erit in casu præsenti $\frac{0,26}{40} = 0,0065$, cui respondet angulus $22'.2''$.

231 Eadem poterant inveniri etiam sine Pp per Mm, & Nn. Si enim concipiatur nN' parallela BB occurrens MN in N', erit $D''N : D''M :: Nn : nN' = \frac{D''M \times Nn}{D''N}$. Tum per nN', & Mm inveniretur punctum S ut prius, & habita nN' pro perpendiculari ad SN, a qua parum abludit, cum ipsa SN parum abludat a parallelismo cum axe ob exiguitatem rectæ $D''M$ respectu distantiæ NM, anguli sinus esset $\frac{nN'}{Sn}$. Hic est $Sn = D''n$, adeoque sinus anguli $\frac{D''M \times Nn}{D''N \times D''n}$. Habetur logarithmus valoris $D''M$ in lin. 1 num. VII $= 0,829304$, logarithmi $D''N$, $D''n$ in linea postrema partis tertiæ numeri IV, & V, quorum complementa $8,303306$, & $8,323495$, & cum sit $Nn = D''N - D''n = 49,74 - 47,48 = 2,26$; erit log. $Nn = 0,354108$. Hinc longarithmus ejus sinus erit $7,756273$, & angulus $= 22'.13''$; differentia exigua a valore priore provenit a fractionibus minoribus neglectis; hinc pro eo angulo accipiemus $22'$, quæ erit ibi distractio violacei a medio, adeoque violacei a rubeo esset $44'$.

232. So-

232. Solutio expeditissima omnium erit similis ei, quæ adhibita est in fig. 7 num. 94, & 102, supponendo nimirum focum ulteriorem lentis novæ in concursu cum axe radiorum homogeneorum refractorum per lentem præcedentem, quo pacto novus concursus fit in dimidia distantia, refractio æquatur angulo præcedentis concursus jam dato, & angulus novus cum axe, qui demum determinat augmentum, evadit ejusdem duplus. Sed quoniam ex tabula jam calculata habemus viam omnem utriusque fili colorati, utemur concursu fili violacei cum axe ipso in n, quod punctum sit focus ulterior radiorum mediorum lentis novæ B'''B'''. Sit SS' perpendicularis axi, & ducatur SD''', producaturque donec occurrat rectæ PR itidem productæ in O. Si alter radius medius deveniret per Sp; abiret itidem ad O punctum dirigens radios medios refractos a B'''B''' respondens puncto S dirigenti radios incidentes: & ut recta pr sit parallela PR, debebit angulus POp esse æqualis angulo Opr, qui angulus est differentia refractionum fili medii, & violacei devenientium simul per Sp respondens refractioni npO fili medii. Ea differentia erit $\frac{1}{55}$ ipsius npO, qui erit æqualis angulo mnD''; quia si pO occurrat axi in r'; convergentia radiorum tendentium ad focum n lentis B'''B''' fiet ad distantiam $D'''r$ dimidiam $D''n$, & idcirco angulus npr' erit proxime $= pnr' = D''nm$.

233. Porro tangens anguli $D''nm = \frac{D''m}{D''n}$ habetur habitis $D''m$, & $D''n$ ex num. IX, & V. In priore habetur (lin. 7) log. $D''m = 0,829104$, e posteriore eruitur (lin. 14) compl. log. $D''n = 8,323495$, quorum summa $9,152599$ est tan. $8^\circ.5' = 485'$, & proinde ob $\frac{dm}{m-1} = \frac{1}{55}$ pro filo medio collato cum rubeo distractio $Opr = POp$ est $= \frac{485'}{55} = \frac{97'}{11}$. Quare is angulus erit ad distractionem corrigendam $PSp = 22'$ (num. 231), ut $\frac{97}{11}$ ad 22, sive ut 97 ad 242: ea erit proxime ratio Sp ad pO, sive proxime ratio SD''' ad D'''O. Jam vero in formula $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$

applicata ad lentem B'''B''' pro radiis mediis, qui concipiantur advenientes per rectas SP, Sp, SD''', erit D'''O $= x$, SD''' accepta cum signo negativo $= p$, D'''$n = h$. Hinc $97 : 242 ::$ SD''' $= -p :$ D'''O $= x = -\frac{242p}{97}$, & $\frac{1}{x} = -\frac{97}{242} \times \frac{1}{p} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$, adeoque $\frac{1}{h} = -(\frac{97}{242} + 1) \times \frac{1}{p} = -\frac{339}{242} \times \frac{1}{p}$, sive $-p = \frac{339h}{242}$, & S'D''' + D'''$n = -p + h = (\frac{339}{242} + 1)h = \frac{581h}{242}$, $h = \frac{242 D''n}{581}$. Abeunte S' in D'', evadit S'n = D''n = 47,48 (num. V), adeoque fit D'''$n = h = \frac{242 \times 47{,}48}{581} = 19{,}78$, & D''D''' = D''$n$ − D'''n = 47,48 − 19,78 = 27,70.

234. Quare lens quarta, quæ habeat distantiam focalem 19,78, & distet a tertia per 27,70 destruet distractionem colorum. Porro hic illud perquam commode accidit, quod in fig. 10 distantia D''N lentis tertiæ a foco citeriore quartæ remanet ad sensum eadem, quæ prius. Fuerat (num. 190) = 8: est autem hic = 27,70 − 19,78 = 7,92. Inde fit ut omnes calculi figuræ 10, & 11 non accipiant ex mutatione ejus lentis nisi exiguam perturbationem usque ad ipsam, quam acciperent multo majorem, si ea distantia obvenisset multo magis diversa: si ea obvenisset major; distantia DF primæ lentis a foco objectivi obvenisset minor cum majore incommodo a pulveribus. Diversa magnitudo FD induceret discrimen æquale in CD, quod afferret discrimen aliquod in valoribus omnibus figuræ 11; sed id discrimen esset exiguum, cum ob longitudinem CD ingentem respectu distantiæ focalis primæ lentis jam DG parum excedat eam ipsam distantiam. Potuisset obvenire hæc correctio inutilis ex aliis capitibus, ut si obvenisset distantia focalis novæ lentis nimis exigua: poterat etiam obvenire positio puncti S ejusmodi, ut redderet impossibilem eam correctionem sine mutatione aliquâ inductâ in distantias focales, vel distantias mutuas trium lentium præcedentium.

235. Mutatio ejus lentis inducit mutationem in augmentum, ac in aperturam ipsius, & distantiæ oculi ab ipsa. Augmentum red-

redditur majus in ratione valoris novi, quem acquirit angulus $D'''RP$, ad eum, quem habebat prius. Fuerat (num. XI) $= 10°. 2'. 18'' = 602', 3$, & evadit $= D'''rp = 2D'''np = 2D''nm = 16°. 10'$ (num. 233) $= 970'$. Hinc factis $602,3 : 970 :: 55,16$ augmentum vetus (num. X) : 89; hoc erit augmentum novum. Apertura habebitur factis ut $D''N = 49,74$ (num. IV) ad novum valorem $D'''N = D''N - D''D''' = 49,74 - 27,70 = 22,04$, ita $D''M = 6,75$ (num. VII) ad novum valorem $D'''P = 2,97$, cujus duplum 5,78 erit nova apertura ejus lentis. Cum ea sit multo minor, quam dimidia ejus distantia focalis; relinquit liberas reliquas, quæ fuissent minuendæ, si ipsa fuisset major justo. Distantia oculi erit æqualis novo valori $D'''R$, qui erit dimidius $D'''N$, adeoque proxime $= 10$.

236. Si augmentum 89 sit nimis magnum; poterit juxta numer. 221 reduci ad illud idem 56 auctis omnibus distantiis tam focalibus, quam mutuis lentium in ratione 56 ad 89. Tum omnia melius cederent: nam evaderet major in eadem ratione etiam distantia primæ lentis a foco objectivi: fuerat $= 6,17$: fieret 9,98 cum minore incommodo a pulveribus: campus, qui fuerat 22', auctus in ratione eâdem fieret 35'. Ita hæc ipsa ocularium combinatio rite correcta posset evadere admodum utilis.

237. Sed aliæ multo plures inveniri possunt ope expressionis generalis, quæ contineat æquationem indeterminatam pro correctione præstanda per mutationem lentis quartæ corrigentis colores inductos a tribus præcedentibus permanentibus: ea haud difficulter invenietur inductis binis indeterminatis, quarum una sit distantia focalis lentis quartæ, quam hic pro h''' appellabimus itidem simpliciter h, altera sit distantia $S'D'''$ ipsius a puncto S' invento, nimirum hic $D''D'''$, quæ distantia dicatur z. Dicatur autem angulus $D''nm = a$, $NSn = PSp = c$, distantia $S'n = D''n = b$; & erit $D'''n = b - z$: in formula vero generali $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$ fit $\frac{1}{x} - \frac{1}{p} = \frac{1}{h}$, adeoque $h = \frac{px}{p-x}$, sive $h : p :: x : p - x$. Porro applicando ipsam ad lentem $B'''B'''$ respectu radiorum me-

diorum, qui concipiantur convergentes ad n, est $p = D'''n = b - z$, $x = D'''r$, adeoque $p - x = rn$: sumptâ autem pr pro $D'''r = x$; erit $h : b - z :: pr : rn$ (nimirum ob angulos exiguos acutos ad r, & n, proportionales suis sinubus, adeoque lateribus pr, rn) :: $pnr = D''nm = a : npr = \frac{a(b-z)}{h}$. Hinc angulus $POp = rpO = \frac{a(b-z)}{55h}$, qui valor erit ad angulum $PSp = c$, ut SD''', sive $S'D''' = z$, ad $D'''O = \frac{55chz}{ab - az}$. Porro in formula $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$ applicata ad eandem lentem respectu radiorum mediorum, qui concipiantur advenientes per rectas SP, Sp, SD''' erit $p = - D'''S = - z$, $x = D'''O$. Quare erit $\frac{ab - az}{55chz} = \frac{1}{h} - \frac{1}{z}$, sive $ab - az = 55cz - 55ch$; & $(55c + a)z - 55ch = ab$.

238. Si in hac æquatione fiat $D'''n = h = b - z$, erit $z = b - h$, adeoque $55cb - 55ch + ab - ah - 55ch = ab$, sive $55cb = ah + 110ch$, & $h = \frac{55cb}{a + 110c}$. Porro est hic $a = D''nm =$ (num. 233) $485'$, $b = D''n = 47{,}48$, $c = PSp = 22'$, adeoque evadit $h = \frac{55 \times 22 \times 47{,}48}{485 + 110 \times 22} = \frac{47{,}48 \times 1210}{2905} = \frac{47{,}48 \times 242}{581}$, ut numero 233. Sed si libeat conservare eandem lentem; tum manente $h = 32$, qui num. I fuerat valor h''', erit $z = \frac{ab + 55ch}{a + 55c} = \frac{61747{,}80}{1695} = 36{,}43$. Collocanda esset lens quarta distantiæ focalis 32 in distantia 36,43 : distantia D''N in fig. 10 evaderet $= 36{,}43 - 32 = 4{,}43$. Id quidem amandaret puncta G, & F ad majorem distantiam a lente BB, quod prodesset reddendo pulveres ipsi affusos minus sensibiles; sed punctum I accederet multo plus ad lentem tertiam B''B'', quod e contrario redderet magis sensibiles pulveres huic adhærentes. Illa elongatio puncti F a prima lente turbaret nonnihil calculos figuræ 11 augendo CD, & diminuendo DG; sed id aug-

men-

mentum esset exiguum, adeoque parum noceret correctioni colorum. Facile autem inveniretur hujus combinationis augmentum, apertura utilis ejus lentis, & diaphragmatis, ac omnia cætera methodo adhibitâ pro priore ejus distantia a lente tertia.

239. Verum ope ejusdem formulæ licebit etiam conservare distantiam eandem D''N figuræ 10 ad conservandos accurate omnes calculos utriusque figuræ pertinentes ad objectivum, & ad omnes reliquas lentes, & generalius poterit assumi in eadem figura 10 valor quivis pro D''N. Fiat is valor $= e$, & habebitur in eadem $D''D''' = D''N + ND''' = e + h$, qui valor in fig. 11 erit $= z$. Posito hoc valore in formula numeri 237 fiet $(55c + a)(e + h) - 55ch = ab$, sive $55ce + ae + ah = ab$, & $h = b - e - \frac{55ce}{a}$. Posito pro e valore 8, habetur $h = 47,48 - 8 - 19,95 = 19,53$, valor proximus illi 19,78 invento num. 233, qui exhibuerat (num. 234) valorem D''N figuræ 10 adeo parum diversum ab hoc $e = 8$, nimirum 7,92.

240. Substituto pro e valore minore, quam 8, removeretur punctum F fig. 10 a lente prima BB, quod prodesset nonnihil minuendo incommodum proveniens a pulveribus: sed si N fig. 10 admoveretur aliquanto magis lenti tertiæ; accederet ad ipsam etiam punctum I, quod redderet sensibiles pulveres adhærentes lenti tertiæ B''B'', ut diximus num. 238. Seligenda esset una e combinationibus, quæ utrique mederetur. Posset autem seligi etiam lens brevioris distantiæ focalis ad habendum augmentum majus, quod deinde permitteret substitutionem omnium lentium habentium distantias focales majores cum augmento campi. Sed hic eam perquisitionem omittimus, quam instituere poterit, qui velit, cum aliis mutationibus inductis in lentes præcedentes, ac in earum distantias, quæ poterunt exhibere combinationes multo commodiores, potissimum auctâ distantiâ DD', & imminutâ D'D'', quo pacto minueretur nimia inæqualitas semiaperturarum D'H, D''M, quæ est potissima ratio exiguitatis campi provenientis in hisce combinationibus. Mutatio autem radiorum sphæricitatis singularum lentium, quæ retineret distantias focales easdem, potest ad-

adhiberi ad corrigendos errores sphæricitatis, vel saltem minuendos, nihil turbatâ correctione colorum, quæ pendet a solis distantiis focalibus, qua de re agemus in capite sequenti.

241. Satis erit hìc exposuisse methodum, qua possit calculo simplici, & expedito inquiri in combinationem quatuor ocularium datam quamcunque, determinando viam radiorum, augmentum, distantias focorum a lentibus, aperturas, campum, colores, & tradendo methodum, qua possit destrui separatio colorum extremorum inducta ab ocularibus, quibus conjunctis, separatio intermediorum facta ab ocularibus habentibus tanto breviores distantias focales non erit sensibilis oculo transpicienti. Seligi poterunt combinationes, quæ videbuntur omnium commodissimæ, tradendæ artificibus post varia tentamina, & post alias considerationes, quas proponemus in eodem sequenti capite, ubi apparebit, quam idonea sit ea, quam indicavimus in adnotatione ad numerum *166*.

242. Interea addemus hìc alia duo pro complemento hujus capitis. Primo quidem methodus hìc adhibita pro lentibus ex eadem materia potest applicari lentibus constantibus ex materia utcumque diversa. Satis est pro inventione distantiæ focalis radiorum violaceorum ex foco mediorum adhibere pro quavis substantia suum valorem $\frac{dm}{m-1}$, qui hìc adhibitus est $\frac{1}{55}$ pro omnibus lentibus, assumptâ itidem parte $\frac{1}{55}$ refractionis radii medii pro distractione violacei ab ipso. Is valor esset assumendus major pro flint, & multo major pro strass, pro illo circiter $\frac{1}{36}$, pro hoc $\frac{1}{27}$. Hæc libertas mutandi substantias, & eas diverso modo combinandi inter se, inducit novam indeterminationem, quæ usui esse potest ad evitandum melius aliud quoddam vitium ocularium, de quo agemus in capite sequenti.

243. Deinde notandum illud, valorem $\frac{dm}{m-1}=\frac{1}{55}$ hìc adhibitum esse eum, quem habere solent vitra communia: sed quoniam etiam ipsa vitra communia habent aliquod discrimen in qualitate refractiva, & distractiva; valores inventi non erunt penitus accurati. Essent multo accuratiores, si determinarentur accurate ii va-

valores in vitris adhibendis, quod quidem est multo magis opportunum, ubi agitur de flint, & necessarium omnino, ubi de illo, quod appellavimus strass, pro efformandis ocularibus acromaticis: nam in diversis flint Anglicanis invenitur itidem discrimen, & sæpe non ita exiguum inter eorum vires refractivas, & distractivas, maximum autem occurrit in iis, quæ habent multo plus admixtum plumbi, inter quæ numeratur ipsum strass. Verum ne tum quidem haberetur accuratio omnimoda, quia in hisce calculis non est habita ratio erroris figuræ sphæricæ, & crassitudinis lentium, & quia habiti sunt pro æqualibus nonnulli anguli, & plures lineæ, in quibus non habetur æqualitas accurata: accedit illa separatio colorum intermediorum conjunctis extremis, minor quidem, sed tamen aliqua. Accuratio multo major haberi posset, adhibendo, ut innuimus etiam num. 173, methodum expositam in postremo supplemento Opusculi II Tomi præcedentis, persequendo nimirum vias singulorum radiorum, primi rubei, & postremi violacei, incidentium tam prope centrum, quam in marginem aperturæ, post transitum per singulas superficies: sed calculus numericus evaderet nimis prolixus: & aliunde exigui errores, qui supersunt, minus nocent effectui ocularium, quam objectivi, ob multo breviorem viam radiorum ab una lente oculari ad aliam, quam ab objectivo ad ejus focum. Præterea quod pertinet ad errores refrangibilitatis, qui inducunt colores, ii post combinationes determinatas per methodos traditas non nimis abludentes ab exactis multo facilius poterunt corrigi ab ipso Artifice per motum, de quo jam toties injecta est mentio, lentis ultimæ respectu penultimæ, imminutâ deinde confusione per motum alterum totius systematis ocularium respectu objectivi. Longa observationum series melius, & facilius corriget ipsas regulas generales, quas theoria relinquit incorrectas, quam longa series calculorum.

244. Progressus, quo usi sumus pro combinatione quatuor lentium, adhiberi potest prorsus idem pro quocunque ipsarum numero. Dato systemate quovis potest eodem modo inveniri ejus positio respectu objectivi, & quantitas colorum residua continuando figuras 10, & 11. In priore incipiendo a lente postrema, ex

qua

qua radii provenientes ab unico puncto objecti debeant prodire paralleli, gradatim ibitur ad lentes præcedentes usque ad primam ope formulæ $x = \frac{ph}{p+h}$, invento pro quavis lente valore x ex p, & h, invenitur p lentis sequentis ex valore x præcedentis, & distantia lentium a se invicem. Inventis eo pacto omnibus x, & p, inveniuntur semiaperturæ omnes, & inde postremi anguli filorum medii, & violacei cum axe, quorum differentia exhibet distractionem colorum, ac methodo adhibita in superiore paragrapho invenitur augmentum, & campus.

245. Eodem itidem modo inveniri potest ope lineolarum Pp, Mm in fig. 11 punctum S, & angulus NSn, quem in ipso continent bina fila medium, & extremum, nimirum distractio, quæ habetur in egressu a lente penultima, qua distractione inventâ invenietur ejus correctio per solam mutationem pertinentem ad lentem postremam. Verum ea omnia, uti diximus, non sunt penitus accurata, & debet accedere ad majorem ocularium perfectionem correctio, vel saltem imminutio errorum sphæricitatis necessaria etiam ipsa, ad quam jam progrediemur in capite sequenti.

CAPUT II.

De incommodis ortis ab errore figuræ sphæricæ tam objectivi, quam ocularium, & remediis.

1. ARGUMENTUM hìc propositum præbet locum perquisitionibus pluribus, quarum pleræque sunt admodum complicatæ, quæ nimis longam, & difficilem tractationem requirunt. Omissis quam plurimis, quæ vel nondum satis digesta, vel ne tentata quidem persequar fortasse alibi, & olim proferam, exhibebo hìc præcipua quædam, quæ usum habere possunt egregium pro quibusdam combinationibus particularibus, potissimum ad corrigendum vitium, quod ab indebita combinatione superficierum exhibentium eandem datam distantiam focalem, & eadem vitia, vel remedia colorum, oritur in telescopiis, quæ si campum habeant, & augmen-

mentum aliquanto majus sine ejus vitii correctione, deformant objecti imaginem incurvando ejus lineas rectas: id enim vitium provenit, ut videbimus inferius, ab errore figuræ sphæricæ ocularium, qui quidem error corrigi potest, vel saltem magna ex parte diminui ita, ut curvatura sensum oculi effugiat.

2. Cum ejus vitii remedium non ita pendeat a natura vitrorum, ut exigat ea, quæ habent multo majorem vim distractivam, & admodum difficulter inveniuntur satis homogenea, & pura, possint autem, ut vidimus in capite superiore, etiam per idoneam combinationem ocularium e vitro communi tolli colores illi, quos ipsæ pariunt male dispositæ; erit operæ pretium ita agere de ejus erroris remedio, ut applicari possit etiam objectivo composito e binis lentibus constantibus eodem vitro communi. Quoniam, ut sæpe jam monui in Tomo I (*), error figuræ sphæricæ multo majorem vim habet ad impellendas oculi fibras, quam pro comparatione ejus diametri ad diametrum erroris diversæ refrangibilitatis determinatâ a Newtono, quæ Opticos ante Dollandianum inventum absterruit ab eo adhibendo pro objectivis communium telescopiorum; sperandum est sane non exiguum additamentum ad ipsorum perfectionem, si adhibeatur pro ipsis id remedium, potissimum si accedant, quæ in hoc Opusculo proponimus pro correctione colorum provenientium ab ocularibus, & curvaturæ linearum rectarum objecti in margine. Telescopia Dollondiano more elaborata habent objectivum ita compositum, ut id corrigat errorem tam diversæ refrangibilitatis, quam figuræ

(*) Sæpe hic occurret mentio hujus excessus ejus vis, & ipsius effectus: fundamentum habetur in dissertatione Viennensi tertia, quam etiam idcirco hic exhibebo in hujus Opusculi supplemento, omissis, vel mutatis admodum paucis, correctis omnibus. Viennenses appello quinque e veteribus meis dissertationibus pertinentibus ad Dioptricam, quæ simul prodierunt impressæ Viennæ in Austria anno 1767, quarum mentionem injeci pluribus vicibus in Tomo præcedente, ac promisi reimpressionem hujus tertiæ pro hoc Tomo, & id etiam idcirco, quod in ea editione facta me absente irrepserunt errores complures, ipsius autem impressionis exemplaria extra Germaniam sunt admodum rara, ut idcirco passim ignoretur compertum, quod ibi continetur, & est omnino magni momenti respectu theoriæ telescopiorum.

sphæricæ: præstant illa quidem plurimum communibus, quæ habent objectivum simplex obnoxium utrique errori: attribuitur is effectus fere soli correctioni primi erroris, a quo derivatum est ipsum illud nomen *acromatici* a Græco vocabulo, quod exprimit privationem colorum. Quid si magna ex parte is proveniat a correctione erroris secundi? Experientia docebit, quid ea de re judicandum sit: theoria nihil determinabit, quæ nimirum determinare non potest magnitudinem ejus partis circelli, per quem diffundit radios provenientes ab unico objecti puncto diversa refrangibilitas, quæ pars sensibilem actionem exercet in oculum, ad circellum, per quem ii diffundantur ab errore figuræ sphæricæ: in hujus circelli peripheria vis luminis excrescit in infinitum ubique, dum id in circello diversæ refrangibilitatis non accidit nisi in unico centro: longitudo illius peripheriæ habet ad illud centrum rationem infinitam, quod videtur indicare, nonnisi exiguam esse partem hujus secundi circelli centro proximam, quæ exerceat in fibras oculi vim satis sensibilem respectu vis impressæ a margine prioris.

3. Præterea, ut toties jam diximus, objectiva illa composita, quæ appellantur acromatica, non habent id nomen, nisi improprie, cum non conjungant accurate radios omnes heterogeneos digressos ab eodem puncto objecti, sed binos tantummodo: telescopia autem multo minus id nomen promerentur, nisi accedat idoneum systema ocularium, de quo nihil haberi solet apud eos, qui de telescopiis acromaticis agunt, & a quo maxime pendet exclusio colorum, qui apparent in veteribus telescopiis dioptricis communibus. Quamobrem systema lentium tam objectivarum, quam ocularium constantium ex eodem vitro communi, quod corrigat errorem figuræ sphæricæ objectivorum, & colores provenientes ab ocularibus, corrigendo simul errorem figuræ sphæricæ ocularium ipsarum, videtur æquivalere saltem magna ex parte systemati objectivi compositi ex vitro communi, & flint, quod per se ipsum non excludit colores a telescopio, & non corrigit nisi ex parte eos binos errores respectu sui ipsius. Hinc hæc theoria videtur etiam facere satis quæstioni propositæ ab Academia

Pa-

Patavina pro præmio anni 1781 hisce terminis : *Ritrovare un sistema di lenti tanto obiettive, che oculari (eseguibili da buoni artefici) per formare canocchiali acromatici con vetro, o cristallo d'una sola pasta, facendo che la figura, e la disposizione delle lenti medesime supplisca alla forza del flint in modo, che si ottengano se non in tutto, almeno in buona parte gli effetti degli acromatici composti*. Ego quidem malui hæc omnia multo ante inventa cum reliquis ad acromatica telescopia pertinentibus huic operi simul vulganda reservare, quam ad eam Academiam tum transmittere, & eam ob causam hic inter ea, quæ ad lentes oculares pertinent, in ipso hujus Opusculi titulo enunciavi hoc additamentum de correctione solius erroris figuræ sphæricæ pro objectivis.

4. Incipiam autem a consideratione ejus erroris relate ad lentem unicam, & exponam, in quo situm sit detrimentum unicum, quod inde profluit pro imagine efformata ab objectivo in suo foco, nimirum confusio, quam parit is error, si apertura ipsius objectivi major justo conjungatur cum augmento nimis magno ejusdem imaginis : tum ostendam, oriri quidem confusionem aliquam etiam ex ejusmodi errore ocularium, sed minorem, verum inde oriri gravissimum incommodum curvaturæ apparentis linearum rectarum objecti, quæ imaginem in fundo oculi efformandam & deturpet, & confundat.

5. Iis expositis gradum faciam ad remedia. Adhibebo autem formulam inventam in capite primo Opusculi secundi Tomi I, & adhibitam in sequentibus excerptam e prima dissertatione Viennensi, ex qua ibidem etiam in ea dissertatione deduxi, nullam haberi posse combinationem sphæricitatum pertinentium ad binas ejus superficies, quæ eum errorem destruat pro radiis, qui ad eam lentem adveniant paralleli, posse autem pro divergentibus a quadam distantia, & pro convergentibus ad quandam aliam, quæ distantiæ determinantur a qualitate refractiva vitri, & a radiis binarum sphæricitatum. Earum distantiarum limites ibidem determinavi num. 92, sed in ejus determinationis applicatione ad figuram irrepsit ibi error exiguus, qui facile deprehenditur, & corrigi-

rigitur : is autem hic non habebit locum . Verum error figuræ sphæricæ potest corrigi pro radiis tam parallelis, quam utcumque divergentibus, vel convergentibus per superficies curvaturæ cujusdam, quam Cartesius determinavit longiore calculo, Newtonus vero eleganti, & simplici geometrica constructione. Ego alibi curvæ ipsius mechanicam constructionem dedi jam olim per fila, quæ evadit admodum simplex, ubi sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refracti habet rationem, quæ exprimi possit per numeros simplices, ut 3 ad 2. Ea quidem esset maximæ utilitatis, si inveniretur methodus expedita, & certa efformandi vitra ad ejusmodi curvaturam: verum id est ita difficile, ut vix ulla, vel potius omnino nulla de eo spes haberi posse videatur. Potest utique ea correctio haberi haud difficulter per superficies sphæricas lentis compositæ e binis lentibus; ubi vero habetur lens unica, potest error ipse saltem imminui pro ea directione radiorum, quæ correctionem non admittit, determinata combinatione sphæricitatum, quæ ipsum exhibeant minimum. Agam hic de hisce omnibus, & comparabo etiam plures alias combinationes binarum sphæricitatum tam inter se, quam cum combinatione minimi, ut saltem seligantur eæ, quæ videantur maxime idoneæ: sed aggrediamur rem ipsam.

§. I.

De vitiis ortis ex errore figuræ sphæricæ.

6. PRIMUM vitium telescopiorum proveniens ab errore figuræ sphæricæ est, ut innuimus, quædam confusio, ac veluti nebulositas, quæ tollit distinctam visionem partium objecti. Ea ab hoc errore oritur præcipue in imagine, quam vitrum objectivum efformat in suo foco; sed nocet distinctioni, quanquam minus, etiam error pertinens ad lentes oculares. Imago objecti in foco objectivi esset maxime distincta, si omnes radii digressi a quovis unico puncto ipsius objecti, unirentur in unico puncto ejus imaginis respondente illi puncto priori. Tum nulla haberetur commixtio radiorum pertinentium ad diversa puncta objecti ipsius;

sed

sed cum ii radii dispergantur per circellum quendam; circellus pertinens ad unum punctum objecti cadit supra circellum pertinentem ad aliud punctum parte sui aliqua, quando ea est distantia eorum punctorum ipsius objecti, ut centra circellorum distent a se invicem minus, quam per summam duarum semidiametrorum, nimirum quam per diametrum unius circelli: partes autem congruentes eo sunt majores, quo minor est distantia punctorum objecti a se invicem.

7. Quando per noctem cernitur unicum punctum objecti satis lucidum, ut fixa quædam, quæ carens omni diametro apparenti sensibili acceptâ in eo sensu, in quo accipitur ab Astronomis, haberi potest instar unici puncti; multo major pars ejus circelli afficit fundum oculi ita, ut sensum excitet, quam per diem; quam ob causam fixæ videntur habere diametrum quandam apparentem, quod oritur ab iis radiis aberrantibus; & ob eandem causam planetarum quoque diametri apparentes debent omnino augeri, ubi ipsi planetæ observantur lucidi in fundo obscuro, minui autem, ubi ii apparent nigri in disco solis, cujus radii aberrantes, qui pertinent ad ejus puncta proxima limbo obscuro, debent protendi ultra limbum ipsum.

8. Si agatur de solo circello pertinente ad errorem figuræ sphæricæ, videtur debere id augmentum admodum sensibile respondere toti ipsius semidiametro, quia, ut jam monui, densitas luminis in eo circello augetur in infinitum non tantum in accessu ad centrum, sed etiam in accessu ad circumferentiam, & ibi etiam, ubi est minima, habet vim satis magnam. Secus debet accidere, si agatur de solo circello pertinente ad errorem diversæ refrangibilitatis, in quo densitas ita decrescit in recessu a centro, ut in ipsa circumferentia prorsus evanescat. Partes ejus circelli, in quibus densitas luminis jam est minor, quam ut possit sensum afficere, non debent esse satis proximæ peripheriæ. Per noctem quidem is limes debet esse ipsi propior, quando objectum est magis lucidum, ut patet. Tertius quidam circellus amplior oritur ex conjunctione omnium circellorum utriusque generis. Si concipiantur in hoc tertio conjuncta centra priorum duorum; in

casu,

casu, in quo is, qui pertinet ad figuram sphæricam, esset amplior eo, qui oritur a diversa refrangibilitate, posset utique extendi usque ad ultimum marginem sensibilitas excitanda : sed cum hic posterior sit multo amplior; accidet in eo genere etiam circello composito e binis erroribus id, quod deberet accidere soli secundo illi diversæ refrangibilitatis. Ultra peripheriam illius primi figuræ sphæricæ is secundus remanet solus : hinc sensibilitas debet desinere multo ante postremum marginem ejusdem compositi, & ejus limes debet esse eo propior centro, quo objectum est minus lucidum. Eam ob causam fixæ, quæ idcirco tantum appellantur magnitudinis primæ, quia hic apud nos major est vis earum luminis, apparent in telescopiis dioptricis communibus multo majores, quam eæ, quæ dicuntur magnitudinum minorum, & fixæ telescopicæ apparent etiam in iis, ut puncta quædam. Id autem accidit etiam in acromaticis, & vero etiam in telescopiis catoptricis : in acromaticis ob duplicem rationem : primo quia ne ipsa quidem objectiva acromatica colligunt simul omnes radios heterogeneos, uti jam toties diximus : deinde vero, quia lentes oculares itidem efficiunt dispersionem aliquam : hæc autem secunda ratio pertinet etiam ad telescopia catoptrica. Nam quæ proposuimus in capite præcedente hujus Opusculi, de correctione erroris diversæ refrangibilitatis per idoneum systema ocularium, habent eandem difficultatem, quæ impedit accuratam unionem per objectivum. Combinatio distantiarum focalium, quæ determinat systema utile ad eam unionem, est diversa pro diversis binariis filorum coloratorum. Adeoque remanet semper aliquid, quod parit effectum expositum.

9. Ubi non agitur de puncto lucido in campo obscuro, sed de puncto objecti cujuspiam, quod habeat alia lucida prope se; multo minorem distantiam debet habere a centro limes sensibilitatis: nam non solum centrum circelli alterius puncti, sed etiam puncta ab ipso remota usque ad quandam distantiam non ita exiguam habebunt vim luminis tanto majorem ea, quæ ibi respondet puncto circelli diversæ refrangibilitatis magis remoto ab ipsius centro, ut ipsam reddat prorsus insensibilem. Fieri itidem poterit, ut

ut ne id quidem, quod inde habetur in illo altero centro, sensum percellat; id accidit lumini fixarum minorum, quæ ne per telescopia quidem percipiuntur interdiu: in loco, in quo haberi deberet eorum imago, habetur totum lumen, quod pertinet ad puncta atmosphæræ proxima, quæ singula suos circellos habent, & illud ipsum, quod pertinet ad punctum atmosphæræ ipsius respondens illi exiguo astro: additamentum luminis ab ipso emissi est ita exiguum respectu ejus, quod ibi habetur ex atmosphæra, ut omnem sensum effugiat: id additamentum est sensibile solum, cum pertinet ad fixas lucidiores, & quo major est apertura objectivi colligens ejusmodi radios, eo plures fixæ videri possunt interdiu trans telescopium.

10. Quo longius protenditur distantia limitis sensibilis a centro circelli congruentis parte sui cum partibus adjacentium circellorum, eo major est confusio. Theoria, uti monuimus in exordio hujus capitis, nunquam poterit determinare eam distantiam, quæ quidem est varia etiam respectu diversorum oculorum, diversæ vis luminis objecti totius, & plurium aliarum circumstantiarum: ex eadem theoria nunquam deducetur proportio inter radium circelli erroris figuræ sphæricæ, & distantiam a centro, quam habet limes sensibilitatis particularum circelli diversæ refrangibilitatis. Accedunt in ordine ad confusionem imaginis in oculo plurimæ aliæ considerationes. Circellus, qui respondet singulis iis erroribus in foco objectivi, augetur plurimum ab erroribus lentis ocularis unicæ, vel plurium; ab erroribus ortis a forma oculi, & ejus vitiis, quæ semper occurrunt in individuis naturæ operibus; a distantia, ad quam agunt particulæ luminis in fibras fundi ipsius oculi; a longitudine fibrarum ipsarum, quarum singularum dum una pars immediate afficitur, tremit ob nexum fibra tota cum aliis ipsi adjacentibus; a modo, quo impressio facta in oculo traducitur ad cerebrum. Posito etiam, quod limes sensibilitatis distet a centro circelli diversæ refrangibilitatis centuplo plus, quam circumferentia circelli figuræ sphæricæ a suo centro, si reliquæ causæ præstent augmentum millecuplo majus; ratio erit 1100 ad 1001, quæ est minor, quam 11 ad 10.

11. Ista

11. Ista omnia ita pendent non solum a vi luminis in diversis punctis circellorum omnium admodum difficulter determinanda per geometriam, & calculum; sed etiam a natura physica humorum oculi, ac fibrarum in ejus fundo, a nexu ipsius cum cerebro, ab alio nexu inter motus corporeos, & perceptiones animi; ut nulla unquam haberi possit determinatio non admodum vaga, & incerta, rationis, quam habet id, quod pro confusione profluit ab errore diversæ refrangibilitatis, ad id, quod profluit ab errore figuræ sphæricæ. Illud tantummodo evidentissime patet ex iis, quæ diximus, hunc secundum errorem multo magis ad id conferre, quam pro magnitudine sui circelli relati ad circellum diversæ refrangibilitatis.

12. Et quidem in eo genere illud etiam est maxime considerandum, quod expressio densitatis infinitæ, quam exhibet geometrica solutio problematis, non habetur pro hoc secundo circello, nisi in centro, quod est punctum unicum; dum pro illo priore præter centrum habetur in tota peripheria, nimirum in linea continua. Reipsa densitas rite accepta nusquam erit infinita; nam præterquam quod lux ipsa juxta meam generalem theoriam non est corpus continuum, densitas exigit spatiolum extensum, cum sit quantitas luminis divisa per spatium, in quo ipsum lumen est conclusum; in punctis autem ejus spatii positis extra id punctum, vel illam lineam, ipsa expressio est ingens, non infinita. Adhuc tamen si consideretur in circello priore spatiolum infinitesimum adjacens peripheriæ, ac in posteriore positum circa centrum; debet in hoc concipi vis infinities minor, quam in illo, cum in illo expressio infinitæ densitatis extendatur per totam ejus longitudinem, in hoc reducatur ad punctum unicum. Inde patet adhuc multo magis, quanti intersit conari, ut obtineatur correctio ipsius erroris figuræ sphæricæ, qui ex sola comparatione magnitudinum eorum cicellorum visus est Newtono, & aliis plurimis post ipsum prorsus negligendus, quem vero Dollondus optimo sane consilio censuit corrigendum una cum errore diversæ refrangibilitatis.

13. Et quidem eo magis id erat necessarium, quod, ut Newtonus

tonus ipse animadverterat, & demonstrabitur in adnotationibus addendis tertiæ e quinque dissertationibus Viennensibus, quæ efficiet Supplementum hujus Opusculi, paribus cæteris omnibus diameter circelli diversæ refrangibilitatis augetur in ratione simplici diametri aperturæ lentis, diameter autem erroris figuræ sphæricæ in ratione ejusdem triplicata: nam telescopia acromatica exigunt aperturas majores ad habendum majus augmentum sine obscuritate (*). Iis omnibus consideratis patet in primis, cur telescopia catoptrica, in quibus specula carent errore diversæ refrangibilitatis, relicto solo errore figuræ sphæricæ, non habeant vim in eadem ratione majorem vi telescopiorum dioptricorum communium, in qua circellus erroris diversæ refrangibilitatis est major circello erroris figuræ sphæricæ; quod quidem legi in Opusculis Geometræ primi ordinis, visum ipsi mirum admodum, ut geometricis conclusionibus minus conforme. Deinde patet etiam, cur ipsa acromatica telescopia non habeant vim in immensum majorem, quam communia. In illis ipsis, uti diximus, nec totus uterque error penitus corrigitur, & præter ipsos tam multæ aliæ concausæ agunt ad confusionem augendam, quas hic proposuimus.

14. Id vitium productum in imagine efformata ab objectivo in suo foco ab errore figuræ sphæricæ pertinet ad radios digressos

(*) Spatium illud, quod in oculari unica figuræ 1 occupant radii digressi ab unico puncto objecti, ita est minus totâ aperturâ objectivi, ut sit ad ipsam in eadem ratione, in qua est ejus distantia focalis ad distantiam focalem ipsius, & dum brevitas ejus spatii prodest diminutioni ejus erroris, brevitas distantiæ focalis, a qua itidem is pendet, ipsi nocet. Verum pensatis omnibus, error, qui respondet iis radiis, est multo minor in oculari, quam in objectivo: quamobrem ubi agitur de unione eorum radiorum, cujus defectus parit confusionem imaginis, multo minus nocet is error inductus ab oculari, quam inductus ab objectivo. Ubi autem agitur de radiis pertinentibus ad diversa puncta objecti transeuntibus per medium objectivum, error sphæricitatis est multo major: nam ii incurrunt in totam ipsius ocularis superficiem, non in exiguam ejus particulam, & is nocet plurimum, cum præter confusionem inducat curvaturam illam linearum objecti rectarum, quæ imaginem deformant, adeoque ad eam causam magni interest, ut is vel corrigatur penitus, vel saltem plurimum minuatur.

ab eodem puncto objecti quocunque, & incidentes in totam amplitudinem aperturæ vitri objectivi. Ii vel progessi ultra focum objectivi ipsius, vel ante appulsum ad ipsum incidunt in ocularem, quæ deberet ipsos excipere directos ab unico puncto ejus imaginis, & emittere cum alia quadam directione, quam determinant formulæ focorum generales applicatæ ad casus particulares: occupant autem in superficie ipsius ocularis spatium quoddam, quod pareret errorem aliquem in directione illa nova, etiam si nullus adfuisset error ortus a figura sphærica objectivi; adeoque cum illo priore conjungitur hic novus, quod accidit in omni transitu per lentem ocularem quamvis, ubi habentur plures. In fig. 1 hujus Opusculi videre est casum unicæ ocularis, qui pertinet ad telescopia astronomica communia, in quo ipsa lens BB excipit in HH radios rubeos AF detortos ab extremis punctis A, A aperturæ objectivi: reliqui omnes intermedii incidunt ibi in arcum HH. Is cum sit sphæricus, parit itidem errorem suum. Sed hic error debet esse minor priore, cum intervallum HH sit multo minus apertura objectivi AA, & error figuræ sphæricæ crescat cæteris paribus in ratione triplicata aperturæ ipsius, uti diximus.

15. Quocunque numero adhibeantur lentes oculares, posset semper determinari error finalis proveniens ab omnium summa tam per formulas analogas iis, quas adhibuimus ad eruendum errorem lentis unicæ, ut vitri objectivi, vel binarum simul conjunctarum, quam per calculum trigonometricum analogum ei, quo usi sumus in capite præcedente ad eruendum errorem diversæ refrangibilitatis post transitum per plures lentes oculares. Sed pro utraque methodo oporteret habere rationem distantiæ lentium, quod induceret in priore complicationem calculi ingentem, nisi pro quavis lente quæreretur ejus error conjunctus cum errore præcedente, methodo, quam indicabimus inferius. Pro methodo calculi trigonometrici quærendum esset per formulas punctum axis, ad quod convergunt, vel a quo divergunt radii incidentes in punctum superficiei cujusvis in distantia ab axe infinitesima, & per calculum trigonometricum id, quod dirigit eos, qui incidunt in extrema puncta

cta aperturæ objectivi. Distantia finalis eorum punctorum esset error longitudinalis compositus ex omnibus præcedentibus. Inde ope causticæ, quæ adhiberi solet in ejusmodi problematis, ut ea est adhibita in illa tertia dissertatione Viennensi, quæ hic habebitur reimpressa, erueretur diameter circelli minimi omnium eorum, per quos disperguntur omnes radii digressi ab eodem puncto objecti.

16. In iis calculis sæpe occurrerent etiam valores negativi permixti positivis, qui minuerent summam exhibentem errorem finalem, quæ quidem aliquando etiam evanesceret, quod nobis obveniet in hoc ipso capite, ubi quæremus combinationes superficierum lentis unicæ, vel plurium lentium, quæ corrigant errorem ipsum figuræ sphæricæ. Sed hic illud tantummodo agebatur, ut explicaretur, in quo situm sit primum illud damnum illatum telescopiis ab errore figuræ sphæricæ tam objectivi, quam ocularium, inducens confusionem objecti, ubi is excrescat plus æquo auctus ab apertura justo majore.

17. Confusio augeri solet in margine campi, ubi error sphæricitatis augetur adhuc magis ex eo, quod inclinatio radiorum advenientium ad objectivum directione obliquâ efficit, ut is, qui incidit perpendiculariter ad superficiem, distet adhuc magis a margine objectivi ex una ejus parte, quod in ordine ad hunc errorem æquivalet aperturæ majori, & id ipsum damnum plerumque augetur ab ocularibus. Sæpe autem accidit in telescopiis, ut dum imago in centro campi est admodum distincta, sit confusa in margine, & viceversa, quod accidit, ubi campus est ingens, & ingens augmentum: nam focus radiorum, qui deveniunt obliqui ad axem, non habetur accurate in eadem distantia, ac focus parallelorum ipsi axi. Sed iis omissis faciemus jam gradum ad illud aliud vitium, quod inducitur ab errore sphæricitatis pertinente ad oculares, & consistit in curvatura linearum rectarum objecti, quæ visionem ipsius pessime deturpat, & confundit. Id autem pertinet ad radios digressos a diversis punctis objecti transeuntes per centrum objectivi, & incidentes in totam aperturam utilem lentis ocularis cujuscunque. Ii radii singuli sunt axes totidem conorum continentium omnes radios emissos ab iis singulis objecti punctis,

 qui

qui ad habendam visionem distinctam considerantur in egressu ab oculari postremâ tanquam fasciculi radiorum parallelorum conjungendorum in fundo oculi in punctis totidem ad efformandam itidem imaginem objecto similem.

18. Sit in fig. 12 (Tab. IV) DK axis occurrens objectivo AA in C, & oculari BB in G, ac bini radii obliqui EC, E'C traducti per medium objectivum C, cujus crassitudo hîc negligitur, adveniant ad ipsam ocularem BB in H, H', a qua detorqueantur ad puncta axis I, I'. Si eorum prior adveniat a puncto objecti propiore axi, quam posterior, erit ob errorem figuræ sphæricæ GI' brevior, quam GI. Concipiantur rectæ tendentes a puncto I ad eadem puncta objecti, ad quæ tendunt rectæ CE, CE': quæ occurrant oculari BB in punctis e, e', & erunt ad sensum parallelæ ipsis CE, CE': addatur recta Ih parallela rectæ I'H'. Puncta objecti E, E' posita circumquaque circa punctum D, quod est in centro campi, apparebunt oculo nudo posito in I directionibus Ie, Ie', & eidem transpicienti trans telescopium astronomicum directionibus IH, Ih, dum punctum D apparet directione IG: erit autem Gh longior quam GH'.

19. Sit jam in fig. 13 OMO'N planum respondens toti campo, cujus centrum G sit idem, ac in fig. 12, ac lineæ cujusdam rectæ objecti, cui in fig. 13 respondeat recta PQ, punctum proximum centro campi habeat in fig. 12 distantiam apparentem oculo nudo Ge, oculo armato GH. Iis autem in fig. 13 æqualia sint segmenta Ge, GH semidiametri GO perpendicularis ipsi PQ, puncti vero alterius cujusvis ejusdem rectæ distantia apparens oculo nudo sit in priore figura 12 Ge': erit distantia ejus apparens oculo armato Gh respondens rectæ Ih habenti eandem directionem cum directione radii I'H' (*), non GH', quibus ita respondebunt in fig.

(*) Nam omnes radii pertinentes ad idem objecti punctum, qui demum egressi e postrema lente oculari adveniunt ad pupillam proxime paralleli inter se, debent conjungi in fundo oculi in unico eodem puncto, quod esset vere punctum, si visio esset accurate distincta, sed est exiguum spatiolum, quod hîc consideramus ut punctum. Locus apparens ejus puncti objecti pendet a positione illius

fig. 13. distantiæ Ge', GH', Gh, ut puncto e' jacente in recta illa PQ campi objectivi in angulo quodam eGe', puncta H', h debeant jacere in eadem recta èG ultra G. Porro punctum H' jacebit in recta MHN perpendiculari eidem radio GO. Patet enim, fore in fig. 12 Ge : Ge' :: GH : GH'; adeoque eadem proportio habebit locum in fig. 13. Hinc triangula eGe', HGH' habentia latera proportionalia circa angulos æquales ad G, erunt similia, adeoque angulus GHH' æqualis angulo Gee' recto. Cum igitur Gh in utraque figura sit major, quam GH'; punctum h procurret in figura posteriore ultra rectam MN; & quoniam quo punctum H' in fig. 12 accedit magis ad marginem campi, eo magis pun-

lius ipsius puncti fundi oculi, in quo puncto ii radii uniuntur ad efformandam imaginem ejus puncti objecti respectu aliorum punctorum imaginis, & nos ab infantia assuevimus referre puncta singula objecti visi oculo inermi ad eam directionem, in qua adveniunt ad pupillam radii egressi ab iis singulis, qui ob exiguitatem ipsius pupillæ respectu ejus distantiæ censentur omnes inter se paralleli. Radii delati ab eodem puncto objecti, & egressi demum e diversis punctis humoris crystallini adveniunt ad id punctum fundi oculi cum directionibus admodum diversis, cum nimirum amplitudo pupillæ, per quam radii transeunt, & adveniunt ad eundem humorem crystallinum, non sit exigua respectu distantiæ hujus a fundo oculi: quin immo ad puncta imaginis efformatæ in eodem fundo a radiis pertinentibus ad puncta objecti sita in aliqua distantia ab axe oculi producto usque ad objectum ipsum nullus radius advenit cum ea directione, cum qua devenit ad oculum, cum humor crystallinus, qui jacet in aliqua distantia a pupilla intra oculum, non excipiat radios incidentes oblique in pupillam, nisi parte sui sita ultra axem ipsum. Adhuc tamen ii radii conveniunt in fundo oculi in illo eodem puncto, in quo convenirent omnes, qui cum ipsis allati essent ad totam humoris crystallini superficiem, illa autem assuetudo facta ab infantia id efficit, ut attribuamus locum visum directioni unicæ discedenti ab eo puncto fundi oculi, in quo ab iis convenientibus pingitur imago, & tendenti contra eam, per quam radii digressi ab eodem objecti puncto devenerunt ad oculum.

Ordo punctorum imaginis, & quidem delatus ad cerebrum (nam anima eam imaginem non videt per alium oculum, nec vero est ipsi immediate præsens, cum & in mea, & in sententia jam communi, præsentia ipsius immediata non extendatur per totum corpus, nec vero per totum caput), & longa assuetudo adjuta a reliquis sensibus, potissimum a tactu, determinat judicium de positione objecti visi: ac ea est unica ratio, cur directa censeamus objecta, quorum imago, quam anima immediate non videt, pingitur inversa in eodem oculi fundo: sed hæc jam pertinent ad Animasticam, non ad Opticam.

punctum I' accedit ad G, adeoque eo magis punctum h recedit ab H; idcirco pariter eo magis punctum h recedet a recta illa MN. Is recessus initio prope punctum H erit infinitesimus ordinis secundi, ut infinitesimus ordinis secundi est excessus rectæ infinite parum declinantis a perpendiculari supra ipsam perpendicularem: adeoque puncta h erunt in curva quadam linea, quæ erit in ipso puncto H tangens rectæ MHN. Id ipsum docet experientia; imminuto enim campo, & incremento, ita curvatura minuitur, ut sensum effugiat, quæ quidem cæteris paribus eo debet esse major, quo major est error figuræ sphæricæ lentis ocularis.

20. Ubi plures adhibentur lentes, nisi earum combinatio per errores negativos permixtos positivis destruat hunc errorem sphæricitatis finalem, semper idem vitium occurret, quod sæpe potius augebitur, quam minuatur. Id penitus evanesceret, si omnes radii in fig. 12 abirent in I, evanescentibus omnibus II'. Satis est hic aperuisse fontem ejus vitii, quod conabimur destruere, vel saltem minuere per remedia jam proponenda.

§. II.

De correctione, vel diminutione erroris figuræ sphæricæ lentis unicæ.

21. ERROR figuræ sphæricæ, de quo nos hic acturos promisimus num. 76 capitis præcedentis, oritur, uti jam toties diximus, ex eo, quod radii etiam homogenei, qui incidunt in lentem convexam habentem superficies sphæricas prope axem, concurrunt cum ipso axe in distantia majore, quam ii, qui incidunt in marginem lentis ipsius. Distantia eorum concursuum est error sphæricitatis rectilineus, sive longitudinalis, error circularis est circulus minimus eorum omnium, per quos disperguntur iidem radii excepti plano perpendiculari ad axem. Hic determinatur per illum methodo, quæ habetur in illa dissertatione veteri, quæ fere tota habebitur hic in supplemento, ac itidem ut error refrangibilitatis destruitur, vel imminuitur, eo destructo, vel imminuto. Pro ea distantia nobis recurrendum est hic ad formulas Opu-

pusculi II Tomi I; nam earum determinatio desumpta a theoria exiguorum prismatum, ex qua desumpsimus in capite superiore formulas adhibendas pro corrigendo errore refrangibilitatis, esset multo operosior, & magis complicata. Formula pro valore ejus distantiæ numero 30 capitis I Opusculi II Tomi I est $r^2\rho$, ubi r est distantia lentis a puncto, in quo radii colliguntur ab ipsa, & valor ρ est $= \frac{m-1}{m}\left(\frac{m^3}{f^3} - \frac{2m^2+m}{af^2} + \frac{m+2}{a^2f} + \frac{3m^2+m}{pf^2}\right.$ $\left. - \frac{4m+4}{apf} + \frac{3m+2}{p^2f}\right)\frac{1}{2}e^2$: ibi autem juxta num. 41 ejusdem capitis more solito m est ratio sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refracti, e semidiameter aperturæ ipsius lentis, p distantia lentis a puncto, ad quod radii concipiantur convergentes ante appulsum, qui valor evadit negativus, si radii adveniant divergentes, a radius sphæricitatis primæ superficiei positivus, si ea est convexa, negativus, si concava: est autem $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$, ubi b est radius secundæ superficiei positivus, si ea est concava, negativus, si convexa.

22. Pro destruendo eo errore debet valor, qui est intra parenthesim, fieri $= 0$. Pro calculo expeditiore assumemus $f = 1$, & incipiendo a radiis advenientibus parallelis erit $\frac{1}{p} = 0$, adeoque habebitur æquatio $m^3 - \frac{2m^2+m}{a} + \frac{m+2}{a^2} = 0$; nimirum $\frac{1}{a^2} - \frac{2m^2+m}{m+2} \times \frac{1}{a} + \frac{m^3}{m+2} = 0$. Inde eruitur $\frac{1}{a} = \frac{2m^2+m}{2(m+2)}$ $\pm \sqrt{\left(\frac{(2m^2+m)^2}{4(m+2)^2} - \frac{m^3}{m+2}\right)}$. Redacto secundo termino valoris inclusi signo radicali ad eundem denominatorem ejus numerator evadet $= 4m^3(m+2)$, qui additus numeratori $(2m^2+m)^2$ primi termini evoluto exhibebit numeratorem summæ $4m^4 + 4m^3 + m^2 - 4m^4 - 8m^3 = m^2 - 4m^3 = m^2(1-4m)$, qui valor erit semper negativus ob valorem m majorem unitate. Quare valor $\frac{1}{a}$

erit

erit semper imaginarius, quod indicat, eum errorem omnino corrigi non posse in eo casu radiorum parallelorum per lentem unicam habentem superficies sphæricas.

23. In casu radiorum convergentium, vel divergentium retinendi erunt etiam postremi tres termini habentes coefficientem p in denominatoribus, adeoque totus valor inclusus parenthesi debebit esse $= 0$. Præter $f = 1$ fiat $\frac{1}{p} = n$, unde innotescet ratio valoris p ad distantiam focalem lentis $= h$, quæ reddat valorem inclusum signo radicali positivum; adeoque radices reales. Nam e formulis ejusdem numeri 41 capitis I Opusculi II Tomi I est $\frac{1}{h} = \frac{m-1}{f}$, adeoque hìc $= m - 1$; & proinde erit $\frac{h}{p} = \frac{n}{m-1}$.

24. Facta substitutione valorum 1 pro f, & n pro $\frac{1}{p}$ in formula inclusa parenthesi numero 21 habebitur

$$m^2 - \frac{2m^2+m}{a} + \frac{m+2}{a^2} + (3m^2+m)n - \frac{(4m+4)n}{a} + (3m+2)n^2 = 0$$

$$\frac{1}{a^2} - \frac{2m^2+m+(4m+4)n}{m+2} \times \frac{1}{a} + \frac{m^3+(3m^2+m)n+(3m+2)n^2}{m+2} = 0$$

$$\frac{1}{a} = \frac{2m^2+m+(4m+4)n \pm \sqrt{(-(4m-1)m^2+4(m-1)m^2n+4m^2n^2)}}{2m+4} \text{ (*)}.$$

Porro incipiendo a radiis parallelis hìc etiam pro iis debet fieri de more $\frac{1}{p} = n = 0$, & demptis omnibus terminis, qui habent

(*) Nam dimidium coefficientis secundi termini est $\frac{2m^2+m+(4m+4)n}{2(m+2)}$, cujus quadratum habebit pro divisore $4(m+2)^2$: numerator postremi termini multiplicandus est per $4(m+2) = 4m+8$, ut reducatur ad eundem denominatorem, & acceptus cum signo negativo addendus ei quadrato. Factà eà multiplicatione, & comparatis singulis terminis cum terminis respondentibus ejus quadrati evoluti, evanescunt plures quantitates, ac is numerator reducitur ad formam simplicem expressam hìc sub signo radicali: denominatoris autem radix extracta remanet denominator communis totius valoris.

bent eum valorem, formula reducitur ad valorem inventum pro eo casu numero 22, in quo valor inclusus signo radicali est negativus. Reliqui duo termini hic adjecti, qui continent n, & n^2, & sunt ambo positivi, efficient positivam summam omnium trium; si valor n fuerit satis magnus, existente p satis exiguo. Limes inter valores n, qui relinquunt eam summam negativam, & eos, qui ipsam efficiunt positivam, est ille, qui eam reddit $= 0$. Positâ autem eâ summâ $= 0$, habebitur $n^2 + (m-1)n - \frac{4m-1}{4} = 0$; unde eruitur $n = -\frac{1}{2}(m-1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(m^2+2m)}$.

25. Adhibito pro m valore suo, obtinebuntur bini limites, alter positivus pro distantia puncti dirigentis radios advenientes, nimirum ejus, ad quod radii debent convergere, alter negativus, a quo debent divergere, ut habeantur limites quæsiti. Si adhibeatur valor $m = \frac{3}{2}$, a quo is non nimis recedit in vitris communibus; habebitur $n = -0,25 \pm \frac{1}{4}\sqrt{21} = -0,25 \pm 1,15$. Hinc $\frac{h}{p} = \frac{n}{m-1} = 2n$, erit $= -0,5 \pm 2,3 = \begin{cases} 1,8 \\ -2,8 \end{cases}$. Ii valores evadunt $\frac{9}{5}$, & $\frac{14}{5}$. Inde pro ejusmodi vitris habetur sequens theorema. *Si distantia puncti, ad quod convergunt radii advenientes ad lentem, fuerit major, quam $\frac{5}{9}$ distantiæ focalis ipsius lentis, vel major, quam $\frac{5}{14}$ distantiæ puncti, a quo divergunt; non poterit per combinationem binarum superficierum destrui error figuræ sphæricæ: poterit, si ea fuerit æqualis, vel minor.*

26. Pro casu, in quo is error destrui possit, habebitur valor $\frac{1}{a}$ in formula inventa numero 24, & valor $\frac{1}{b}$ erit $= \frac{1}{a} - 1$, ob valorem $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f} = 1$. Valor $\frac{1}{h} = m - 1$ divisus per eos valores exhibebit valorem $\frac{a}{h}$, $\frac{b}{h}$, sive valorem a, & b reductum ad partes unitatis æqualis distantiæ focali h. Sed vix unquam occurret usus eorum valorum ob nimiam proximitatem limitum inventorum. Vix unquam accidet, ut radii appellant ad lentem convergentes ad punctum usque adeo proximum ipsi len-

 ti,

ti, vel divergentes a puncto tam proximo, nimirum ad punctum distans minus quam per $\frac{5}{9}$ distantiæ focalis, vel a puncto distante minus quam per $\frac{1}{14}$.

27. Pro casu, in quo is error non potest destrui, potest saltem imminui: proderit determinare primo combinationem sphæricitatum, quæ ipsum exhibeat minimum omnium, qui haberi possunt manente eâdem distantiâ focali h, eâdem aperturâ e, eodem valore p determinante directionem radiorum advenientium, & mutatâ tantummodo combinatione sphæricitatum binarum superficierum: tum comparare residuum cum eo, qui habetur in aliis combinationibus, quæ adhiberi solent, ut pateat, quid præstet seligere, habito respectu ad magnitudinem erroris, qui habetur in singulis, & ad faciliorem executionem.

28. Si fiat $u = \frac{m^3}{f^3} - \frac{2m^2+m}{af^2} + \frac{m+2}{a^2f} + \frac{3m^2+m}{pf^2} - \frac{4m+4}{apf} + \frac{3m+2}{p^2f}$, qui est totus valor inclusus parenthesi valoris ρ numeri 21; error ibi expressus $r^3\rho$ evadit $\frac{m-1}{2m} \times r^3ue^2$, ubi manentibus cæteris variatur solus valor u. In eo valore manent reliqua omnia, præter valorem a: manente enim h, manet etiam f, qui valor ob $\frac{1}{h} = \frac{m-1}{f}$ evadit $= (m-1)h$: eo facto itidem $= 1$, & determinato a, qui exhibeat minimum, habebitur etiam b ex formula $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - 1$ (num. 26), & utriusque ratio ad distantiam focalem h. Porro termini continentes a sunt tantummodo tres, nimirum $-\frac{2m^2+m}{a} + \frac{m+2}{a^2} - \frac{4m+4}{ap}$, ob $f = 1$. Hinc captâ differentiâ habebitur $\frac{(2m^2+m)da}{a^2} - \frac{2(m+2)da}{a^3} + \frac{(4m+4)da}{a^2p}$, adeoque $\frac{1}{a} = \frac{2m^2+m}{2m+4} + \frac{4m+4}{(2m+4)p}$. Solus primus terminus exhibet valorem $\frac{1}{a}$ pro radiis, qui adveniunt pa-

paralleli, secundus est addendus pro convergentibus, vel divergentibus. Si fiat $m = \frac{3}{2}$, erit pro illis prioribus $\frac{1}{a} = \frac{6}{7}$, & $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - 1 = -\frac{1}{7}$, adeoque habebitur $a : b :: 1 : -6$, nimirum *lens habens minimum errorem figuræ sphæricæ in eo genere vitri debet esse utrinque convexa ita, ut radius secundæ superficiei sit sextuplus radii primæ*. Quod si fiat $m = 1{,}53$, quod habetur in pluribus vitris, erit $\frac{1}{a} = \frac{6{,}2118}{7{,}06} = \frac{1}{1{,}1365}$, & $\frac{1}{b} = -\frac{0{,}1365}{1{,}1365}$, & $a:b::0{,}1365:1::1:7{,}33$, nimirum *pro eo genere vitri debebit lens itidem esse utrinque convexa, sed radius secundæ superficiei paullo etiam major, quam septuplus radii primæ*.

29. Valores a, & b invenientur in partibus unitatis æqualis distantiæ focali $= h$, si valor $\frac{1}{h} = m - 1$ dividatur per hosce valores $\frac{1}{a}$, & $\frac{1}{b}$ jam inventos. Pro vitro priore habebitur $a = 0{,}5 \times \frac{7}{6} = 0{,}583$, $b = -0{,}5 \times 7 = -3{,}5$, & pro posteriore $a = 0{,}53 \times 1{,}1365 = 0{,}602$, $b = -0{,}53 \times \frac{1{,}1365}{0{,}1365} = -4{,}41$.

30. Hi sunt valores radiorum sphæricitatis exhibentium errorem figuræ sphæricæ minimum pro radiis advenientibus parallelis ad lentem vitrorum ejus generis, nimirum eorum, quæ habent eum valorem pro m. Pro errore residuo calculus numericus est prolixior. Ad eum habendum in partibus unitatis assumptæ $= f$, oportet assumere valorem numericum formulæ $\frac{m-1}{2m} \times r^3ue^2$ (num. 28), in quo valor u habet tres terminos pro radiis parallelis datos per m, & a.

31. Combinationes inventæ num. 28, & 29 conveniunt objectivo simplici, ad quod nimirum concipiuntur radii advenientes ut paralleli. Pro errore minimo sphæricitatis in ejusmodi objectivo constante e vitro communi, oportebit semper adhibere radium

sphæricitatis secundæ superficiei multis partibus majorem primo ; & quidem pro vitris habentibus adhuc majorem vim refractivam, uti sunt ea , quæ habent majorem etiam distractivam , videlicet flint , strass , & ea omnia , quæ habent admixtam satis magnam copiam plumbi , adhuc major esset excessus secundi radii supra primum , cum a valore $m = 1,5$ ad $1,53$ itum sit a radio sextuplo ad plus quam septuplum : sed objectiva simplicia nunquam fieri debent ex ejusmodi vitris ob errorem diversæ refrangibilitatis multo majorem in ipsis , quam in vitris communibus .

32. Cum discrimen obveniat ita magnum inter combinationes exhibitas ab iis binis valoribus pertinentibus ad vim refractivam , quorum utrumque inveni in pluribus vitris , patet ad habendum id , quod sit optimum factu pro ejusmodi etiam objectivis simplicibus , oportere prius determinare ipsum valorem m , quod ostendit utilitatem instrumentorum , quæ habentur hic in Opusculo I Tomi I exhibentium prisma variabile , cujus ope sine novis distantiarum mensuris determinatur is valor . Multo autem magis id proderit pro objectivis compositis ex binis lentibus licet excisis ex eodem vitri genere , de quibus agemus infra , quæ destruunt valorem ejus erroris expressum a superiore formula , pro quibus itidem oportebit nosse valorem m . Adhuc tamen cum circa maximum , & minimum differentiæ sint fere semper exiguæ ; quando non habetur valor accuratus , potest adhiberi pro vitris communibus radius secundus sextuplus , vel octuplus prioris , atque id eo magis , quod valor m non est idem pro omnibus radiis heterogeneis ne tum quidem , cum agitur de eodem vitro , ut idcirco error minimus pro uno genere radiorum exhibeat combinationem diversam ab ea , quæ exhibetur ab errore minimo pro quopiam alio .

33. Ubi agitur de radiis convergentibus , vel divergentibus oportet pro habendo errore minimo addere primo termino $\frac{2m^2+m}{2m+4}$ numeri 28 secundum $\frac{4m+4}{(2m+4)p}$, & pro ipso errore minimo , qui ibi remanet , vel pro errore , quem habet in quavis alia combina-

binatione pro radiis parallelis valor u formulæ $\frac{m-1}{2m} \times r^2 u e^2$ ejus numeri, assumere solos eosdem tres primos terminos, qui carent valore p; pro radiis vero convergentibus, vel divergentibus addendi sunt ipsis tres termini postremi. Porro si etiam hic fiat $f=1$; habebitur error relatus ad eam unitatem per eam formulam. Is reducetur ad unitatem æqualem distantiæ focali h ejusdem lentis, si ejus valor inventus dividatur per valorem h assumptum in iisdem prioribus unitatibus, cum numerus partium relativarum ad diversas unitates sit in earum ratione reciproca. Est autem (num. 26) $\frac{1}{h} = m-1$; adeoque valor inventus $\frac{m-1}{2m} \times r^2 u e^2$ multiplicandus erit per $m-1$, & evadet $\frac{(m-1)^2}{2m} \times r^2 u e^2$.

34. Comparabimus hic errores plurium specierum lentium tam respectu radiorum, qui adveniant ad lentem paralleli, quam respectu eorum, qui adveniant convergentes ad ejus focum, quod reddet ipsam formulam adhuc simpliciorem. Prior applicatio pertinet ad objectiva simplicia, posterior ad lentem ocularem secundam adjectam primæ numero 94 capitis primi ad corrigendos colores genitos ab ipsa prima. Porro in unitatibus prioribus est r pro radiis parallelis $= \frac{1}{m-1}$, & pro convergentibus ad focum $= \frac{1}{2(m-1)}$, adeoque pro illis $(m-1)^2 r^2 = 1$, pro his $= \frac{1}{4}$, & totus error redactus ad unitatem $= h$ pro prioribus erit $e^2 \times \frac{u}{2m}$, pro posterioribus $e^2 \times \frac{u}{8m}$. Is eo pacto erit redactus ad summam simplicitatem. Proderit enim ad habendum valorem $\frac{u}{m}$ sex terminos valoris u dividere per m ante applicationem numerorum, ut facto $\frac{u}{m} = u'$, & $f = 1$, fiat $u' = m^2 - \frac{2m+1}{a} + \frac{m+2}{ma^2}$ $+ \frac{3m+1}{p} - \frac{4m+4}{map} + \frac{3m+2}{mp^2}$. Eo pacto tres ex iis terminis acquirunt divisorem m, sed & ii, & reliqui tres habent numerato-

ratorem ita simplicem, ut ejus valor numericus habeatur unico intuitu, ac sine ullo usu logarithmorum, sine calculo ullo scribendo in pagella separata, uti patebit infra, ubi tabellas proponam, & explicabo. Pro sola comparatione errorum pertinentium ad diversas combinationes superficierum, satis erit invenire valorem u', & pro radiis parallelis ipsum dividere per 2, pro convergentibus ad focum per 8: tum si quæratur etiam quantitas absoluta redacta ad eandem unitatem æqualem valori r; satis erit valorem sic inventum multiplicare per quadratum e^2 semidiametri aperturæ redactæ ad unitatem eandem.

35. E valoribus $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - 1$ inventis in partibus prioris unitatis $= f$ invenientur facile itidem valores a, & b redacti ad unitatem $= h$ dividendo per ipsos valorem $\frac{1}{h} = m - 1$ de more.

36. Hic comparabo inter se per applicationem numerorum quatuor species lentium, quarum prima habeat combinationem erroris minimi, secunda sit plano-convexa ita, ut planum obvertatur oculo, tertia isoscelia, quarta plano-convexa ita, ut planum obvertatur objecto; nam, ut patebit ex ipso calculo, eo ordine crescunt errores a minimo primæ lentis ad maximum postremæ. Quæram autem valorem erroris tam pro radiis parallelis, quam pro radiis, qui adveniant convergentes ad focum lentis, pro quibus radiorum advenientium directionibus invenimus valores algebraicos $\frac{u}{2m}$, & $\frac{u}{8m}$. Omnia erunt communia utrique radiorum generi, & lentibus omnibus præter $\frac{1}{a}$, qui valor occurrit in duobus terminis valoris u, & ejus quadratum in tertio. Is debet accipi pro lente erroris minimi talis, qualis occurrit relatus ad primam unitatem $= f$: pro lente isoscelia erit $= 2$, ob $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f} = 1$, & $- \frac{1}{b} = \frac{1}{a}$, quod efficit $\frac{2}{a} = 1$, adeoque $a = 2$. Pro plano-convexa, in qua planum obvertitur oculo, est $\frac{1}{b} = 0$, adeo-

adeoque $\frac{1}{a} = 1$, & ipse $a = 1$. Pro plano-convexa, in qua planum obvertitur objecto est $\frac{1}{a} = 0$. Hi valores erunt rite substituendi in illis tribus terminis valoris u. Ad distinguendum valorem a erroris minimi pertinentis ad radios parallelos ab eo, qui pertinet ad eos, qui adveniunt ad lentem convergentes ad ejus focum, appellabimus hunc secundum a'; & quoniam pro hisce radiis habetur $\frac{1}{p} = \frac{1}{h} = \frac{m-1}{f}$ (num. 23) $= m - 1$ ob $f = 1$, secundus terminus numeri 28, qui erat $\frac{4m+4}{(2m+4)p}$, erit $=$ $\frac{(4m+4)(m-1)}{2m+4}$. Hinc erit $\frac{1}{a} = \frac{2m^2+m}{2m+4}$, cui pro $\frac{1}{a'}$ accedet ipse $\frac{(4m+4)(m-1)}{2m+4}$.

37. Forma calculi numerici, quæ mihi visa est omnium commodissima, habebitur in tribus tabulis, quas exhibebo inferius suis locis cum singularum explicatione (*). Hic apponam numeros finales valorum quæsitorum inde erutos: pertinent ad tria vitrorum genera, quorum m est 1,5; 1,52; 1,54; unde per interpolationem obtinebuntur pro reliquis communibus. Incipiemus autem a radiis sphæricitatis binarum superficierum lentis erroris minimi a, & b pro radiis parallelis, quæ lens erit utrinque convexa,

(*) Pro singulis casibus applicatio numerorum ad formulam est expedita, nec indigeret explicatione: sed pro comparandis inter se pluribus valoribus finalibus, uti sunt ii, qui hic exhibentur, præstat habere tabulam, pro qua computandâ prodest plurimum habere idoneum calculi numerici ordinem, quod inserviet tam pro revocandis ad trutinam hisce valoribus hic inventis, quam pro applicandis aliis valoribus m fortioribus, si libeat adhibere vitra ipsis prædita: idcirco censuimus operæ pretium ipsas tabulas exhibere cum tota calculi forma, & operationes adhibitas explicare singillatim. Explicatio incipiet num. 41: tabulæ ipsæ habebuntur, ubi incipient singularum explicationes. Si quis velit persequi operationes ipsas, & revocare ad trutinam; poterit singulas describere in paginis separatis, & habere ad manus, dum hic inferius explicabuntur, quod est multo commodius, quam continuus excursus ad impressas in aliis paginis.

vexa, a', & b' pro convergentibus ad focum, quæ erit convexo-concava convexitate obversa objecto; quibus accedet ipsorum ratio: tum addemus quantitatem erroris pro quatuor lentibus propositis numero 36: singulis respondebunt errores bini pro quovis valore m, quorum errorum prior pertinebit ad radios parallelos, posterior ad convergentes.

Radii sphæricitatum pro unitate æquali distantiæ focali.

	$m =$ 1,5	1,52	1,54
Radiis advenientibus parallelis.	($a =$ 0,5833	0,5961	0,6085
	($b = -$ 3,5	− 4,072	− 4,800
Radiis convergentibus ad focum.	($a' =$ 0,3182	0,3216	0,3248
	($b' =$ 0,875	0,8431	0,8152
	Ratio radiorum.		
	$b : a = -$ 6	− 6,831	− 7,889
	$b' : a' =$ 2,75	2,621	2,510
In lente	Errores.		
Erroris minimi	(0,267	0,274	0,280
	(0,040	0,039	0,038
Plano-convexa plano verso ad oculum.	(0,291	0,293	0,295
	(0,135	0,149	0,161
Utrinque convexa isoscelia.	(0,416	0,434	0,455
	(0,375	0,400	0,427
Plano-convexa plano verso ad objectum.	(1,125	1,155	1,186
	(0,760	0,796	0,833

38. Patet e numeris hic propositis, quam ingens habeatur discrimen inter quantitatem erroris figuræ sphæricæ ortum ex sola diversa relatione binarum sphæricitatum lentium, quæ habeant distantiam focalem prorsus eandem, atque id potissimum in lente, quæ excipiat radios convergentes ad suum focum, ut est illa secunda lens ocularis addita primæ in telescopiis astronomicis de

de qua num. 18. Is error in secunda lente est triplo, vel quadruplo major, quam in prima, in tertia nonuplo, vel decuplo major, in quarta etiam vicecuplo; usque adeo plurimi interest debitam sphæricitatum combinationem lentibus inducere. Patet autem, lentem plano-convexam adhibendam potius, quam isosceliam, dummodo planum obvertatur oculo; nam ea est omnium pessima, si planum obvertatur objecto (*): præstat tamen pro objectivo simplici adhibere utrinque convexam, sed ita, ut radius sphæricitatis superficiei secundæ sit circiter septuplus radio primæ. Pro secunda lente oculari, quæ habeat focum ulteriorem communem cum prima, lens ad habendum errorem minimum proprium debet habere radium secundæ superficiei concavæ, qui sit ad radium primæ convexæ circiter, ut 2,6 ad 1, sive ut 13 ad 5.

39. Diximus ad habendum errorem minimum proprium: nam ad habendum minimum utriusque lentis, opus est calculo multo magis composito: debet enim haberi ratio erroris sphæricitatis inducti a prima, & inveniri expressio, quæ exhibeat errorem secundæ lentis ortum ex errore primæ, & suo. Multo magis complicata est perquisitio erroris, qui remanet in foco lentis postremæ, ubi adhibentur plures lentes, qua de re agemus iterum inferius. Interea duo hic notanda sunt: primo quidem errorem inventum pro radiis convergentibus ad focum referri ad unitatem, quæ sit æqualis distantiæ focali lentis adhibitæ; qui si referatur

 ad

(*) Id quidem habet locum in ea combinatione lentis secundæ excipientis radios digressos e diversis punctis objecti, qui se intersecantes in centro objectivi detorquentur deinde a prima oculari ita, ut convergant ad focum communem ipsius, & lentis secundæ, quæ idcirco eos excipit convergentes ad focum suum. Ibi omnium pessima est forma lentis plano-convexæ, plano obverso radiis advenientibus: eadem est itidem pessima pro prima oculari, quæ eos excipit proxime parallelos: itidem pro objectivo excipiente radios digressos ab eodem puncto objecti proxime parallelos est pessima omnium; si planum obvertatur versus objectum. Verum in systemate trium, vel quatuor ocularium, in quo secunda excipit eos radios pertinentes ad diversa puncta objecti digressos a suo foco, quos idcirco debet reddere parallelos, pessima est, ut dicetur inferius, forma plano-convexa, plano obverso oculo: pro ipsa e contrario planum debet obverti radiis advenientibus.

ad unitatem æqualem distantiæ lentis a foco, in quo ipsa colligit radios, exprimetur per numerum duplo majorem: ea enim distantia est duplo minor, quam distantia, quæ dicitur absolute focalis; quæ nimirum pertinet ad focum radiorum parallelorum. Deinde ad habendum errorem absolutum debere (num. 34) numeros inventos multiplicari per quadratum semidiametri aperturæ e redactum ad eandem unitatem, qui valor adhibendus erit, ubi quæritur error secundæ lentis auctus ab errore primæ.

40. In sequenti paragrapho agemus de remedio per duas lentes conjunctas; sed interea proponemus tabulas, ex quibus decerpti sunt valores propositi numero præcedenti, quas explicabimus singillatim de more, incipiendo hic a prima. Qui eas hinc descriptas in pagina separata habeat præ manibus singulas dum explicantur, facilius conferet cum ipsa explicatione.

T A B U L A I.

	$m = 1,5$	$m = 1,52$	$m = 1,54$
. $2m+4$	7	7,04 . . . $\bar{9}$,152427	7,08 . . . $\bar{9}$,149967
m	1,5	1,52 . . . 0,181844	1,54 . . . 0,187521
$2m+1$	4	4,04 . . . 0,606381	4,08 . . . 0,610660
$1:a$	6:7	0,8723 . . 9,940652	0,8875 . . 9,948148
$4m+4$	10	10,08 . . . 1,003460	10,16 . . . 1,006894
$m-1$	0,5	0,52 . . . 9,716003	0,54 . . . 9,732394
	5:7	0,7445 . . 9,871890	0,7749 . . 9,889255
$1:a'$	11:7	1,6168 . . 0,208656	1,6624 . . 0,220735
. $1:a$	6:7	$\bar{0}$,059348	$\bar{0}$,051852
. $1:a'$	11:7	$\bar{9}$,791344	$\bar{9}$,779265
. $1:b$	$-$ 1:7	$-$ 0,1277 . . $\bar{0}$,893809	0,1125 . . $\bar{0}$,948848
. $1:b'$	4:7	0,6168 . . $\bar{0}$,209856	0,6624 . . $\bar{0}$,178880
a	7:12 = 0,5833	0,5961 . . 9,775351	0,6085 . . 9,784246
a'	7:22 = 0,3182	0,3216 . . 9,507347	0,3248 . . 9,511659
b	$-$ 7: 2 = $-$ 3,5	$-$ 4,072 . . 0,609812	$-$ 4,800 . . 0,681242
b'	7: 8 = 0,875	0,8431 . . 9,925859	0,8152 . . 9,911274
$b:a$	$-$ 6	$-$ 6,831 . . 0,834461	$-$ 7,889 . . 0,896996
$b':a'$	2,75	2,621 . . 0,418512	2,510 . . 0,399615

41. Tabula I continet calculum pro valoribus $\frac{1}{a}$, & $\frac{1}{a'}$, qui respondent iis binis directionibus radiorum, positis pro m valoribus

bus tribus 1,5; 1,52; 1,54. Accedunt valores $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - 1$, $\frac{1}{b'} = \frac{1}{a'} - 1$, ex quibus eruentur a, b, a', b' in partibus unitatis æqualis distantiæ focali h, dividendo (num. 35) valorem $\frac{1}{h} = m - 1$ per valores fractionarios inventos, ac ratio radiorum b, b' ad a, a'. Inde ope partium proportionalium invenientur facile ii valores pro omnibus vitris communibus, quorum m plerumque cadet inter hìc adhibitos, nec unquam nimis recedet ab eorum aliquo. Formula, quæ hìc evolvitur est (num. 28, & 33) $\frac{1}{a} = \frac{2m^2 + m}{2m + 4}$, & $\frac{1}{a'} = \frac{1}{a} + \frac{4m + 4}{(2m + 4)p}$, ubi p est $= h$, & $\frac{1}{p} = \frac{1}{h} = m - 1$, adeoque is secundus terminus addendus evadit $\frac{(4m + 4)(m - 1)}{2m + 4}$.

42. In primis tribus lineis primæ columnæ ejus tabulæ habentur termini pertinentes ad valorem $\frac{1}{a} = \frac{2m^2 + m}{2m + 4} = \frac{m(2m + 1)}{2m + 4}$, nimirum in prima linea divisor $2m + 4$ cum puncto præcedente, quod indicat, ipsum esse divisorem, adeoque ubi adhibeantur logarithmi, sumendum esse complementum logarithmicum ipsius: in secunda, & tertia bini factores numeratoris, nimirum m, & $2m + 1$: in quarta linea $\frac{1}{a}$ divisione expressa per duo puncta ob commodiorem impressionem: in quarta, & quinta duo factores numeratoris $(4m + 4)(m - 1)$ termini addendi pro habendo $\frac{1}{a'}$. Sexta relinquitur libera pro valore ejus secundi termini apponendo e regione ipsius in reliquis columnis: in octava habetur $\frac{1}{a'}$, cujus valorem ibi exhibet summa valoris $\frac{1}{a}$ lineæ quartæ, & valoris termini secundi inveniendi in linea præcedente septima ex suo logarithmo: is obtinetur ibi addendo simul duos logarithmos præcedentes, qui pertinent ad duos coefficientes numeratoris $(4m + 4)(m - 1)$, cum logarithmo primæ lineæ, qui pertinet ad

denominatorem. Sequentes quatuor lineæ continent valores $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{b'}$ cum puncto præmisso, quod indicat, eos debere esse divisores: debet enim per eos dividi valor $m-1$ lineæ sextæ ad habendos in quatuor lineis sequentibus valores a, a', b, b' redactos ad partes unitatis æqualis distantiæ focali h, ut diximus. Valor autem $\frac{1}{b}$, & $\frac{1}{b'}$ efformatur ex valore $\frac{1}{a}-1$, $\frac{1}{a'}-1$, uti præmisimus. In postremis binis lineis habetur fractio exprimens rationem radii sphæricitatis superficiei primæ ad radium secundæ.

43. Posteriores tres columnæ continent in linea prima tres valores numericos expressos per m, quibus hìc utimur, tum in singulis lineis sequentibus valores numericos respondentes algebraicis columnæ primæ, cum suis valoribus logarithmicis, ubi iis est opus, præter decimam, & undecimam, quæ continent valores logarithmicos sine numeris: ii enim jam habebantur in linea quinta, & nona, nec eorum repetitione est opus. Dixi autem, valores logarithmicos esse adjectos, ubi opus est, nam in secunda columna facilius inveniuntur omnia sine logarithmis, ob simplicitatem valoris $m=1,5$, sive $=\frac{3}{2}$. Repetuntur autem ibi valores numerici respondentes algebraicis $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a'}$ in lineis decima, & undecima ex quinta, & nona, in gratiam calculi reliquarum columnarum, in quibus id est opportunum, ut mox patebit.

44. In secunda columna primæ tres lineæ continent valores numericos respondentes terminis algebraicis primæ. Valor lineæ secundæ est denominator 7, productum binarum sequentium est numerator $2m^2+m=6$ valoris $\frac{1}{a}$ lineæ quintæ. Binæ lineæ sequentes habent binos factores denominatoris secundi termini adjungendi primo pro habendo $\frac{1}{a'}$ in linea 9. Linea 8 habet eorum productum 5, denominatore remanente itidem 7. Summa hujus termini cum termino quintæ efficit numeratorem 11 nonæ. Lineæ 10, & 11 sunt eædem, ac 5, & 9, a quarum valoribus demptâ unitate, ha-

habentur in linea 12, & 13 valores $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{b'}$. Penultimus evasit negativus ob $\frac{6}{7} - 1 = -\frac{1}{7}$, quod indicat, secundam quoque superficiem, radiis advenientibus parallelis, esse convexam, dum valor positivus lineæ postremæ indicat concavitatem ejus superficiei. Dividendo per hos valores valorem respondentem valori $m-1$, qui habetur in linea 7, & est $=\frac{1}{2}$, obtinentur in quatuor sequentibus valores a, a', b, b' redacti ad unitatem $= h$, ponendo denominatorem communem pro numeratore, & adhibendo pro quovis denominatore duplum numeratoris correspondentis. Hi valores reducti ibi sunt ad fractiones decimales, ut melius appareat earum relatio ad valores, qui ipsis respondent in columnis sequentibus. Postremæ duæ lineæ habent rationem valoris a ad b, & a' ad b' expressam a numeratoribus valorum lineæ 10, & 12 pro priore 11, & pro posteriore 13, in quibus denominator est semper idem, & numeratores sunt breviores, quam denominatores sequentium linearum, qui possent exprimere rationes easdem.

45. In iis columnis prima linea continet valorem m, secunda denominatorem $2m+4$, qui primo intuitu obtinetur duplicando valorem primæ, & addendo 4, ut æque facile inveniuntur ex linea prima in lineis 6, & 7 valores numerici respondentes valoribus algebraicis columnæ primæ. Accedunt iis numeris valores logarithmici, nimirum complementum logarithmicum in secunda, quæ continet denominatorem, & in reliquis logarithmos ipsos. Linea quinta continet summam trium logarithmorum præcedentium cum suo numero eruto e tabulis, qui est valor $\frac{1}{a}$. Linea 8 continet summam logarithmorum linearum 2, 6, 7 cum numero itidem adscripto, qui est valor secundi termini. Summa hujus cum numero lineæ quintæ, qui erat valor primi termini, exhibet in linea 9 valorem $\frac{1}{a'}$.

46. Lineæ 10, & 11 habent complementa logarithmorum lineæ 5, & 9, tum linea 12 residuum ad unitatem numeri lineæ 5 cum signo negativo, & complemento sui logarithmi eruendo e tabulis.

Li-

Linea 13 habet excessum supra unitatem numeri lineæ 9 cum complemento sui. Quatuor lineæ sequentes habent singulæ summam singulorum e quatuor logarithmis præcedentibus additis logarithmo lineæ septimæ. Id perficit divisionem valoris $m - 1$ per valores $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{b'}$, & exhibet in iisdem lineis valores a, a', b, b' redactos ad unitatem $\frac{1}{h}$. Logarithmus lineæ penultimæ obtinetur subtrahendo logarithmum a, qui est in linea 14 a log.b lineæ 16, & logarithmus postremæ subtrahendo illum lineæ 15 ab eo lineæ 17.

47. E binis postremis lineis hujus tabulæ patet, rationem radii sphæricitatis secundæ superficiei ad radium primæ non ita parum variari a diversa vi refractiva vitri pro minimo errore in radiis parallelis, quæ nimirum septupla in primo genere vitri evadit fere octupla in postremo. Pro iis ipsis lens est semper utrinque convexa: pro convergentibus ad focum radius secundæ evadit quodammodo plus quam infinitus, a negativo indicante convexitatem abiens in positivum, qui ibi indicat concavitatem: sed auctâ vi refractivâ, minuitur ea ratio, & variatur minus, quam pro radiis parallelis, dum a valore 2,7 primi vitri abit in postremo tantummodo ad 2,5.

48. Habitis valoribus $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a'}$, qui conveniunt errori minimo, transiri potest ad comparationem ipsius cum errore illarum trium lentium, quas proposui num. 36. Formula erroris pro comparatione sola erat (num. 34) valor $\frac{u}{m}$, sive u', dividendus pro radiis parallelis per 2, pro convergentibus ad focum per 8. Valor u' habetur ibidem, & primi soli tres ejus termini assumendi sunt pro parallelis. Nam reliqui, ubi agitur de radiis, qui adveniunt ad lentem paralleli, evanescunt, evanescente pro ipsis valore $\frac{1}{p}$. Ubi autem agitur de radiis, qui adveniunt convergentes ad focum, ipse valor $\frac{1}{p}$ evadit, idem ac valor $\frac{1}{h}$, qui est $= \frac{m-1}{f}$, nimirum, ut num. 36, $= m - 1$ ob valorem $\frac{1}{f} = 1$. Quare pro

pro ejusmodi radiis ponendus erit ipse valor $m-1$ pro valore $\frac{1}{p}$ in iis tribus postremis terminis, qui factâ ejusmodi substitutione, evadent $(3m+1)(m-1) - \frac{(4m+4)(m-1)}{ma} + \frac{(3m+2)(m-1)^2}{m}$. Porro ex iis sex terminis valoris u' num. 34. tres carent valore a, qui idcirco sunt communes omnibus lentibus: tres habent eum valorem, sed ita, ut valor $\frac{1}{a}$ in lente erroris minimi habeatur ex tabula superiore tam pro $\frac{1}{a}$ pertinente ad radios parallelos, quam pro $\frac{1}{a'}$ pertinente ad radios, qui convergunt ad focum, in prima autem ex tribus lentibus num. 36 sit $\frac{1}{a}=1$, in secunda $=\frac{1}{2}$, in tertia $=0$ (num. 34). Quamobrem licebit procedere sequenti pacto pro iis tribus terminis, quorum duo habent valorem $\frac{1}{a}$, & tertius $\frac{1}{a^2}$. Ii termini sunt ibi $\frac{2m+1}{a} - \frac{m+2}{ma^2} + \frac{(4m+4)}{map}$, qui postremus pro radiis parallelis evanescet, pro convergentibus ad focum fiet $\frac{(4m+4)(m-1)}{ma}$. Primo quidem invenientur valores dati per m, nimirum $2m+1$, $\frac{m+2}{m}$, $\frac{(4m+4)(m-1)}{m}$. Numeri, qui iis respondent, pertinebunt ad errorem pro lente habente $a=1$: primi, & tertii dimidium, ac secundi quadrans pertinebunt ad errorem pro lentibus habentibus $a=2$: sed tertius habebit usum tantummodo pro radiis convergentibus ad focum, cum evanescat pro parallelis. Tum primus ex iis tribus numeris inventis multiplicabitur per valorem $\frac{1}{a}$, & $\frac{1}{a'}$, secundus per $\frac{1}{a^2}$, & $\frac{1}{a'^2}$, pertinentes ad lentem erroris minimi ad habendos terminos, qui pertinent ad errorem ejus lentis, prior pro radiis parallelis, posterior pro convergentibus ad focum. Tertius autem ex iis numeris erit multiplicandus tantummodo per $\frac{1}{a'}$ ad obtinendum terminum postremum pertinentem ad errorem ejus-

ejusdem lentis pro radiis convergentibus ad focum, cum is evanescat pro parallelis. Collectis in unam summam omnibus terminis, qui pertinent ad singulos errores, habitâ ratione positivorum, & negativorum, ea summa pro radiis parallelis erit dividenda per 2, pro convergentibus ad focum per 8 juxta num. 34. Ordo calculi patebit ex tabulis II, & III, quorum priorem proponemus hîc, posteriorem post hujus explicationem, nimirum post numerum 53. Prior continebit calculum pro numeris, qui respondent singulis ex iis sex terminis valoris u', posterior eorum summas.

TABULA II.

	$m = 1,5$	$m = 1,52$	$m = 1,54$
$2.m$	2,25	2,31 . . . 0,363687	2,372 . . 0,375041
$3m + 1$	5,5	5,56 . . . 0,745075	5,62 . . . 0,749736
$m - 1$	0,5	0,52 . . . 9,716003	0,54 . . . 9,732394
	2,75	2,891 . . 0,461078	3,035 . . 0,482130
$3m + 2$	6,5 . . . 0,812913	6,56 . . . 0,816904	6,62 . . . 0,820858
$2.(m - 1)$	0,25 . . . 9,397940	 9,432006	 9,464788
$.m$	1,5 . . . $\bar{9}$,823909	1,52 . . . $\bar{9}$,818156	1,54 . . . $\bar{9}$,812479
	1,083 . . 0,034762	1,167 . . 0,067066	1,254 . . 0,098125
	6,083	6,368	6,661
$2m + 1$	4 0,602060	4,04 . . . 0,606381	4,08 . . . 0,610660
$1 : a$	 9,933053	 9,940652	 9,948148
$1 : a'$	 0,196295	 0,208656	 0,220735
	3,429 . . 0,535113	3,524 . . 0,547033	3,621 . . 0,558808
	6,286 . . 0,798355	6,532 . . 0,815037	6,783 . . 0,831395
$m + 2$	3,5 . . . 0,544068	3,52 . . . 0,546543	3,54 . . . 0,549003
$.m$	. . . . . $\bar{9}$,823909	. . . . . . $\bar{9}$,818156	. . . . . . $\bar{9}$,812479
	2,333 . . 0,367977	2,316 . . 0,364699	2,299 . . 0,361482
$2.1 : a$	 9,866106	 9,881304	 9,896296
$2.1 : a'$	 0,392590	 0,417312	 0,441470
	1,714 . . 0,234083	1,762 . . 0,246003	1,81 . . . 0,257778
	5,762 . . 0,760567	6,054 . . 0,782011	6,353 . . 0,802932
$4m + 4$	10 1,00000	10,08 . . 1,003460	10,16 . . 1,006894
$m - 1$	 9,698970	 9,716003	 9,732394
$.m$	. . . . . $\bar{9}$,823909	. . . . . . $\bar{9}$,818156	. . . . . . $\bar{9}$,812479
	3,333 . . 0,522879	3,449 . . 0,537619	3,562 . . 0,551767
$1 : a'$	 0,196295	 0,208656	 0,220735
	5,238 . . 0,719174	5,575 . . 0,746275	5,923 . . 0,772502

49. Pri-

49. Prima linea tabulæ secundæ habet, ut prima præcedentis, tres valores m pro tribus generibus iisdem vitrorum, Infra ipsam singulæ columnæ habent primo ternas divisiones (divisionem hic appello quidquid continetur intra binas rectas lineas continenter ductas a margine sinistro tabulæ ad dexterum), quarum prima habet unam lineam, secunda tres, tertia quatuor: eæ inserviunt pro tribus terminis carentibus valore a, qui sunt primus m^2, quartus $(3m+1)(m-1)$, postremus $\frac{(3m+2)(m-1)^2}{m}$. Valores algebraicos continet prima columna: numericos iis respondentes columna secunda cum logarithmis omnium præter priores quatuor, ubi calculus numericus sine logarithmis fit primo intuitu. Quadratum m^2 exprimitur in prima columna per $2.m$, interposito puncto inter 2, & m, quod exprimit, illud 2 esse exponentem, non coefficientem, & divisio per m præposito puncto ei litteræ, ac lineolâ superpositâ characteristicæ ejus complementi logarithmici, ut in præcedentibus Opusculis.

50. Pro secunda linea secundæ columnæ patet, $2,25$ esse quadratum valoris $m=1,5$: pro secunda tertiæ, & quartæ eruitur e tabulis duplus logarithmus valorum $1,52$, & $1,54$ ibi appositus, cujus numerus $2,31$, & $2,372$ proximus vero erutus ex ipsis tabulis pro valore m^2 ipsum præcedit. Valores $3m+1$, & $m-1$, pro primis duabus lineis divisionis secundæ cujusvis columnæ obtinentur facile ex valore m primæ lineæ. Ipsarum productum itidem facile obtinetur primo intuitu pro tertia ejus linea in secunda columna: in reliquis binis eorum valorum logarithmi desumpti e tabulis adjacent ipsis: eorum summa obtinetur in linea tertia, cujus numerus ipsi præmissus est valor termini $(3m+1)(m-1)$. Eodem pacto primo intuitu obtinentur valores numerici $3m+2$, $(m-1)^2$, & m apponendi in primis tribus lineis divisionis tertiæ. Pro secunda linea columnæ secundæ ejus divisionis obtinetur $(m-1)^2=0,25$ ex $m-1=0,5$, cui apponitur logarithmus eruendus e tabulis: pro reliquis columnis logarithmus ejus quadrati obtinetur duplicando logarithmum valoris $m-1$, qui habebatur in secunda linea divisionis secundæ earundem colu-

 mna-

mnarum. Pro numero lineæ primæ logarithmus erutus est e tabulis, ut & complementum logarithmicum pro numero lineæ tertiæ. Trium logarithmorum summa fit in quarta linea, & ejus numerus erutus e tabulis est valor ejus termini. In linea sequenti habetur summa eorum trium valorum numericorum exhibentium valores terminorum, qui non habent a, & sunt omnes positivi: ii habentur in divisione prima, & postremis lineis divisionis secundæ, ac tertiæ: summa ipsorum erit communis omnibus lentibus, cum ii termini non pendeant a valore a: ea adhibebitur tota pro radiis convergentibus ad focum, pro parallelis autem solus primus terminus, qui in divisione prima respondet valori m^2.

51. Post hasce summas habentur tres aliæ divisiones respondentes tribus terminis $\frac{2m+1}{a}$, $\frac{m+2}{ma^2}$, $\frac{(4m+4)(m-1)}{ma}$, quorum medius est positivus, reliqui duo sunt negativi. In columna prima habentur itidem coefficientes algebraici eorum terminorum, ubi $1:a$, & $2.1:a$ exprimunt $\frac{1}{a}$, & $\frac{1}{a^2}$ pro radiis parallelis: accedit accentus pro convergentibus ad focum: sed in postrema divisione deest $1:a$, cum ejus terminus evanescat pro radiis parallelis. In reliquis columnis initio singularum linearum habentur valores numerici, qui facile eruuntur ex prima linea sumendo ipsius duplum pro prima divisione, ipsum pro secunda, ipsius quadruplum pro tertia, ac ipsis addendo 1, 2, 4, & horum logarithmi ipsis adjacentes eruti sunt e tabulis: valori $\frac{1}{m}$ expresso per $.m$ non adscribitur numerus, sed ejus logarithmus desumitur ex linea octava cujusvis columnæ: logarithmi vero valorum $1:a$, $1:a'$ pro divisione 1, & 3, qui pertinent ad lentem erroris minimi, hic pro radiis convergentibus, ille pro parallelis, eruendi sunt ex lineis 5, & 9 tabulæ præcedentis; & logarithmus valoris $\frac{1}{a^2}$ expressi per $2.1:a$ pro secunda divisione obtinetur duplicando logarithmum valoris $1:a$ jam appositum in divisione præcedente, & eo-

& eodem pacto obtinetur logarithmus valoris $\frac{1}{a^{\backprime 2}}$. Idcirco pro iis valoribus algebraicis non habentur in reliquis columnis valores numerici, sed sola puncta.

52. Porro in divisione prima logarithmus lineæ primæ additur soli logarithmo secundæ in quarta, idem soli tertiæ in quinta, adeoque numerus respondens ei logarithmo in quarta exhibet erroris minimi valorem $\frac{2m+1}{a}$ pro radiis parallelis, & in quinta $\frac{2m+1}{a^{\backprime}}$ pro convergentibus ad focum. In secunda divisione linea tertia habet summam binorum logarithmorum præcedentium cum suo numero: ei summæ additur in linea 6 logarithmus lineæ quartæ pro errore minimo radiorum parallelorum, in lin. 7 logarithmus quintæ pro errore convergentium ad focum, ut obtineatur valor numericus ipsi respondens, qui est valor ejus termini. In linea quarta divisionis tertiæ fit summa priorum trium logarithmorum, cui adscribitur suus numerus: tum huic additur in sexta logarithmus quintæ, ubi eodem pacto habetur valor numericus ejus termini. Numeri, qui habentur in lin. 1 divisionis primæ, in 3 divisionis secundæ, in 4 divisionis tertiæ omnium trium columnarum, sunt ii, qui exprimunt valores coefficientium datorum per m, & numeros, adhibendi juxta num. 48 pro tribus speciebus lentium comparandis cum lente erroris minimi, & inter se.

53. Si radii advenirent convergentes ad aliam quamvis distantiam p a lente, vel divergentes ab alia quavis distantia; ordo calculi esset idem, & solum in postremis tribus terminis valoris $u^{\backprime}$ pro $m-1$, qui hic erat valor $\frac{1}{p}$, & pro $(m-1)^2$, ponendus esset novus valor ipsius $\frac{1}{p}$ in primo casu positivus, in secundo negativus, vel ejus quadratum in utroque positivum, ut patet. In sequenti tabula III colligetur fructus calculorum tabulæ præcedentis colligendo summas numerorum respondentium singulis terminis formulæ algebraicæ, & assumendo singularum dimidium pro radiis parallelis, octantem pro convergentibus ad focum juxta num. 48.

TABULA III.

Radii	paralleli	convergentes	paralleli	convergentes	paralleli	convergentes
	2,250	6,083	2,310	6,368	2,372	6,661
	1,714	5,762	1,762	6,054	1,810	6,353
	3,964	11,845	4,072	12,422	4,182	13,014
a minimi	— 3,429	— 6,286	— 3,524	— 6,532	— 3,621	— 6,783
	0,535	— 5,238	0,548	— 5,575	0,561	— 5,923
	0,267	— 11,524	0,274	— 12,107	0,280	— 12,706
		0,321		0,315		0,308
		0,040		0,039		0,038
	2,250	6,083	2,310	6,368	2,372	6,661
	2,333	2,333	2,316	2,316	2,299	2,299
	4,583	8,416	4,626	8,684	4,671	8,960
$a = 1$	— 4,000	— 4,000	— 4,040	— 4,040	— 4,080	— 4,080
	0,583	— 3,333	0,586	— 3,449	0,591	— 3,562
	0,291	— 7,333	0,293	— 7,489	0,295	— 7,642
		1,083		1,195		1,318
		0,135		0,149		0,165
	2,250	6,083	2,310	6,368	2,372	6,661
	0,583	0,583	0,579	0,579	0,575	0,575
	2,833	6,666	2,889	6,947	2,947	7,236
$a = 2$	— 2,000	— 2,000	— 2,020	— 2,020	— 2,040	— 2,040
	0,833	— 1,667	0,869	— 1,724	0,907	— 1,781
	0,416	— 3,667	0,434	— 3,744	0,453	— 3,821
		2,999		3,203		3,415
		0,375		0,400		0,427
$1 : a = 0$	2,250	6,083	2,310	6,368	2,372	6,661
	1,125	0,760	1,155	0,796	1,186	0,833

54. In hac tabula præter titulos lineæ primæ habentur divisiones quatuor separatæ a se invicem lineis horizontalibus, quarum singulæ destinatæ sunt singulis ex illis quatuor lentium generibus, vel positionibus expressis num. 36, quarum prima est lens erroris minimi, secunda plano-convexa, plano posito versus oculum, tertia isoscelia, quarta plano-convexa, plano spectante objectum. Prima columna habet valorem radii a sphæricitatis primæ, tum singula binaria columnarum respondent singulis e tribus valoribus m expressis in linea prima præcedentium binarum tabularum, nimirum 1,5; 1,52; 1,54. Binarii cujusvis columna prior

res-

respondet radiis parallelis, posterior convergentibus ad focum, ut indicant tituli superpositi. In singulis columnis proponuntur termini valoris exprimentis errorem redacti ad numeros in tabula præcedenti pro lente erroris minimi, & rite reducendi pro reliquis, quorum summa debet dividi per 2 pro radiis parallelis, per 8 pro convergentibus ad focum juxta num. 34 ad habendum errorem quæsitum. Hæc patebunt explicatione sequenti.

55. In linea prima columnæ cujusvis ponitur pro radiis parallelis unicus terminus carens valore a erutus ex linea secunda tabulæ præcedentis, & pro convergentibus summa trium eruta ex linea 10 ipsius: pro primo binario, qui respondet valori $m = 1,5$, est 2,250, & 6,083: tum in secunda linea ponitur pro parallelis valor 1,714 respondens termino positivo $\frac{m+2}{ma^2}$ erutus e linea 21 præcedentis: in tertia habetur eorum summa 3,964, in quarta ponitur valor $-$ 3,429 respondens termino negativo $-\frac{2m+1}{a}$, qui subtractus ab ea summa relinquit 0,535 in linea 5: hujus dimidium in linea 6 exhibet valorem erroris quæsiti 0,267 pro radiis parallelis in lente erroris minimi. At pro radiis convergentibus, habetur in secunda linea itidem valor positivus termini $\frac{2m+1}{ma^2}$, qui est 5,762 erutus e linea 22 tabulæ præcedentis, ac in tertia fit pariter summa binorum numerorum præcedentium: sed in binis lineis sequentibus habentur bini termini negativi, prior $-$ 6,286 erutus e linea 15, posterior $-$ 5,238 e postrema: in linea 6 habetur horum negativorum summa $-$ 11,524, quæ ablata a summa positiva lineæ 3 relinquit 0,321 in linea 7: hujus pars octava in linea sequenti relinquit 0,040, qui est valor erroris quæsiti pro radiis convergentibus ad focum in hac lente: huic autem prorsus similis est calculus in reliquis columnis pro reliquis binis vitrorum generibus.

56. In secunda divisione prima linea cujusvis columnæ habet eundem numerum, quem prima divisionis præcedentis, cum contineat terminum, vel summam terminorum carentium valore a:

secun-

secunda, quæ respondet valori $a = 1$, habet numerum, qui in tabula præcedenti habebatur in linea 18, & ibi dividendus erat per a^2, hic remanet idem, nimirum in columnis primi binarii 2,333 : at in linea secunda divisionis tertiæ, cujus $a = 2$, habetur idem divisus per 4, nimirum 0,583. In postrema divisione, ubi $\frac{1}{a} = 0$, omnes termini evanescunt præter eos, qui habentur in linea prima 2,250, & 6,083. In tertia linea columnæ cujusvis habetur summa binarum linearum præcedentium : in quarta linea habetur in columna priore divisionis secundæ valor negativus termini divisi per a, & in posteriore bini ita divisi cum eorum summa post ipsos : eruitur ille e linea 11 tabulæ præcedentis, hi e lineis 14, & 26, cum divisio per $a = 1$ relinquat numeros eosdem, qui habebantur ante divisionem per a : in priore columna subtrahitur ille numerus a præcedente, in columna posteriore ea summa a summa positiva lineæ tertiæ, & obtinetur in linea penultima valor, qui divisus ibi per 2, hic per 8, exhibet errorem hujus lentis 0,416 pro radiis parallelis, 0,375 pro convergentibus.

57. In tertia divisione omnia procedunt, ut in secunda, sed in ejus linea secunda pertinente ad utramque columnam habetur pars quarta numeri respondentis in divisione præcedente, ut monuimus, ob $a = 4$, & in quarta columnæ prioris, quarta, & quinta posterioris, habetur dimidium ob $a = 2$. Hinc obtinetur in linea postrema error, qui in binario primo est 1,125, & 0,760. Pro postrema divisione habetur in prima linea unicus terminus, ut monuimus, cæteris omnibus ibi evanescentibus, cujus dimidium in prima columna, pars octava in secunda, exhibet in linea ultima errorem quæsitum, qui pro binario primo est 1, 125, & 0,760. E tabula I, & III sunt eruti valores omnes, quos proposuimus numero 37.

§. III.

§. III.

De correctione erroris figuræ sphæricæ per duas lentes conjunctas ex eodem vitri genere pro objectivo.

58. CORRECTIO erroris figuræ sphæricæ in hoc casu innititur iisdem fundamentis, & calculus procedit fere eodem modo, quo in capite II Opusculi II Tomi I. Error figuræ sphæricæ est hìc, uti ibi (num. 8) $R^2(q+q')\frac{1}{2}e^2$, ubi e est semidiameter aperturæ, R est distantia lentis compositæ a puncto, ad quod convergunt radii infinite proximi axi post egressum ab ipsa, qui valor hìc est idem, ac H eruendus e valore $\frac{1}{H}=\frac{1}{h}+\frac{1}{h'}$ (ibi num. 13): valores q, q' habentur ibidem num. 7 e valoribus m, f, a, p pro prima lente, m', f', a', p' pro secunda. Hìc ipsi, & h, h', H haberi debent ab iisdem, cum solo discrimine, quod hìc habetur $m'=m$, adeoque habentur

$$q=\frac{m-1}{m}\left(\frac{m^2}{f^2}-\frac{2m^2+m}{af^2}+\frac{m+2}{a^2f}+\frac{3m^2+m}{pf^2}-\frac{4(m+1)}{apf}+\frac{3m+2}{p^2f}\right)$$

$$q'=\frac{m-1}{m}\left(\frac{m^2}{f'^2}-\frac{2m^2+m}{a'f'^2}+\frac{m+2}{a'^2f'}+\frac{3m^2+m}{p'f'^2}-\frac{4(m+1)}{a'p'f'}+\frac{3m+2}{p'^2f'}\right).$$

59. Porro a, & b sunt radii sphæricitatum primæ lentis positivi de more, cum respectu objecti centrum jacet ultra lentem, negativi cum citra: a' & b' sunt radii sphæricitatis lentis secundæ: est $\frac{1}{f}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$, $\frac{1}{f'}=\frac{1}{a'}-\frac{1}{b'}$, m ratio sinuum, p distantia primæ lentis a puncto, ad quod concipiuntur convergentes radii, dum adveniunt ad primam lentem, p' distantia ipsius ab eo, ad quod concipiuntur convergentes, dum incidunt in secundam: sunt autem iidem de more h, & h' distantiæ focales singularum lentium, r, r' distantiæ ipsarum a punctis, ad quæ radii convergunt post egressum ab ipsis, & habentur formulæ $\frac{1}{h}=\frac{m-1}{f}$, $\frac{1}{h'}=\frac{m-1}{f'}$; $\frac{1}{r}=\frac{m-1}{f}+\frac{1}{p}=\frac{1}{h}+\frac{1}{p}=\frac{1}{p'}$;

1:r'

$\frac{1}{r'} = \frac{m-1}{f'} + \frac{1}{p'} = \frac{m-1}{f'} + \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$: qui valor assumi poterit pro $\frac{1}{R}$, & $\frac{1}{H}$, exprimente hìc tam R , quam H distantiam r', ad quam convergunt post egressum e secunda lente radii , qui inciderant paralleli in primam . Pro destruendo errore figuræ sphæricæ habebitur , ut num. 14 ejusdem cap. II Opusculi II Tomi I , $q + q' = 0$.

60. Inde vero pro objectivo , facto $\frac{1}{p}$, $= 0$, quod efficit $\frac{1}{p'} = \frac{1}{h} = \frac{m-1}{f}$, posito divisore m intra parentheses , facto $\frac{1}{f} = 1$, & $\frac{1}{f'} = -u$ (*), ac divisione institutâ per valorem $m-1$ communem , habebitur sequens æquatio $m^2 - \frac{2m+1}{a} + \frac{m+2}{ma^2} - u^3m^2 - \frac{u^2(2m+1)}{a'} - \frac{u(m+2)}{ma'^2} + u^2(3m+1)(m-1) + \frac{4u(m+1)(m-1)}{ma'} - \frac{u(3m+2)(m-1)^2}{m} = 0$. Hæc æquatio fere eadem , ac illa numer. 33 ejusdem capitis II Opusculi II Tomi I , differt ab ipsa in eo , quod hìc est itidem m , quod ibi m', adeoque valor c , qui ibidem erat $= \frac{m-1}{m'-1}$, evadit hìc $= 1$, quam ob causam non apparet , & quod valor u , qui ibidem erat determinatus a correctione diversæ refrangibilitatis , quæ ipsum ibi num. 6 exigebat $= -\frac{dm}{dm'}$, hìc est arbitrarius , ut idcirco dum ibi relinquebatur unica determinatio libera , hìc habeantur binæ , quarum una adhiberi poterit pro valore a , altera pro hoc valore u : horum valorum variationes infinities infinitæ possunt saltem per attentationem

(*) Patet , hunc valorem u esse diversum ab eo , qui adhibitus est in paragrapho præcedente , ubi adhibebatur pro eo , qui in valore q continebatur intra parenthesim : hìc est magis analogus ei , qui est adhibitus loco citato Opusculi II .

nem exhibere plures combinationes superficierum ad rem idoneas, ut seligantur eæ, quæ videri possint maxime opportunæ. Iis autem determinatis, forma calculi evadet similis illi, quam adhibuimus in capite IV ejusdem Opusculi II, & adhuc simplicior, ob valorem m communem utrique lenti.

61. Valorem $\frac{1}{f'}$ hic in ipsa formula assumpsimus negativum $= - u$, licet sit arbitrarius, at ea minus differret ab illa ejus capitis: sic valor u, qui erat adhibendus, remanebit positivus, ac primâ lente existente convexâ, secunda erit concava, quod quidem proderit ad evitandam imaginarietatem imminuto, non aucto valore m'^2 primi termini per u^3, m'^2 termini quarti. In illo Opusculo valor $\frac{1}{a}$ assumptus est $= \frac{1}{2}$, derivatus nimirum a prima lente assumptâ isosceliâ utrinque convexâ, quod hic etiam fieri posset, ut & retineri ille idem valor u, qui ibidem est adhibitus: eo pacto forma calculi rediret hic fere prorsus eadem, ac ibi in illo capite quarto, omisso tantummodo valore c, & facto $m' = m$, quod minueret numerum terminorum primæ, & secundæ columnæ tabulæ ibi adhibitæ.

62. Posset adhiberi valor a, & a' arbitrarius, quod reduceret pro valore u æquationem gradus tertii, quæ haberet saltem unum valorem realem; sed is posset esse minus ad rem idoneus removendo nimis focum communem; præterquam quod ipsa resolutio æquationis tertii gradus exigit calculum magis operosum. Videtur primo aspectu maxime idonea determinatio, quæ adhibeat utranque lentem ejusmodi, ut singularum error sphæricitatis proprius sit minimus eorum, qui haberi possint manente eâdem distantiâ focali singularum. Ea conditio pro prima lente determinat valorem $\frac{1}{a}$ eum, qui habetur in Tabula I exposita in fine paragraphi præcedentis: nam ea excipit radios parallelos. Pro secunda oporteret determinare relationem $\frac{1}{a'}$, ad $\frac{1}{f'} = - u$, qua inventâ eliminaretur alter ex iis binis valoribus, & æquatio reduceretur

tur ad unicam incognitam. Id vero præstari posset sequenti modo.

63. Considerato ut constanti valore f', licet non $= 1$, qui valor reservabitur pro f, differentiandi erunt iidem tres termini, qui in valore numeri 28 paragraphi præcedentis continent a', positum pro a, posito f', & p' pro f, & p: ii sunt $\frac{-2m^2+m}{a'f'^2}$ $+\frac{m+2}{a'^2f'}-\frac{4m+4}{a'p'f'}$. Hinc habebitur $\frac{(2m^2+m)da'}{a'^2f'^2}-\frac{2(m+2)da'}{a'^2f'}$ $+\frac{(4m+4)da'}{a'^2f'p'}=0$, ubi $\frac{1}{p'}$ est $= m-1$, cum radii ad secundam lentem adveniant convergentes ad focum primæ, adeoque valor p' sit æqualis valori h primæ lentis, pro qua relate ad unitatem $= f$ habetur $\frac{1}{h}=m-1$. Quare habebitur $\frac{1}{a'}=\frac{2m^2+m}{(2m+4)f'}$ $+\frac{(4m+4)(m-1)}{(2m+4)}$. Posito ibi $-u$ pro $\frac{1}{f'}$, & substituto eo valore pro $\frac{1}{a'}$, & ejus quadrato pro $\frac{1}{a'^2}$ in æquatione num. 60, ea haberet quidem unicum valorem incognitum u, sed assurgeret ad gradum tertium, & totus calculus evaderet admodum complicatus.

64. Si retentâ formâ primæ lentis eâ, quæ reddat minimum ejus errorem sphæricitatis, adhibito nimirum pro $\frac{1}{a}$ illo valore, qui inventus est num. 56, assumatur aliquis valor u arbitrarius; deprimetur iterum æquatio ad gradum secundum pro valore $\frac{1}{a'}$ inveniendo. Adhibendus autem est positivus, ut jam innuimus, & ejusmodi, ut valor negativus f' sit major, quam f: si enim is esset minor; focus evaderet virtualis pro reali. Assumemus hic ipsum $f'=-2$, quo pacto fiet $u=-\frac{1}{f'}=\frac{1}{2}$, ac distantia H eruta ex valore $\frac{1}{H}=(m-1)-\frac{1}{2}(m-1)=\frac{1}{2}(m-1)$ erit $\frac{2}{m-1}$, positiva, & tantummodo dupla distantiæ focalis lentis primæ, cujus valor ex $\frac{1}{h}=m-1$, est $h=\frac{1}{m-1}$.

65. Po-

65. Positis pro m, $\frac{1}{a}$, u valoribus numericis $1\frac{1}{2}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{1}{2}$ devenietur ad æquationem, & eruentur ex ipsa radii sphæricitatis eâdem methodo, quam adhibuimus in capite IV Opusculi II Tomi I. Adhibebimus hîc primum e valoribus numericis adhibitis in Tabula I (num. 57) paragraphi præcedentis $m = 1,5$, cui respondet $\frac{1}{a} = \frac{6}{7}$: ejus logarithmus est $9,933053$, ac posito $u = \frac{1}{2}$, æquatio numeri 60 evadit $2,25 - 3,4286 + 1,7143 - 0,2812 - \frac{1}{a'} - \frac{1,1667}{a'^2} + 0,6875 + \frac{1,6667}{a'} - 0,5417 = 0$, sive $\frac{1,1667}{a'^2} - \frac{0,6667}{a'} - 0,4003 = 0$. Inde obtinetur $\frac{1}{a'} = 0,2857 \pm 0,6517$, & assumpto valore negativo, ne positivus nimis auctus imminuat plus æquo valorem a', fiet $\frac{1}{a'} = -0,3660$, $\frac{1}{b'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{f'} = -0,3660 + 0,5 = 0,1340$: est autem $\frac{1}{a} = \frac{6}{7} = 0,8571$, $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{f} = \frac{1}{a} - 1 = -0,1429$.

66. Ad habendos radios a, b, a', b' in partibus unitatis æqualis distantiæ focali H lentis compositæ, dividendus est hîc, ut jam toties, valor $\frac{1}{H} = \frac{1}{2}(m-1) = 0,25$ per fractiones inventas, quæ divisio exhibet $a = 0,2917$, $b = 1,7495$, $a' = -0,6831$, $b' = 1,8657$, valore H existente $= 1$: valor autem h ejus dimidius erit $= 0,5$, & h' duplus hujus, sed negativus ex valore $\frac{1}{h'} = \frac{m-1}{f'} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$, erit $= -1$ respectu $H = 1$.

67. Possent pro m substitui reliqui duo valores $1,52$, & $1,54$, cum suis $\frac{1}{a}$, ut deinde erui possent valores radiorum sphæricitatis pro valoribus m intermediis per interpolationem: & quidem radii b, a', b' obvenerunt satis idonei, nimirum satis magni re-

spectu distantiæ focalis lentis compositæ $H = 1$: sed valor $a = 0,2917$, licet non omnino intolerabilis, est tamen satis exiguus, quod evitari debet, quantum fieri potest. Idcirco cum id, quod ad rem pertinet, sit correctio erroris figuræ sphæricæ in foco lentis compositæ præstanda non a singulis componentibus, sed ab earum conjunctione; omissâ non solum formâ utriusque lentis, quæ reddat singularum errorem minimum, sed etiam ejusmodi formâ primæ solius, possunt assumi conditiones aliæ, & quidem plurimæ aliæ post alias, ad seligendas combinationes, quæ videri possint omnium aptissimæ. Nos hic unam seligemus, quæ formam primæ lentis exhibeat isosceliam, adeoque admodum commodam, in qua nimirum $\frac{1}{a} = \frac{1}{2}$, & ponemus $u = \frac{1}{2}$.

68. Incipiendo a valore $m = 1,5$ fiet $\frac{1}{a} = \frac{1}{2}$, & æquatio habebit eosdem terminos numericos, præter secundum, ac tertium provenientes ab algebraicis $-\frac{2m+1}{a}$, & $\frac{m+2}{ma^2}$, qui erunt -2, & $\frac{7}{12} = 0,5833$. Hinc ipsa evadet $\frac{1,1667}{a'^2} - \frac{0,6667}{a'} - 0,6979 = 0$, unde eruitur $\frac{1}{a'} = 0,2857 \pm 0,8244$. Assumpto valore negativo habebitur $\frac{1}{a'} = -0,5388$, adeoque $\frac{1}{b'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{f'} = -0,5388 + 0,5 = -0,0388$, dividendo $\frac{1}{H} = 0,25$ per $\frac{1}{a} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{b} = -\frac{1}{2}$, per eos valores $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$, & per $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{h'} = -\frac{1}{4}$, habebitur $a = 0,5$; $b = -0,5$; $a' = -0,4640$; $b' = -6,443$; $h = \frac{1}{2}$; $h' = -1$; $H = 1$. Ii sunt valores multo aptiores, quia nullus ex iis radiis obvenit nimis exiguus, & isoscelismus primæ lentis est magis commodus artifici.

69. Substituendo 1,52, & 1,54 pro m, ac retinendo $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b} = \frac{1}{2}$, & $u = \frac{1}{2}$, habebuntur binæ æquationes sequen-

tes

tes $\frac{1,1579}{a'^2} - \frac{0,7142}{a'} - 0,7198 = 0$, & $\frac{1,1493}{a'^2} - \frac{0,7613}{a'}$ $- 0,7419 = 0$. Eæ exhibent valores $- 0,5382$, & $- 0,5378$ pro valore $\frac{1}{a'}$, unde ablato positivo $- \frac{1}{f'} = 0,5$ obtinetur $- 0,0382$, & $- 0,0378$ pro $\frac{1}{b'}$: per eos valores diviso 0,26, & 0,27, qui sunt valores $\frac{1}{H} = \frac{1}{2}(m-1)$, obtinentur valores a', & b' relati ad unitatem H. Ii cum valoribus respondentibus valori $= 1,5$, & cum valoribus a, b, h, h' inventis pro hisce ipsis tribus valoribus m methodo expositâ superius exhibent valores tabulæ sequentis. Ibi in summa fronte habentur ii ipsi tres valores m assumpti 1,5; 1,52; 1,54: tum in prima columna valores algebraici a, b, a', b', h, h' redacti ad partes unitatis æqualis distantiæ focali H. Patet autem, primam lentem esse utrinque convexam, quod indicat valor positivus primi ejus radii, & negativus secundi: secunda autem habet primam superficiem concavam, & secundam convexam ob utrumque signum negativum: verum radius secundæ sphæricitatis ita est longus, ut videatur posse assumi pro ipsa sine metu erroris notabilis superficies plana, vel quæcumque parum convexa. Verum multo magis exacta evadet correctio; si determinetur accurate vis ejus vitri, quod est adhibendum, & invento ejus valore m, eruantur per interpolationem radii sphæricitatum, qui ipsi conveniunt, ex hisce tribus hic inventis.

m	1,5	1,52	1,54
a	0,5	0,52	0,54
b	— 0,5	— 0,52	— 0,54
a'	— 0,4640	— 0,4831	— 0,5020
b'	— 6,4433	— 6,8063	— 7,1429
h	0,5	0,5	0,5
h'	— 1	— 1	— 1
H	1	1	1

§. IV.

§. IV.

De eadem correctione pro ocularibus.

70. BINA sunt incommoda telescopiorum inducta ab errore figuræ sphæricæ pertinente ad lentes oculares, uti vidimus in §. I, confusio imaginis, & curvatura linearum rectarum objecti. Primum producitur a radiis, qui digressi a quovis unico puncto objecti deberent ab objectivo colligi omnes in ejus foco, ut (fig. 1 Tab. I) in F. Factâ ejusmodi unione per correctionem ipsius, adhuc iidem radii progressi usque ad ocularem, & occupantes in casu ocularis unicæ, quem figura exprimit, intervallum superficiei HH, patiuntur errorem sphæricitatis, qui pertinet ad primum incommodum: pro eo corrigendo oporteret in formulis exprimentibus eum errorem supponere valorem $p = -$ FG. Secundum incommodum producitur a radiis, qui digressi a diversis punctis objecti, & transeuntes per medium objectivum C incidunt in totam aperturam ocularis BB, & pro ipso corrigendo debet assumi pro p valor negativus æqualis toti distantiæ CG.

71. Si ageretur de correctione præstanda per solam relationem binorum radiorum sphæricitatis lentis simplicis; problema determinaretur ab alterutra ex iis positionibus sola; adeoque nec potest quæri ea relatio, quæ destruat simul utrumque, nec vero ea, quæ reddat simul utrumque minimum. Quinimmo nec alterius tantummodo destructio haberi posset, quia cum FG in eo casu debeat esse æqualis distantiæ focali lentis BB, & proinde CG multo major eâ ipsâ distantiâ, utraque jacet extra limites, quos in paragrapho II invenimus pro ejusmodi destructione. Omissa correctione prioris, qui minus nocet, ut vidimus in paragrapho I, adhibenda esset relatio, quæ exhibeat secundum errorem minimum, pro qua instituendus esset calculus, assumpto pro p valore negativo distantiæ CG, quæ est in eo casu summa distantiarum focalium utriusque simul, objectivi, & ocularis. Verum cum hæc summa debeat esse multis partibus major, quam sola di-

distantia focalis lentis ocularis, posset fieri $\frac{1}{p} = 0$, ut pro radiis, qui adveniunt paralleli, quod exhiberet valores inventos numero 41.

72. Sed cum hic agatur de correctione per ocularem compositam e binis lentibus, potest utique institui calculus ponendo valores $q + q'$ numeri 58 $= 0$ duplici modo, primo quidem substituendo pro p, & p' valores, qui respondent distantiæ FG, deinde vero substituendo eos, qui respondent distantiæ CG: id exhiberet binas æquationes, & adhuc remaneret una determinatio arbitraria: si facto $f = 1$ de more, quod nihil determinat, assumeretur prima lens isoscelia, quod exhiberet $\frac{1}{a} = \frac{1}{2}$; remanerent determinandi per eas binas æquationes valores $\frac{1}{f'}$, & $\frac{1}{a'}$. Valor p pro priore esset $= -$ FG, pro posteriore $= -$ CG: valor p' pro prima æquatione esset distantia puncti, ad quod compellit prima lens radios divergentes ab F, & pro secunda distantia ejus, ad quod ea compellit eos, qui divergunt a C.

73. Posset utique pro eo casu calculus reddi aliquanto minus complicatus considerando distantiam CG, ut infinitam respectu primæ lentis, quod redderet pro secunda æquatione $\frac{1}{p} = 0$, & $\frac{1}{p'} = \frac{m-1}{f} = m - 1$: pro prima vero æquatione haberetur $\frac{1}{p'} = 0$; nam radii pertinentes ad unicum punctum objecti, & coeuntes in F deberent egredi e secunda paralleli. Verum adhuc calculus esset admodum complicatus, & facile fieri posset, ut in æquatione finali obvenirent valores imaginarii, ad quos evitandos oporteret instituere plura tentamina variando illam positionem, quæ remaneret arbitraria, quod itidem posset frustrare omnem spem, objectis semper valoribus imaginariis in radicibus æquationis finalis. Et quidem dispositio, quæ destruat errorem pro radiis, qui digressi ab uno puncto debeant prodire paralleli, est inversa ejus, quæ ipsum destruat pro radiis, qui adveniant paral-

ralleli, & debeant coire in unico puncto; adeoque dispositiones necessariæ ad evitandum utrunque incommodum videntur esse contrariæ, quod auget metum imaginarietatis.

74. Hinc si sit adhibenda ocularis constans binis lentibus conjunctis; satius erit adhibere correctionem solam, quæ tollat curvaturam linearum rectarum objecti, pro qua saltem in telescopiis habentibus objectivum foci longioris poterunt haberi radii illi, qui transeunt per medium objectivum, ut paralleli, quod exhibet pro ea correctione combinationes illas numeri 41: pro minoribus telescopiolis, quæ adhibentur unica manu, in quibus distantia focalis objectivi est exigua, id habere locum non potest: sed calculus ineundus esset aptatus radiis divergentibus ab illa data distantia centri aperturæ ipsius objectivi ab oculari. Occurrit autem alia difficultas communis etiam telescopiis longioribus, quod ad habendum ingens augmentum necessaria est ocularis habens distantiam focalem exiguam, quod exigit curvaturas majores, potissimum ubi lens altera debet per concavitatem suam producere distantiam focalem communem: eam ob causam requiruntur plures gradus arcus circularis, potissimum, si pro augendo campo fiat ingens apertura lentis ocularis. Tum enim quantitates ordinum inferiorum, quæ contemptæ sunt in eruendis formulis, evadunt multo majores, quam ut contemni possint, quarum si habeatur ratio, formulæ non solum fiunt multo complicatiores, sed etiam ita involvunt superiores potentias radii aperturæ e, ut totus valor erroris, qui debet fieri $=0$, divisus per e^2, non relinquat formulam carentem ipso valore e. Inde autem fit, ut pro diversâ eâ semiaperturâ combinatio eruenda evadat diversa, adeoque ea, quæ conjungit radios allapsos ad puncta infinite proxima axi cum radiis incidentibus in marginem aperturæ, non conjungat eosdem cum iis, qui incidunt in alia puncta intermedia inter centrum, & marginem. Accedit etiam crassitudo lentis aucta, cujus neglectus parit idcirco errores formularum non contemnendos: usque adeo omne id argumentum est obseptum difficultatibus quamplurimis etiam, ubi agitur de lente oculari unica composita e binis.

75. Ubi

75. Ubi agitur de pluribus ocularibus, difficultas crescit; nam ad destruendum errorem in fine postremæ etiam eum, qui pertinet ad conjunctionem radiorum marginalium cum proximis centro, haberi debet ratio errorum omnium inductorum a lentibus præcedentibus procedendo gradatim a quavis præcedente ad proxime sequentem. Hinc indicabimus tantummodo methodum, quæ adhiberi deberet ad instituendum calculum pro destructione illius, qui provenit a summa omnium in egressu ex oculari postrema. Ad id obtinendum oportet incipere a determinatione erroris, qui habetur in egressu e quavis lente posteriore compositum ex eo, qui relinquitur a præcedente, conjungendo cum illo, quem gignit ipsa posterior.

76. Is haberi potest ope formulæ numeri 30 capitis I Opusculi II Tomi I, ubi distantia foci a lente, neglectâ crassitudine lentis, remanet $= r - r^2\rho$: est autem $-r$ distantia foci radiorum proximorum axi, ρ ille valor q, qui habetur hìc numero 58, ductus in $\frac{1}{2}e^2$ dimidium quadratum semidiametri aperturæ: $r^2\rho$ distantia foci radiorum incidentium in marginem aperturæ a foco incidentium prope axem, qui est error longitudinalis figuræ sphæricæ negativus. Per formulam autem, qua jam toties usi sumus, est $\frac{1}{r} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$, ubi h est distantia focalis pertinens ad radios axi proximos, qui concipiuntur advenientes paralleli, p distantia lentis a puncto, ad quod concipiantur convergentes radii, dum incidunt in ipsam lentem. Porro hìc etiam si distantia p concipiatur aucta mutatione exigua dp, erit $-\frac{dr}{r^2} = -\frac{dp}{p^2}$, sive $dr = \frac{r^2 dp}{p^2}$.

77. Dicantur jam h', h'', h''', p', p'', p''', r', r'', r''', ρ', ρ'', ρ''' valores pertinentes ad lentes secundam, tertiam, quartam, analogi valoribus primæ, & errores simplices singularum lentium $r^2\rho$, $r'^2\rho'$, $r''^2\rho''$, $r'''^2\rho'''$ dicantur c, c', c'', c'''. Si omnes radii advenirent ad secundam lentem convergentes ad distantiam eandem p'; radii proximi axi egrederentur convergentes ad distantiam r', & marginales ad distantiam $r' - c'$: si omnes advenirent convergentes ad distantiam $p' - dp'$, egrederentur conver-

 gen-

gentes ad distantiam $r' - \frac{r'^2 dp'}{p'^2}$: differentia autem distantiæ puncti convergentiæ radiorum marginalium a puncto convergentiæ proximorum axi esset adhuc quamproxime æqualis eidem valori c', a quo non differret nisi per quantitatem exiguam respectu ipsius. Hinc distantia pro ipsis erit $r' - \frac{r'^2 dp'}{p'^2} - c'$. Porro valor dp est ille accessus foci radiorum marginalium incidentium in primam lentem a foco proximorum axi; adeoque distantia post egressum puncti convergentiæ marginalium incidentium in secundam lentem erit $r' - \frac{r'^2 c}{p'^2} - c'$, & error sphæricitatis post egressum e secunda lente erit $\frac{r'^2 c}{p'^2} + c'$.

78. Jam vero hic erit valor dp' pro tertia lente, & simili argumento distantia foci incidentium in marginem erit $r'' - \frac{r'^2 r''^2 c}{p'^2 p''^2} - \frac{r''^2 c'}{p''^2} - c''$, ac error $\frac{r'^2 r''^2 c}{p'^2 p''^2} + \frac{r''^2 c'}{p''^2} + c''$. Error post egressum e quarta esset $\frac{r'^2 r''^2 r'''^2 c}{p'^2 p''^2 p'''^2} + \frac{r''^2 r'''^2 c'}{p''^2 p'''^2} + \frac{r'''^2 c''}{p'''^2} + c'''$; unde patet errorum series. Applicatio numerorum ad hasce formulas esset admodum complicata potissimum ob complicationem summam valorum c, c', c'', c''' pendentium a valoribus q, q', q'', q''', quorum singuli habent sex terminos: ii valores invenirentur multo facilius inveniendo distantias r, r', r'', r''' pertinentes ad radios proximos axi per formulas, & distantias incidentium prope margines ope Trigonometriæ.

79. Eam methodum fuse exposuimus in postremo supplemento Opusculi II Tomi I, evolvendo singulos casus, qui possint occurrere in transitu per superficiem quamcumque, & applicavimus ad quatuor superficies binarum lentium componentium objectivum acromaticum habendo rationem etiam crassitudinis singularum. Posuimus ipsas contiguas: sed si distent a se invicem; habebitur ratio

ratio distantiæ superficiei secundæ lentis præcedentis a superficie prima sequentis eodem modo, quo per crassitudinem lentis habetur ratio distantiæ superficiei primæ ipsius a secunda. Methodus autem est eadem pro quocunque numero lentium. Progrediendo a quavis superficie præcedente ad proxime sequentem devenitur demum ad distantiam lentis postremæ a puncto axis, ad quod convergunt radii digressi a margine campi, & traducti per centrum aperturæ objectivi tam ii, qui incidunt prope centrum primæ ocularis, quam ii, qui incidunt in margines aperturæ ipsius, & omnium sequentium aperturarum utilium. Hujus posterioris distantiæ differentia a postremo e valoribus r eruto ope formularum est idem ille error, qui quærebatur numero superiore per formulas illas complicatiores. Methodum inveniendi aperturas utiles exposuimus in §. 7 capitis primi hujus Opusculi.

80. Formula erroris figuræ sphæricæ pertinentis ad ocularem postremam, & conjuncti cum omnibus præcedentibus, potest adhiberi ad tentandam correctionem ipsius erroris per conjunctionem duarum lentium methodo paullo complicatiore, quam sit ea, qua usi sumus pro objectivo. Sit R distantia ejus ocularis compositæ a puncto, in quo ipsa debet colligere radios egressos e margine campi, & transeuntes per medium objectivum, p distantia puncti, ad quod ocularis penultima compellit radios infinite proximos axi, c hujus distantia ab eo, ad quod eadem penultima compellit marginales, qui est error ipsius penultimæ compositus e suo, & præcedentibus inveniendus per Trigonometriam. Error ultimæ ocularis erit $\frac{R^2 c}{p^2} + \frac{1}{2} e^2 R^2 (q + q')$, existente e semidiametro aperturæ ultimæ ocularis, ac valoribus q, & q' pertinentibus ad binas lentes componentes eam ocularem. Hæc formula eruitur ex illa, quæ habetur in fine numeri 77, quæ pertinet ad errorem lentis secundæ: nam ejus vices gerit hìc hæc ultima ocularis composita, gerente vices erroris c lentis primæ hoc errore c invento per Trigonometriam, unde fit, ut hìc sint R, p; $\frac{1}{2} e^2 R^2 (q + q')$, quod ibi r', p', $c' = r'^2 \rho'$. Hic valor p erit idem pro valore q pertinente ad primam e binis lentibus compo-

nentibus ocularem ; pro valore autem q' valor p' erit distantia puncti, ad quod prima lens compelleret radios infinite proximos axi, existente $\frac{1}{p'} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p} = m - 1 + \frac{1}{p}$.

81. Pro destruendo eo errore deberet fieri ejus valor inventus $= 0$, qui divisus per R^2 relinquet $\frac{c}{p^3} + \frac{1}{2} e^2 (q + q') = 0$, ubi oportebit reducere valorem e ad eandem unitatem f, cujus valor est $= \frac{ab}{b-a}$ ob $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$, existentibus a, & b radiis sphæricitatum primæ e binis lentibus componentibus. In ea æquatione habebuntur prorsus, ut in objectivo composito paragraphi præcedentis, binæ indeterminationes variandæ ad arbitrium, donec evitetur imaginarietas per combinationes idoneas, si ullæ adsunt.

82. Longam calculorum seriem necessariam ad ea omnia, quæ hic proposui, instituet, quicunque voluerit : mihi satis est ostendisse methodum, juxta quam id fieri potest. Inter alia multa, quæ me retrahunt ab eo labore suscipiendo, est etiam illud, quod ea correctio videtur omnino haberi non posse sine concavitate alterius e binis lentibus componentibus ocularem, quæ ipsam correctionem exhibeat ; id autem secum trahit remotionem foci multo majorem eâ, quæ requiritur in ocularibus ad habendum satis magnum augmentum, nisi distantia focalis lentis convexæ sit perquam exigua : id autem requirit curvaturas nimis magnas, quæ in apertura necessaria ad habendum campum non nimis exiguum inducit incommodum indicatum superius, ortum ex eo, quod quantitates neglectæ pro eruendis formulis evadant multò majores, quam ut negligi possint. Productio distantiæ focalis in objectivis, quæ semper remanent cum perquam exiguo numero graduum circulorum, ad quos tornatæ sunt superficies, non solum non nocet, sed est utilis, dum ea in ocularibus est admodum perniciosa.

83. Hinc omissâ perquisitione ulteriore eo pertinente, recurram ad combinationes superficierum, quæ reddant errorem sphæricitatis minimum pro singulis lentibus. Et quidem binæ formæ re-

respondentes binis casibus, quos evolvimus in §. 2, & habentur in tabula numeri 37, satisfaciunt ipsæ solæ binis combinationibus, quæ, ut in capite præcedenti invenimus, corrigunt colores inductos ab ocularibus, & altera convenit telescopiis astronomicis, quæ invertunt objectorum imagines, altera terrestribus, quæ ipsas exhibent directas. Illa prior constat binis lentibus, quarum secunda habet distantiam focalem subtriplam primæ, & distat ab ipsa per duplum ejusdem suæ distantiæ focalis, posterior exhibet tres, vel quatuor lentes, quarum in secundo casu duæ postremæ sunt æquales, & contiguæ. Ad habendum errorem minimum, binæ illæ combinationis prioris habebunt binas illas formas; ex illis autem quatuor combinationis posterioris, tres priores habebunt primam, quarta si addatur, debebit habere formam secundam.

84. Nam in prima combinatione binarum ocularium telescopii astronomici lens prima excipit radios digressos a centro aperturæ objectivi ita remoto ab oculari, ut ii haberi possint pro parallelis: secunda eos excipit convergentes ad suum focum. Hinc iis conveniunt binæ illæ formæ ejus tabulæ numeri 37 juxta titulos ibidem expressos, ubi continentur radii sphæricitatum adhibendi ad habendum errorem minimum. Quod si libeat adhibere lentes plano-convexas; utraque debet adhiberi ita, ut planum obvertatur oculo: hæ, ut videre est in postrema e tribus tabulis posita post numerum 53, habebunt errorem aliquanto majorem, sed non nimis magnum.

85. In secunda combinatione prima ocularis (fig. 3. Tab. I) excipit radium marginalem D'CG' devenientem itidem e puncto axis remoto C, qui haberi potest pro parallelo ipsi axi, adeoque etiam ei lenti convenit forma eadem prior ejus tabulæ, vel plano-convexa, plano verso ad oculum: secunda ocularis illum excipit ita delatum per GIL, ut debeat ex ipsa prodire per rectam LQ parallelam axi, adeoque etiam ipsi convenit eadem forma, quæ radiis advenientibus parallelis, sed cum positione contraria. Tertia illum excipit delatum per eam lineam parallelam axi, adeoque ipsi etiam convenit forma eadem, cum eadem positione primæ. Ea deberet compellere eum radium ad focum suum, adeo-

que

que ad distantiam focalem æqualem distantiæ focali lentis quartæ, si ea adjungatur contigua eidem tertiæ. Quare ipsi convenit forma secunda respondens radiis convergentibus ad focum, eadem quæ lenti secundæ combinationis primæ, ac si ea adhibeatur plano-convexa, debebit ejus planum obverti oculo.

86. Hinc si libeat uti lentibus plano-convexis; in prima combinatione utraque habebit planum obversum oculo: in secunda combinatione lentes prima, tertia, & quarta habebunt itidem planum obversum oculo, secunda vero obversum objecto. Si autem libeat adhibere formas erroris minimi; pro prima combinatione binæ lentes habebunt binas formas tabulæ ejus numeri 37: pro secunda combinatione primis tribus conveniet prima ex iis formis, quartæ secunda. Sed lens secunda debebit habere positionem contrariam primæ, & tertiæ. Experientia docebit, an necessariæ sint in casu augmenti, & campi majoris hæ formæ, an sufficiant lentes plano-convexæ, quæ exhibent formam generalem, & artificibus expeditam. Potest tamen his exhiberi forma plano-convexa pro prima e binis ocularibus telescopii astronomici invertentis objecta, & pro primis tribus earum quatuor, quas proposuimus pro telescopio terrestri exhibente eadem directa, pro illarum autem secunda, harum quarta adhiberi forma erroris minimi respondentis valori refrangibilitatis cujusdam mediæ vitrorum communium $m = 1,52$, quæ habetur in medio ejus ipsius tabulæ numeri 37, in qua radius primæ superficiei convexæ est ad radium secundæ concavæ, ut 26 ad 10, sive 13 ad 5: nam error minimus ad errorem lentis plano-convexæ obvertentis planum oculo est ibidem in casu radiorum parallelorum, ut 27 ad 29, & in casu convergentium, ut 4 ad 15, nempe pro prioribus illis ocularibus fere æqualis, pro postrema fere quadruplo minor. Ea forma est quidem minus commoda artificibus, sed nec nimis incommoda, cum possit adhiberi constanter eadem. Errores, qui supererunt, poterunt utique esse satis exigui respectu vitiorum, quæ possunt occurrere ob theoriam ocularium nondum satis excultam, ut patebit in Appendice, quam hic subjicimus.

AP-

APPENDIX

AD OPUSCULUM I.

Variæ considerationes circa ocularium systemata.

1. Error figuræ sphæricæ consistit, ut toties jam diximus, in eo, quod segmentum figuræ sphæricæ non colligit in puncto unico omnes radios digressos ex unico puncto, & incidentes in ipsam, licet sint homogenei. Hinc & lens constans binis segmentis sphæricis eos non colligit in unico puncto. Radii, qui incidunt in puncta superficiei propiora axi, incurrunt in ipsum axem remotius quam radii, qui incidunt in puncta remotiora. Hinc in fig. 11 Tab. III radius CE adveniens ad punctum E lentis BB remotius a centro D incurrit in punctum G axis propius puncto D, quam is, qui advenit ad punctum lentis ejusdem remotius ab eodem ejus centro D. Puncta G, I, N, R, *g*, *i*, *n*, *r* determinata calculis, qui habentur in fine capitis I, sunt ea, quæ pertinent ad radium CE infinite proximum axi CD; & quidem nec idipsum prorsus accurate ob neglectam crassitudinem lentis in omnibus iis calculis. Inde fit, ut correctione indigeant omnes valores inventi in calculis iisdem, quæ eo major evadit, quo magis receditur a centro campi. Sed ea correctio evadit operosissima, si adhibendæ sint formulæ generales, quæ pro errore figuræ sphæricæ sunt admodum complicatæ, & continent multos terminos pro singulis lentibus. Ipsæ autem formulæ generales, quæ proferri solent, itidem non sunt accuratæ, ut jam diximus in capite II, cum erui soleant, neglectis quantitatibus ordinum inferiorum, quæ non sunt prorsus exiguæ, ubi aperturæ sunt aliquanto majores respectu radiorum sphæricitatis.

2. Præter defectus valorum inventorum in superioribus calculis hic error figuræ sphæricæ producit alium, qui reddit inutiles plurimas combinationes ocularium, quæ alia incommoda evitant, ob muta-

mutatam formam imaginis curvando nimirum, ut vidimus in capite II, in imagine ipsa lineas, quæ in objecto sunt rectæ. Id videmus itidem, ubi trans lentem distantiæ focalis nimis exiguæ transpicimus objectum proximum interpositâ ipsâ lente in distantia exigua ab oculo, & ab objecto: imago objecti habet suam formam, ubi lens applicatur immediate oculo, & objecto, sed augmentum evadit exiguum: remotâ lente ab utrovis, imago crescit, & evadit maxima in medio, sed distinctio, & forma remanent in parte campi perquam exigua proxima ejus centro: inde versus marginem habetur ingens confusio, & lineæ rectæ transeuntes prope centrum incurvantur plurimum convexitate obversâ centro ipsi. De hoc vitio, & remediis adhibendis ad ipsum saltem minuendum egimus in capite II, sed eorum evolutio requirit tractationem multo fusiorem.

3. Quod pertinet ad confusionem ortam ab errore sphæricitatis, jam exposui in hoc Opusculo, unde ea ortum ducat, nimirum ex eo, quod radii etiam homogenei digressi ab unico puncto objecti non coeant in puncto unico imaginis, sed dispergantur per circellum quendam, ac circelli pertinentes ad diversa puncta objecti congruant sibi invicem parte sui majore, vel minore, prout ipsi circelli sunt majores, vel minores. Quivis circellus ceteris paribus eo est major, quo apertura lentis AA in fig. 1 Tab. I est major. Verum haud difficulter demonstratur, eandem aperturam æquivalere in ordine ad eum errorem aperturæ majori respectu radiorum provenientium a puncto rectæ D'C obliquæ, quam respectu provenientium a puncto axis DC; quamobrem is circellus evadit major in F', quam in F, & eo major, quo punctum F' magis distat ab F ob obliquitatem rectæ D'C majorem. Inde fit, ut distinctio eo sit minor, quo magis disceditur a centro campi. Differentia ejus circelli est exigua, ubi agitur de unica lente, & objecto satis remoto ab ipsa, ac de angulo obliquitatis exiguo. Sed pro objecto propiore, & inclinatione majore crescit quamplurimum: ubi autem plures adhibentur lentes ita, ut reliquæ post primam excipiant radios objecti utcumque remoti jam deflexos ad puncta propiora rectarum DC, D'C, discrimen ejus spatioli quandoque

doque

doque evadit ingens etiam pro radiis digressis a puncto rectæ D'C parum inclinatæ. Id minuit distinctionem in punctis imaginis remotioribus a centro campi, ac pro varia combinatione plurium lentium ita minui potest distinctio, ut etiam in punctis objecti distantibus a centro campi per pauca admodum minuta abeat in caliginem quandam, ac confusionem totalem.

4. Quod pertinet ad curvaturam apparentem linearum rectarum objecti, id exposui in capite II hujus Opusculi, ubi egi etiam de remediis; sed perterritus difficultate ejus argumenti proposui tantummodo nonnulla, quæ pro paucis quibusdam casibus minuunt, non autem penitus tollunt ejus mali causas. Indicavi formulas, quæ eo pertinent, sed eæ sunt nimis complicatæ, & plures ex iis erutæ sunt negligendo quantitates ordinum inferiorum. Porro hæ quantitates non sunt ita exiguæ, ubi apertura non est exigua: si ea sit dimidia radii sphæricitatis, assumit fere 15 gradus hinc, & inde a centro ipsius; qui possunt relinquere metum a quantitatibus neglectis: iis autem etiam neglectis, complicatio formularum adhuc evadit ingens: nam pro unica lente in formulis eo pertinentibus habentur *6* termini, qui multiplicato lentium numero usque adeo excrescunt, ut nullam relinquant spem destruendi hoc vitium ope generalium ejusmodi formularum.

5. Augetur difficultas ab effectu crassitudinis lentium, quæ si debeat involvi in ipsis formulis generalibus, reddit calculum adhuc multo magis operosum, ac prorsus inextricabilem. Quamobrem videtur non alio pacto inquiri posse in magnitudinem hujus vitii pertinentis ad datam quampiam combinationem ocularium, nisi determinando, ut proposui in fine capitis II hujus Opusculi, ope Trigonometriæ viam radii remotioris ab axe post singulas refractiones singularum superficierum, habitâ semper ratione numeri graduum distantiæ ab axe, & distantiæ superficiei sequentis a præcedenti. Ea via comparabitur cum via radii infinite proximi axi, quæ erui potest facilius e formulis generalibus. Tum demum apparebit, an, & quantum distet focus pertinens ad punctum objecti situm in fine campi a foco pertinente ad punctum

infinite proximum. Is calculus erit numericus tantummodo, longus utique, sed simplex, & facilis. Inventâ quantitate ejus erroris in combinationibus, quæ destruant colores, quæ quidem habent præterea plures quantitates indeterminatas, fieri poterunt in iis mutationes, quæ ejusmodi effectum minuant, si forte totum impedire non possunt.

6. Error ejusmodi non potest destrui in lente unica, nisi pro radiis habentibus punctum dirigens situm intra certos quosdam limites: pro parallelis omnino non potest, sed pro iis determinatur tantummodo combinatio radiorum sphæricitatis, quæ ipsum reddat minimum. In duabus lentibus conjunctis, quarum altera sit convexa, & altera concava, potest corrigi penitus pro radiis incurrentibus in finem aperturæ, & id præstatur in objectivis acromaticis. Utrumque autem præstitimus in capite II hujus Opusculi, & quidem hoc secundum pro binis lentibus conjunctis ex eodem vitri genere. An ubi omnes lentes sint convexæ, uti solent esse in ocularium combinationibus, possit idem error penitus destrui, destruentibus se mutuo erroribus omnibus ita, ut summa evadat nulla; & quæ sit ratio minuendi saltem, quantum maxime fieri possit, ejusmodi vitium; id sane requirit longam admodum, & implexam perquisitionem, ac observationes plurimas requirit determinatio limitis, usque ad quem effectus ejus erroris effugit sensus ita, ut tolerari possit. Campus hic aperitur uberrimus, per quem & theoria, & observatio practica possit excurrere, nec unquam sane telescopiorum theoria perfici poterit, nisi perficiatur hæc theoria ocularium, quæ huc usque parum admodum exculta est.

7. At ego hic quidem vix primum limitem prætergressus consistam contentus iis, quæ in postremo hoc Opusculo proposui de natura, & remediis tam colorum inductorum ab ocularibus ob errorem diversæ refrangibilitatis, quam confusionis, & deformationis imaginis provenientium ab ipsarum errore sphæricitatis. Addam tantummodo enumerationem conditionum, quas debet habere systema ocularium, ut careat omni vitio, & quas omnes habere debet ob oculos, qui hanc Opticæ partem suscipiat excolen-

lendam. Primo quidem ab ocularibus collatis cum distantia focali objectivi pendet augmentum, quod debet curari, quantum maximum ferre potest perfectio objectivi, & cui cæteris paribus debet esse proportionalis diameter aperturæ ipsius objectivi. Plures regulæ pro pluribus casibus occurrunt in hoc ipso Opusculo, ut & methodus generalis, quam proposuimus, determinandi augmentum ope formularum generalium pro particulis objecti proximis centro campi, & alia, quam indicavimus, obtinendi ejus determinationem ope calculi trigonometrici pro omnibus utcumque remotis. Id augmentum exhibetur a relatione anguli, quem radius adveniens a puncto objecti sito extra axem ad centrum objectivi continet ibidem cum axe ipso, ad angulum, quem idem continet cum eodem axe post suum egressum e lente postrema: ubi autem agitur de distantia puncti objecti a centro campi, in quod concipiatur defixus oculus, potest augmentum æstimari a tangente hujus postremi anguli divisa per tangentem illius primi: ubi autem de magnitudine apparenti particulæ objecti visæ oculo in eam directo, augmentum æstimari poterit ab angulo, quem continent radii profecti ex binis ejus extremis in egressu ex ultima lente, diviso per angulum, quem iidem subtendunt in centro objectivi; cum nimirum angulus, quem habent in egressu, exprimat magnitudinem apparentem trans telescopium, & angulus, quem habent in centro objectivi, magnitudinem apparentem nudo oculo.

8. Quæ augmenta possint convenire diversis distantiis focalibus objectivorum, supposità æquali exactitudine operis, id quidem multo melius determinatur per observationes, quam ope theoriæ: pro telescopiis communibus habentibus objectivum simplex solebat adhiberi regula, quæ videbatur conformis theoriæ errorum parientium confusionem, per quam regulam augmenta deberent esse, ut radices quadratæ distantiarum focalium objectivorum: quanquam generaliter pro objectis magis lucidis potest adhiberi augmentum majus, quamobrem plures combinationes sæpe parari solent pro iisdem objectivis, quarum aliæ adhibeantur in aliis circumstantiis. Pro acromaticis nondum, quod ego sciam, habetur quidquam satis definitum in eo genere: nihil pro ea re definiri posse arbitror

 ex

ex pura theoria tum ob alias rationes, tum quia objectivum, quod appellatur acromaticum, & componi solet e binis substantiis, non colligit, ut jam toties diximus, in unico foco nisi duo tantummodo genera filorum coloratorum: reliqua genera quantum aberrent, nondum per observationes determinatum est, nec vero unquam generaliter determinabitur, si ea aberratio in diversis substantiarum binariis est diversa. Adhuc tamen hujus aberrationis perquisitio pertinet ad perfectionem ocularium, & longa series observationum instituta in telescopiis hujus generis poterit subministrare regulas quasdam, quæ artificibus proponantur observandæ, nisi pro singulis objectivis tentare velint plures combinationes, quarum aliæ exhibeant alia augmenta, ut inveniatur illud, quod pro eo ipso objectivo eligendum esse videatur præ cæteris omnibus.

9. Distinctio pendet partim ab objectivo, partim ab ocularibus. Distinctio maxima, quam potest exhibere datum systema ocularium conjunctum cum dato objectivo, acquiritur per distantiam debitam primæ ocularis ab objectivo, quæ pro quovis systemate ocularium invenitur methodo exposita num. 190 capitis I; quin immo pro diversa oculi constitutione invenitur protrudendo introrsum, extrorsum tubulum, qui continet id systema. Verum hæc ipsa distinctio respondens dato objectivo, & datæ combinationi potest esse major, vel minor: objectivo existente acromatico est major, & est major, si figura debita est accuratior: pari perfectione objectivi est eo minor, quo est major apertura ipsius, & augmentum, quod dum auget imaginem, auget simul ejus errores: verum pendet etiam a bona constitutione ocularium, pari etiam augmento. Esset prorsus accurata distinctio, si radii omnes digressi a quovis unico puncto objecti possent egredi e postrema lente paralleli inter se, vel pro diversa constitutione oculorum divergentes ab unico quodam puncto, aut convergentes ad unicum quoddam punctum. Quo majus est discrimen ab ea conditione, eo minor est distinctio. Cum datis vitrorum qualitatibus refractivis, & distractivis liceat satis accurate ope formularum obtinere viam radii cujusvis proximi axi, & ope Trigonometriæ

triæ viam remotioris cujusvis trans superficies quotcumque, quarum innotescant radii sphæricitatum, ac mutuæ distantiæ; potest semper obtineri ope calculi quantitas erroris residui tam pro punctis objecti proximis axi, quam pro utcumque remotis: calculus esset admodum molestus, & longus; sed tamen per ipsum id obtineri omnino posset. Verum oporteret posse habere formulas generales, & quidem simplices ad videndum, an possit pro omnibus obtineri accurata distinctio, quod arbitror fieri non posse, vel saltem ad eligendum errorem distinctionis minimum, qui cum cæterorum vitiorum correctione conjungi possit.

10. Sæpe accidit, ut distinctio sit satis bona in centro campi, & habeatur confusio in ejus margine, ac protruso introrsum tubulo continente combinationem ocularium acquiratur distinctio in campi margine, succedente confusione in centro, de quo vitio jam in superioribus mentionem injecimus. Id semper accidit in telescopio habente unicam ocularem cum campo, & augmento nimis magno. Focus F' (fig. 1.) pro radio D'C obliquo, & ejus sociis est propior puncto C, quam F, adeoque differentia distantiarum, quas habent ea puncta a G, debet esse adhuc major, & tamen ad habendam eandem distinctionem in utroque puncto imaginis deberent eæ distantiæ parum differre a se invicem. Quærendum inprimis, an ad æqualitatem distinctionis requiratur accurata æqualitas earum distantiarum, vel quæ sit differentia ipsarum ad id necessaria: tum si ea non possit obtineri per unicam lentem, quæ sit combinatio radiorum sphæricitatis, quæ salvis cæteris reddat minimum id vitium: sic exempli gratia si lens BB sit concavo-convexa concavitate obversâ punctis F, F'; punctum G' ita adducitur ad F' aliquanto magis, quo pacto videtur posse corrigi ex parte is error: sed videndum, an is accessus revera ipsum minuat, & quantum: ex alia vero parte ea cavitas requirit curvaturam multo majorem superficiei convexæ ad habendam eandem distantiam focalem, quæ requiritur exigua pro satis magno augmento. Videndum autem præterea, an ubi plures lentes oculares adhibentur, diversa combinatio, quæ æque evitet cætera vitia, possit efficere, ut ubi habetur postrema imago objecti

in

in foco postremæ lentis, ut in OO', fieri possit, ut eorum punctorum positio respectu ipsius lentis postremæ sit ea, quæ requiritur ad eam distinctionum æqualitatem, vel saltem, quo pacto discrimen possit reddi minimum, mutatis lentium curvaturis, & distantiis mutuis.

11. Aliud vitium, de quo egimus in capite II hujus Opusculi, est illud imaginis deformatæ per curvaturam linearum rectarum objecti. Videndum, an possit corrigi penitus, an saltem ex parte satis magna, & per quas mutationes sphæricitatum in lentibus omnibus possit reddi minimum. Utrumque ex hisce binis vitiis minuitur semper, imminutâ aperturâ utili lentium, quæ minuitur, imminutâ aperturâ diaphragmatis, quando tota ejus apertura est libera ab impedimento, quod induceret apertura ocularis cujuspiam justo minor. Sed iis aperturis imminutis minuitur campus. Jam egimus hìc etiam de campi magnitudine: sed oporteret determinare combinationes, quæ, correctis quam maxime fieri potest iis erroribus, relinquant campum satis magnum. Partim per theoriam, partim per observationes oporteret invenire regulas generales pro magnitudine campi omnium maxime opportuna, conjungenda cum correctione cæterorum defectuum. In superioribus assumpsimus aperturas habentes rationem non majorem quadam data ad distantiam focalem, seu etiam ad radios sphæricitatum: at ratio accurata pro minimis ejusmodi erroribus videtur debere esse diversa pro diverso situ puncti dirigentis radios incidentes: id ipsum diligentem perquisitionem requirit.

12. Accedit cæterorum vitiorum correctioni correctio separationis colorum, de qua fuse egimus in hoc Opusculo. Et quidem hìc egimus de correctione distractionis binorum: sed ubi duo fila diversarum specierum prodeunt parallela; non idcirco prodeunt omnia, ut & de objectivo acromatico diximus. In eo tres substantiæ possunt habere ejusmodi qualitates refractivas, & distractivas, ut uniantur tres colorum species. Possent ita variari ocularium superficies, & distantiæ, ut corrigatur distractio non duorum tantum, sed plurium simul. Id pendet a discrimine valorum $\frac{dm}{m-1}$, ubi dm pertinet ad diversa colorum binaria. Sæpe ac-

accidit ob id ipsum discrimen, ut colores, qui observantur in punctis campi lucidis satis remotis ab ejus centro, non sint extremi, ut rubeus, vel violaceus, nec vinaceus ortus ex iis commixtis, sed alii compositi. Verum saltem curandum erit, ut conjungantur duo, quibus conjunctis reliqui solent parum distare ab ipsis.

13. Aliud vitium pertinens ad colores occurrit sæpe in telescopiis, ut nimirum margo campi appareat coloratus, quod ejus distinctionem impedit. Id habetur potissimum, ubi vel omnino desit diaphragma, vel apponatur in foco citeriore lentis postremæ. In fig. 11 si nullum adsit diaphragma, campus terminatur cum apertura lentis cujuspiam, ut B'''B''' in P. Ibi fila pertinentia ad objectum situm in margine campi non habentur omnia, sed solum quædam eorum pars, parte cadente extra lentem: itidem eorum pars habetur, si campus terminetur per diaphragma collocatum in TT'. Evitarentur ibi colores, si punctum S abiret in T': sed si id eo abeat, non poterunt fila PR, *pr* egredi parallela, nisi factâ acromaticâ lente postremâ. Hinc ubi adhibentur lentes ex eadem materia, non potest punctum S eo abire, nec possunt colores evitari in campi margine eo pacto. Evitabuntur, si diaphragma ponatur in FF', & objectivum sit acromaticum; quia in F' habebuntur omnes radii pertinentes ad idem punctum objecti situm in margine campi, qui deinde si prodeant omnes ex postrema lente cum directione eadem, unientur in oculo, & colores evitabuntur in margine campi, ut in quovis puncto lucido objecti sito intra campum. Solum, quoniam, ut toties jam diximus, objectiva ipsa, quæ appellantur acromatica, non colligunt nisi duo colorum genera, reliquis extantibus nonnihil ad latus; non poterunt evitari omnes penitus colores in margine campi, ut nec penitus omnes in puncto objecti lucido posito intra campum: ipsi poterunt esse ita exigui, ut transpicienti per telescopium non percellant sensum: sed in imagine solis transmissa per ipsum telescopium, & excepta in aliqua distantia non exigua semper apparebunt aliqui tam in margine ipsius imaginis, quam in margine campi.

14. Que-

14. Quæri itidem potest, an, adhibito objectivo simplici, distractio facta ab ipso, & expressa in fig. 1 possit corrigi per oculares ex eadem materia. Credo omnino, id fieri non posse, si omnes oculares adhibitæ sint convexæ. Quæri potest, an id fieri possit permiscendo lentes concavas convexis: credo itidem tamen etiam si forte id possit, rem fore inutilem ex alio capite: nam censeo, eam permixtionem obfuturam augmento, & campo: sed id itidem meretur perquisitionem accuratam.

15. Inter conditiones, quas debet habere systema lentium ocularium carens omni vitio, considerandum est etiam incommodum a pulveribus adhærentibus lenti cuipiam, qui incurrunt in oculos in quibusdam ocularium combinationibus: id evitari debet quantum fieri potest. Pulveres aspersi objectivo non possunt afficere visum: ii tantum intercipiunt partem radiorum pertinentium ad quodvis punctum objecti, relictâ liberâ viâ cæteris omnibus transeuntibus inter ipsius pulveris particulas. Evadunt sensibiles, si adhæreant cuipiam oculari, cui sit nimis proximum punctum dirigens radios incidentes in ipsam. In fig. 10 radii pertinentes ad punctum objecti situm in axe detorti ab objectivo ad punctum F occupant in superficie primæ lentis circellum habentem pro diametro 2 DE, in secunda 2 D'H, in tertia 2 D''M, in quarta 2 D'''P. Si is circellus sit multo major, quam singula pulverum granula, & hæc distent a se invicem; tum ea granula non intercipient nisi partem exiguam radiorum pertinentium ad id objecti punctum, reliquis devenientibus ad oculum; adeoque ea granula non impedient visum illius puncti objecti: cumque pro radiis aliorum punctorum sitorum intra campum id spatiolum sit magnitudinis fere ejusdem, ut sunt in fig. 1 spatiola HH, H'H', nullum objecti punctum tegetur ab iis granulis. Sed si ea spatiola sint minora, vel majora excessu nimis exiguo iisdem granulis; tum, particulis objecti penitus, vel fere penitus contectis ab ipsorum interpositione, ea incurrent in oculos.

16. Facile est, dato systemate ocularium, & objectivo, computare ea spatiola: calculus est prorsus similis calculo aperturarum figuræ 11. Erit ut CF ad FD, ita apertura objectivi = 2CA

2CA ad 2DE : tum GD : GD' : : 2DE : 2D'H ; deinde D'I : D''I : : 2D'H : 2D''M; ac demum D''N : D'''N : : 2D''M : 2D''P. Si jam granula pulverum supponantur certæ cujuspiam magnitudinis, ut $\frac{1}{20}$ lineæ, comparari poterunt cum iis spatiolis. Patet autem, ea spatiola cæteris paribus fore eo majora, quo apertura objectivi fuerit major, quæ cum sit semper major in telescopiis habentibus objectivum acromaticum, in iis telescopiis eorundem pulverum incommodum erit metuendum minus : patet itidem, ea spatiola eo fore majora, adeoque eo minus timendum periculum ipsorum pulverum, quo distantiæ FD, GD', D''I, D'''N erunt minores. Hæc postrema semper erit æqualis distantiæ focali lentis postremæ. Sola autem experientia potest docere, quæ magnitudo granulorum pulveris adhærentis ocularibus timeri debeat, & quæ ratio inter ipsa, & ea spatiola reddet incommodum sensum ipsorum pulverum. Pulveres majores, vel nimis densi apparebunt utique semper, & ii evitari debent detergendo lentes ipsas, si nimis sordescant.

17. Hoc pacto enumeravimus omnia, quæ considerari debent in systemate ocularium ad seligendum systema, quod reliquis præstet, in quo argumento satis patet ex iis, quæ proposuimus, quantum itineris adhuc remaneat ad perficiendam earum theoriam. Ei perquisitioni in hoc Opusculo vix apertus est aditus, excultâ aliquanto magis ea parte, quæ pertinet ad colores, & ad remedia adhibenda erroribus ortis a figura sphærica. Ut unico intuitu videri possit id, quod requiritur ad perficiendam theoriam ocularium, en conditiones præcipuas, quæ habendæ sunt ob oculos : 1°. distinctio in campi centro : 2°. distinctio æqualis in centro, & in margine : 3°. impedimentum deformationis figuræ : 4°. incrementum satis magnum : 5°. incrementum æquale prope centrum, & prope marginem, ne figura deformetur : 6°. correctio distractionis colorum : 7°. campus, & in ejus gratiam systema aperturarum utilium ipsarum ocularium, & diaphragmatis : 8°. impedimentum incommodi a pulveribus. Pro iis omnibus quærendum est maximum commodum proveniens ex omnium summa. Quantitates, quæ variari possunt, sunt pro singulis lentibus habentibus

eandem distantiam focalem bini radii sphæricitatum : series aperturarum, quarum reliquæ omnes pendent a mutatione unius ex ipsis tantummodo, ipsis autem aperturis, & radiis respondent crassitudines : distantia lentis primæ ab objectivo, & sequentium a præcedentibus : addi possent etiam substantiæ diversæ in ordine ad qualitates refractivas, & distractivas. Omisso etiam hoc postremo capite, in solo systemate quatuor lentium habentur quantitates indeterminatæ $8+1+3=12$. Nam in primo capite singulæ e quatuor lentibus habent binos radios, qui variari possunt utcumque, si non sit determinata distantia focalis, & si ea determinetur, assumptâ distantiâ focali ad arbitrium, remanet determinandus ad arbitrium unus e binis radiis, quo determinato, & determinatâ distantiâ focali, alter radius remanet itidem determinatus. Hinc pro singulis lentibus habebuntur binæ indeterminationes, nimirum vel bini radii sphæricitatum, qui determinati determinant distantiam focalem in data vitri specie, vel distantiæ focalis, & alterius e binis radiis : adeoque cum lentes sint quatuor, possunt considerari ex hoc capite indeterminationes octo. Secundum caput seriei aperturarum exhibet unicam, cum determinatis distantiis focalibus, & distantiis lentium ab objectivo, ac inter se, & unicâ ex aperturis utilibus, determinentur reliquæ omnes. Tertium caput distantiarum mutuarum in systemate quatuor lentium ocularium contineret indeterminationes quatuor, nimirum primæ lentis ab objectivo, secundæ a prima, tertiæ a secunda, quartæ a tertia : sed unam ex iis indeterminationibus aufert necessitas ita collocandi postremam lentem, ut radii digressi ex unico puncto objecti coeant in ejus foco citeriore. Quamobrem ex eo capite habentur tres indeterminationes : adeoque omnes simul sunt 12; dum conditiones obtinendæ per earum variationem propositæ numero præcedenti sunt tantum 8. Quare patet, problema, quo quæratur combinatio omnibus anteponenda, esse adhuc admodum indeterminatum, præterquam quod est admodum complicatum. Hinc ejusmodi perquisitio longam admodum attentationem requirit, longam seriem calculorum, & observationum.

SUP-

SUPPLEMENTUM

OPUSCULI PRIMI.

De distributione luminis refracti a lentibus per circellum exprimentem errorem figuræ sphæricæ.

1. Ubi radii lucis incidunt in unam, vel plures lentes, & ab iis detorti per refractionem exhibent imaginem objecti, ea imago esset maxime distincta, si radii a quovis objecti ipsius puncto profecti in unico puncto colligerentur. At obstat tam figura sphærica, quam diversa radiorum refrangibilitas. Figura sphærica radios etiam homogeneos non colligit accurate in unico puncto; sed ii, qui incidunt propiores axi, coeunt cum ipso axe in puncto remotiore ab ipsa lente, quam qui incidunt remotiores. Quod si etiam lens illos colligeret in unico puncto; diversa diversorum colorum refrangibilitas efficeret aberrationem, quæ cum illo errore figuræ sphæricæ conjungitur, cum nimirum radii violacei citius coeant, quam rubei.

2. Secluso mente errore figuræ sphæricæ, radii omnes heterogenei colliguntur in circello, & ipse error figuræ radios omnes homogeneos adhuc intra circellum continet, quos circellos consideravimus in prima dissertatione impressa in parte prima Tomi V Academiæ Bononiensis, ac eos, ubi minimi sunt, inter se contulimus, atque invenimus proportionem diametrorum generalem, quæ in casu considerato a Newtono eandem nobis rationem exhibuit, quam ipse in Optica sua sine demonstratione proposuerat, quæ aliquot millibus vicium reddit majorem diametrum in illo errore diversæ refrangibilitatis, quam in hoc figuræ sphæricæ.

3. Newtonus quidem in eodem illo errore diversæ refrangibilitatis consideraverat etiam distributionem totius luminis per ipsum circellum, & proposuerat tam rationem, in qua variatur ejus densitas in progressu a centro ad peripheriam, quam eam, quæ ex-

primat, quota pars totius luminis contineatur in quovis minore circello concentrico continente partem areæ totius circelli exprimentis eum errorem. Determinatio ab illo exhibita Opticæ parte I libri I prop. 7 huc redit. In nostra figura 1 (*) COC', ut mox videbimus, exprimit diametrum circelli erroris figuræ sphæricæ; sed si hic ea recta sumatur pro diametro ejus, qui pertinet ad refrangibilitatem, & sumatur quodvis punctum H inter centrum O, & peripheriam; densitas luminis erit ibi proportionalis fractioni $\frac{HC}{CO}$, quantitas autem luminis in circello, cujus radius OH, ad totum lumen est, ut differentia quadratorum OC, CH ad quadratum OC: unde patet, densitatem in centro, evanescente HO, abire in infinitum, perpetuo autem minui versus marginem C, in quo, evanescente HC, evanescat etiam ipsa; quantitatem vero luminis fore dimidiam quantitatis totalis in eo circello, in quo quadratum CH fuerit dimidium quadrati OC, quo casu lumen in eo ipso circello erit æquale lumini annuli residui HC.

4. Proportionem illam Newtoni ego quidem accurate, & methodo admodum simplici demonstravi in parte 2 dissertationis de lumine impressa anno 1748, quam quidem demonstrationem inde descriptam huic dissertationi adnectam in fine. Libet nunc perquisitionem eandem instituere in circello pertinente ad errorem figuræ sphæricæ, quæ quidem perquisitio plurimi interest, ubi ii errores inter se comparantur, cum sensus a lumine excitatus pendeat omnino ab ipsius densitate, & copiâ luminis in dato spatiolo collecti (**). Ad hanc perquisitionem proderunt plurimum ea,

(*) Omnes hujus supplementi figuræ habentur in Tabula V, quod hic semel monuisse sit satis.

(**) En autem quid demum invenerim; nam diuturnæ, & admodum molestæ perquisitionis fructum hic paucis exponam in antecessum.

Circellus C'OC continens in minimo spatio radios omnes homogeneos refractos ab apertura F'AF cadit inter B concursum radiorum extremorum, & I ultimam intersectionem infinite proximorum axi, triplo propior illi, quam huic.

Ejus

ea, quæ in memorata Bononiensi dissertatione sunt demonstrata (*).

5. Re-

Ejus diameter, mutatâ aperturâ, est in ratione triplicata aperturæ ipsius, & sesquiplicata rectarum IO, OB, IB.

Ad quodvis punctum H ipsius diametri deferuntur radii numero tres a tribus aperturæ punctis P, P', P'', quæ sic inveniuntur. Centro O, intervallo OI describatur circulus occurrens ipsi IO productæ in R: in IR productâ tantundem in E capiatur IG, quæ sit ad ipsam IE, in duplicata ratione OH ad OC: centro R, intervallo RG inveniatur in peripheria circuli punctum K. Sumatur arcus RM triens RK, tum MM', MM'' trientes totius peripheriæ, posito M' in semicirculo RKI, vel in opposito, prout fuerit IG minor, vel major, quam IR: centro R intervallo RM, RM', RM'' inveniantur puncta N' versus I, & N, N'' versus E: erigantur perpendiculares ad IE rectæ NT, N'T' in directione OH, & N''T'' in opposita, quæ sint ad OC in ratione sesquiplicata IN, IN', IN'' ad IO (nimirum ut $IN^{\frac{3}{2}}$ &c. ad $IO^{\frac{3}{2}}$).

Rectæ ductæ ex H per puncta T, T', T'', determinabunt quæsitas directiones radiorum PH, P'H, P''H.

Ad singula puncta C, C' peripheriæ circelli deferuntur bini tantum radii, & ad centrum O numero infiniti.

Lumen, quod ingeritur in quemvis annulum H*h* ab annulo intermedio P*p*; æquatur ingesto a reliquis binis P'*p*', P''*p*'' simul.

Factis O*q*, O*q*' ad OC in subduplicata ratione 1 ad 2, circello interiore *q*'O*q* continetur dimidium totius luminis contenti toto circello C'OC, reliquo dimidio contento in annulo exteriore *q*C, qui est ipsi circello interiori æqualis.

Ubicumque fuerit punctum H, lumen contentum annulo H*q* ad dimidium luminis totalis, nimirum semidifferentia luminis contenti circello interiore OH, & annulo exteriore HC ad semisummam est, ut chorda RM ad radium OR.

Densitas luminis in quovis loco H est reciproce, ut differentia quadratorum ejusdem chordæ RM, & radii OR, quæ densitas idcirco in margine C, C', & in centro O excrescit in infinitum, est autem minima in punctis *q*, *q*'.

Ea densitas minima ad mediam, quæ haberetur, si totum lumen æqualiter diffunderetur per totam aream circelli C'OC, est ut 2 ad 3, quod quidem acuit sensum erroris figuræ sphæricæ per totum circellum.

Continentur hic horum omnium demonstrationes cum tota investigationis ratione, & pluribus animadversionibus scitu non indignis.

(*) Quæcumque habentur ibi, quæ sint necessaria pro demonstrationibus hic instituendis, habentur itidem hic in Opusculo II Tomi I. Citationes, quæ hic proferuntur in textu, referuntur ad numeros illius dissertationis Bononiensis: verum pro iis, quæ hic erunt necessaria, indicabimus in adnotationibus loca ejus ipsius Opusculi secundi: quæ autem pertinent ad naturam causticæ, indicata hic, ut demonstrata ibi; demonstrantur deinde in hac ipsa dissertatione, & quidem multo facilius a num. 7.

5. Referat recta F'F in figura 1 Tab. V lentem, a qua radii detorqueantur ad axem AI: ostensum est ibi (idem autem etiam in Opusculo II Tomi I horum Operum, & in hoc I Tomi II), radios quidem, qui incidunt in puncta propiora axi, serius convergere prope punctum quoddam I, quod sit ultimus limes concursuum omnium cum ipso axe, & consideratur, ut focus radiorum infinite proximorum axi, veluti radius P'H, qui appellit ad punctum axis L' proximum puncto I, tum reliquos, quo magis remoti incidunt ex parte utravis, eo citius ad ipsum devenire, ut PH in L, P''H in L'', postremos autem, qui incidunt in puncta extrema aperturæ F'F, omnium citissime in quodam puncto B, exprimente BI errorem rectilineum respondentem toti aperturæ habenti semidiametrum AF. Porro is error ibi determinatur generaliter ita, ut respondeat cuivis aperturæ non nimis magnæ. Determinatur autem ex data superficierum curvatura, qualitate refractiva, & amplitudine aperturæ, appellatâ nimirum AP semidiametro aperturæ e, invenitur pro errore rectilineo formula continens valorem datum per ipsam qualitatem refractivam substantiæ, e qua lens constat, & radios sphæricitatum, ductum in e^2, quæ formula cum exprimat distantiam concursus L ab I, inde patet, errorem ejusmodi rectilineum LI esse, ut quadratum semidiametri aperturæ AP.

6. Porro satis patet, radios ejusmodi contingere perpetuo in punctis quibusdam T, qui sunt ultimi limites intersectionum radiorum proximorum, curvam quandam continuam, quam Geometræ causticam appellant, quam ibidem consideravimus a numero 69. Numero 71 inventum est, causticam hujusmodi in hoc lentium casu prope punctum I accedere in infinitum ad naturam parabolæ gradus tertii, in qua quadrata ordinatarum sunt ut cubi abscissarum computatarum ab ipso puncto I, ubi ejusmodi parabola habet cuspidem efformatam ab arcubus ICD', ICD tangentibus hinc, & inde axem medium IOA. Radii incidentes in F', F eam tangunt in punctis D', D, quæ puncta erunt æque remota ab axe, ac is rectam DD' secabit bifariam, & ad angulos rectos in E, si ipsa puncta F', F pariter æque ab eo distant:

tum

tum ii radii progressi ultra B secant arcus ipsius oppositos in C, C' ita, ut & C'C secetur ab axe eodem bifariam itidem, & ad augulos rectos in O. Demonstratum est autem num. 72, fore subtangentem ad abscissam computatam ab I, ut 2 ad 3, adeoque $EB = \frac{1}{3}EI$, & proinde IB trientem IE, ut etiam illud, fore IO quadrantem ipsius IE, adeoque $IB : IO :: 4 : 3$, & BO trientem IO: fore itidem $C'C = \frac{1}{8}D'D$. Ipsum circellum descriptum diametro C'OC esse spatium minimum omnium eorum, quæ radios omnes excipiunt, demonstratum est num. *69* ex eo, quod versus E se expandat caustica, versus I latera BC', BC anguli C'BC.

7. Ea omnia sine ullo calculo infinitesimali, quo ibi usi sumus, quanquam admodum elementari, sic demonstrabuntur multo facilius ex hisce solis lemmatis, quod error rectilineus IL in diversis aperturis sit, ut quadratum semidiametri aperturæ AP, & quod is error, ubi aperturæ non sint ita enormes, sit perquam exiguus respectu distantiæ foci AI: ea satis sunt nota, & immediate deducuntur ex ipsa expressione erroris hujusce determinatâ in eadem dissertatione (*).

8. Sint in fig. 2 bini radii infinite proximi PL, *pl*, quorum intersectio T haberi poterit pro contactu, in quem ea desinit, ubi demum *pl* desinit in PL, & rectæ ex T, ac L parallelæ AP occurrant illa axi in N, hæc radio *pl* in H. Primo quidem factâ $\frac{AP^2}{IL} = 1$, quod quidem licet, cum ob IL proportionalem quadrato AP valor ejus fractionis sit constans, erit $AP^2 = IL$, adeoque $AP^2 - Ap^2$, sive $2AP \times Pp = Ll$, nimirum $Pp : Ll$ :: 1

(*) Eadem expressio habetur & hic in Opusculo II Tom. I, cujus caput I excerptum est e dissertatione eâdem. Eâ usi sumus etiam in hoc Tomo II numer. 21 capitis II hujus Opusculi I. Valor erroris longitudinalis est $r^2 p$, & p habet pro factore r^2 quadratum semiaperturæ, quod statim offert proportionalitatem erroris longitudinalis sphæricitatis cum quadrato semiaperturæ, & exiguitatem ipsius ob exiguitatem aperturæ, respectu distantiæ focalis. Porro ex hac eadem expressione deduximus num. *99* supplementi II Opusculi II Tomi I hujusmodi theorema pro errore longitudinali sphæricitatis: *is erit in ratione composita ex duplicata directa aperturæ, & reciproca simplici distantiæ focalis.*

:: 1 : 2 AP. Deinde habebuntur e triangulorum similitudine sequentes proportiones AN : NL :: PT : TL :: Pp : LH, & Ap : Al, sive (ob ultimam congruentiam punctorum P, p, & L, l) AP : AL :: LH : Ll. Igitur habitis AN, AL pro æqualibus ob ingentem distantiam puncti A a punctis N, L proximis sibi invicem, & puncto I, erit ex æqualitate perturbata AP : NL :: Pp : Ll :: 1 : 2AP. Quare NL = 2AP². Cum igitur sit IL = AP², erit NL = 2IL, & IL pars tertia abscissæ IN, quæ ipsa abscissa erit idcirco, ut quadratum ipsius AP.

9. Hinc autem habebitur $AL^2 : NL^2 = \frac{4}{9} IN^2 :: AP^2 = IL = \frac{1}{3} IN : NT^2 = \frac{4IN^3}{27AL^2}$. Cum igitur AL haberi possit pro AI constanti; erit NT^2, ut IN^3, sive quadratum ordinatæ, ut cubus abscissæ, quæ est natura parabolæ gradus tertii, quam supra nominavimus.

10. Inde vero consequuntur omnia, quæ diximus. Nam in fig. 1 abeunte T in D, abit L in B, & est IB triens IE: assumptâ vero $OB = \frac{1}{4} IB$, adeoque $= \frac{1}{8} BE$, & erectâ OC' normali ad axem usque ad concursum cum DB in C', erit $OC'^2 : ED^2 :: OB^3 : BE^3 :: 1 : 8 \times 8 = 64$: & pariter est $IO^3 : IE^3 :: 1 : 4 \times 4 \times 4 = 64$ (*). Quare cum & quadratum ordinatæ erectæ ex O ad ED^2 debeat esse, ut IO^3 ad IE^3, erit OC' ordinata ad curvam, quam idcirco ibi secat iterum tangens FDB: cumque eadem sit ratio pro puncto C, patet, diametrum COC' circelli continentis in minimo spatio omnes radios esse ad rectam D'ED, ut OB ad BE, nimirum ut 1 ad 8, & ejus distantiam IO a vertice cuspidis I esse quadrantem totius axis IE (**).

11. O-

(*) Nam IO est $= IB - OB = \frac{3}{4} IB$, & $IB = \frac{1}{3} IE$, adeoque $IO = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} IE = \frac{1}{4} IE$.

(**) Patet autem, fore $AB : FF' :: BO = \frac{1}{4} IB : CC'$, sive $IB : CC' :: 4AB : FF'$, quod est secundum e binis theorematis adhibitis num. 101 ejusdem supplementi II Opusculi II Tomi I, ubi sic habetur. *Error longitudinalis ad diametrum erroris circularis est pro refrangibilitate, ut dupla distantia focalis ad*

11. Oportet jam videre, qua lege distribuatur totum lumen per planum ejus circelli, nimirum primo quidem, quæ sit ratio densitatum in punctis quibusvis assumptis intra ipsum in quovis plano secante totum solidum spinale causticæ respondens toti lenti circumquaque circa axem, quod planum refert figura 1, ita, ut solidum ipsum spinale generetur conversione dimidiæ ipsius figuræ circa axem AI: tum vero, quæ sit ratio totius luminis ad partes contentas circello genito ab OH, & residuo annulo genito ab HC.

12. Ad ea determinanda proderit plurimum prius investigare, quot, & qui radii PL deferantur ad quodvis punctum H, & in quibus angulis, sive quæ futura sit pro iis radiis ratio distantiarum AP ad semidiametrum totius aperturæ AF, quibus semel determinatis, cætera omnia inde admodum facile consequentur. Porro id quidem totum præstatur expeditissime per analysim admodum elementarem, & constructionem sane elegantissimam.

13. *Problema* 1. Invenire radium, qui debeat appellere ad quodvis punctum H datum in quovis radio OC circelli CC'.

14. Assumpta ES versus $I = IO$, erit $SI = 3IO$, $NI = 3IL$, adeoque $SN = 3OL$: est autem $IO^3 : IN^3 :: OC^2 : NT^2$, & $LN^2 = \frac{4}{9}IN^2 : LO^2 = \frac{1}{9}SN^2 :: NT^2 : OH^2$. Quare conjunctis rationibus, & demptis communibus $\frac{1}{9}NT^2$, IN^2, erit $4IO^3 : IN \times SN^2 :: OC^2 : OH^2$, nimirum $IN \times SN^2$ quantitas data, cum dentur reliqua in ea proportione (*): inde facile eruitur æquatio

 com-

ad aperturam, & pro sphæricitate ut quadrupla eadem distantia ad eandem aperturam. Primum patebit in Additamento hujus supplementi paullo inferius. Cum autem error longitudinalis IB sit in ratione duplicata aperturæ ex adnot. ad num. 7, & hic ad habendum valorem CC' is debeat adhuc multiplicari per diametrum aperturæ ipsius FF', ac dividi per quantitatem 4AB habendam pro constanti; patet, fore diametrum erroris circularis in ratione triplicata ejusdem aperturæ, quod affirmavimus pluribus in locis, ut num. 13. capitis II hujus Opusculi I.

(*) Problema huc reductum est, ut datis in recta indefinita binis punctis I, S, quæratur tertium N ejusmodi, ut e binis ejus distantiis NI, NS a punctis datis, productum ex altera in quadratum alterius æquetur dato solido. Æquatio-

commodissima, & constructio simplicissima. Captâ OR in axe æquali OI, unde fient etiam RS, SE æquales utrilibet, fiant singulæ ex ipsis $= a$, tum OC $= c$, OH $= r$, RN $= x$: erit IN $= x + 2a$, SN $= a - x$, & iis valoribus substitutis $c^2 : r^2 :: 4a^3 : - 3a^2x + x^3 + 2a^3 = \frac{4a^3r^2}{c^2}$, sive $x^3 - 3a^2x + a^2(2a - \frac{4ar^2}{c^2}) = 0$.

15. Hæc æquatio habet radices reales tres, quotiescumque valor $2a - \frac{4ar}{c^2}$ fuerit minor, quam $2a$, quod hìc semper accidit; nam ob OH semper minorem OC est r minor, quam c, adeoque $\frac{4ar^2}{c^2}$ minor, quam $4a$, qui valor ablatus a valore $2a$ vel relinquet quantitatem positivam, vel saltem negativam minorem $2a$. Maxima e tribus radicibus erit æqualis reliquis binis simul sumptis, & cum signo contrario, cum earum summa $= 0$ destruat secundum terminum: ea vero maxima erit positiva, vel negativa, prout ultimus terminus fuerit e contrario negativus, vel positivus, cum postremus terminus debeat esse productum ex radicibus omnibus acceptis cum signo contrario, adeoque ob productum binarum minorum conformium semper positivum, debeat habere signum contrarium signo radicis maximæ. Construetur autem methodo elementari notissima ad trisectionem arcus circuli, cujus radius a chorda $2a - \frac{4ar^2}{c^2}$ (*). En constructionem ipsam sane

tiones omnes secundi gradus eo reducuntur, ut debeat esse productum ex iis distantiis æquale plano dato. Ad hoc autem productum datum ex quadrato alterius in alteram reducuntur omnes æquationes gradus tertii, in quibus secundus terminus deest, & tertius est negativus.

(*) 1. Licet ea constructio sit satis nota, ac pertinens ad elementa; eandem tamen hìc evolvemus, cum ab ea pendeant reliqua fere omnia, quæ dicturi sumus. Sit in fig. 3 Tab. V arcus RMK divisus in partes æquales tres in M, N, & chorda KR occurrat radiis OM, ON in A, & B. Patet, triangulum MRA fore simile isoscelio MOR ob angulum ad M communem, & an-

sane simplicem, & elegantem pro iis radicibus, & earum usu ad determinandos radios quæsitos.

---

angulum MRK æqualem MOR, cum ille insistat ad circumferentiam arcui KM, hic ad centrum arcui MR ejus dimidio. Quare erit & RA $=$ RM, & posito OR $= a$, RK $= b$, RM $= x$, erit OR $= a$: RM $= x$: : RM $= x$: MA $= \frac{x^2}{a}$. Erit itidem OM $= a$: OA $= a - \frac{x^2}{a}$: : NM $= x$: BA $= x - \frac{x^3}{a^2}$. Sunt autem RA, & KB æquales inter se, ut patet, & singulæ $=$ MR $= x$. Quare erit tota KR $= 3x - \frac{x^3}{a^2} = b$, sive $x^3 - 3a^2x + a^2b = 0$.

2. Ejus æquationis una radix erit chorda RM : reliquæ duæ, si assumantur trientes circuli MM', MM'', erunt chordæ RM', RM'', quia arcus RMM', & RMM'M'' erunt trientes arcuum RKIM''RK, RKIM''RKIM''RK, qui omnes eâdem æquatione contineri debent.
3. Patet autem, debere esse b non majus, quam $2a$, cum chorda diametro major esse non possit.
4. Posito M' in eodem semicirculo cum RMK, & M'' in opposito, patet, facto $b = 2a$, abire K in I, adeoque arcum RM fore trientem semiperipheriæ, & idcirco RM'' itidem eidem æqualem fore; ac chordas RM, RM'' æquales radio RO, punctum vero M' abiturum in I: facto autem $b = 0$, evanescit tam RK, quam RM, & fiunt RM', RM'' æquales inter se, chordæ nimirum graduum 120, quæ sunt ad radium in ratione subduplicata 3 ad 1.
5. In reliquis casibus erit RM radix minima, RM' maxima, quæ habebit signum contrarium signo reliquarum, & contrarium signo valoris b.
6. Facile inveniuntur eæ radices per tabulas sinuum. Fiat ut IR $= 2a$ ad RK $= b$, ita radius ad sinum anguli, qui dicatur A : capiantur $\frac{1}{3}$A, $60^\circ + \frac{1}{3}$A, $60^\circ - \frac{1}{3}$A, & factis, ut radius ad sinum cujusvis ex iis tribus, ita RI $= 2a$ ad quartum: habebuntur tres chordæ RM, RM', RM''.
7. Sunt enim chordæ RK, RM, RM', RM'', sinus angulorum, quos metiuntur dimidii sui arcus, ad radium RI, & dimidia arcuum MM', MM'' sunt gradus 60.
8. Mutatâ RK, mutantur omnes tres chordæ RM, RM', RM'', ita tamen, ut mutatio primæ æquetur mutationibus reliquarum simul sumptis.
9. Nam crescente arcu RM, debet crescere arcus RM', qui oritur a summa ipsius RM, & 120°, & decrescere arcus RM'', qui oritur a differentia, adeoque crescent chordæ RM, RM', & decrescet chorda RM''. Cum vero debeat remanere RM' æqualis summæ RM, RM'', debebit ejus incrementum æquari excessui incrementi RM supra decrementum RM'', adeoque incrementum RM' cum decremento RM'' debet æquari soli incremento RM.
10. Hæc harum radicum proprietas hic probe notanda est, magno nimirum futura usui ad obtinendum præcipuum totius perquisitionis scopum.

16. Capiatur ab I versus E recta IG, quæ sit ad IE in ratione duplicata OH ad OC: centro O, intervallo OI describatur circulus occurrens axi iterum in R: centro R, intervallo RG inveniatur in peripheria ejus circuli punctum K: assumatur arcus RM triens RK: centro R, intervallo RM inveniatur in axe punctum N ad partes oppositas puncto G respectu R: erigatur demum ordinata NT ad arcum ICD jacentem ad eandem axis plagam cum H, & recta HT determinabit positionem radii quæsiti PL.

17. Constructionis ratio est manifesta. Cum sit $OC^2 = c^2$: $OH^2 = r^2 :: IE = 4a : IG = \frac{4ar^2}{c^2}$, & $IR = 2a$; erit $RG = 2a - \frac{4ar^2}{c^2}$, cui capienda erat æqualis chorda RK. Tum RM erit $= x$, ut oportebat. Quod si, facta IG majore, quam IR, abeat RG in directionem oppositam in Rg; mutabit directionem etiam arcus RK abiens in Rk, & RM in Rm, adeoque & RN in Rn, quæ adhuc debebit esse contraria Rg, uti fuerat præscriptum.

18. *Scholium* 1. Æquatio illa gradus tertii præter radicem RM habet illas duas, quæ inveniuntur assumptis trientibus MM', MM'' totius peripheriæ. Pro casu IG minoris, quam sit IR, ponatur M' in eodem semicirculo cum K, M, & M'' in opposito, ac pro casu IG majoris, abeuntis nimirum in Ig, mutata directione RK, RM in Rk, Rm, retineantur m', m'' in semicirculis, in quibus erant M', M'', ut jam sint m, m'' in eodem, m' in opposito. Sumatur autem tam RN'' in primo casu, quam Rn'' in secundo versus E, & RN', Rn' versus I, ducaturque ordinata N'T', vel n't' ad arcum eundem ICD, ordinata vero N''T'', vel n''t'' ad oppositum IC'D'.

19. Plagæ punctorum N determinantur a valore radicum: in primo casu, existente RG positiva, radix maxima est RM', & debet esse negativa, reliquis positivis, & idcirco RN'' jacet cum RN ad eandem plagam, RN' ad oppositam. In secundo casu existente Rg negativa, & migrante m ad partes m'', radix maxima evadit Rm'', & remanet sola positiva, reliquis negativis: quam ob

ob causam mutat directionem Rm, sed eam retinet tam Rm', quam Rm''. Porro idem exhibet etiam motus continuus eorum punctorum: solum punctum M delatum ad R progreditur ita, ut RM evanescens in R, abeat in negativam in Rm.

20. *Schol.* 2. Inventis punctis N, facile determinantur puncta T sine ullo curvæ præsidio. Capienda erit NT ad OC in sesquiplicata ratione IN ad IO, sive fieri debebit, ut IO^3 ad IN^3, ita OC^2 ad NT^2, cujus quadrati latus exhibebit rectam quæsitam NT.

21. Notandum quoque, quælibet puncta N determinare per suas TN productas ad arcum appositum etiam alia puncta, quæ exhibebunt radios pertinentes ad punctum H' positum ex parte opposita versus C'. Nam idem punctum G pertinet ad H', quod ad H; cum IG determinetur per quadratum OH, quod factâ OH negativâ in OH' adhuc remanet positivum.

22. *Schol.* 3. Proderit plurimum evolvere casus præcipuos pendentes a diversa positione punctorum H, & G, ductis per S, & R ordinatis, quæ occurrant curvæ in punctis V, V', Z, Z'. Porro haberi debet ob oculos semper nexus inter G, & H, cum sit $IG : IE :: OH^2 : OC^2$ per constructionem. Pro varia positione puncti H in recta OC acquirit G variam positionem in recta IE, & ab ipsa pendent positiones punctorum M, N, T, P, L. Est nimirum chorda $RK = RG$, arcus $RM = \frac{1}{3}RK$, $MM' = MM'' = 120°$, recta $IL = \frac{1}{3}IN$, adeoque quadratum AP proportionale ipsi IL, est itidem proportionale IN, rectæ autem IO, OR, RS, SE sunt æquales inter se.

23. Si punctum H abierit in centrum O, evanescente OH, evanescet etiam IG, & puncto K abeunte in I cum G, erit RM triens semiperipheriæ, cui idcirco fiet æqualis & RM'', puncto M' abeunte itidem in I. Abibunt igitur in I & puncta N', T', L', nimirum unus e tribus radiis erit is ipse, qui defertur per axem AI, quem utique patet debere transire per centrum O. Chordis autem RM, RM'' factis æqualibus radio circuli RO, abibunt & puncta N, N'' in S, puncta L, L'' in O, contactus T, T'' in V, V', puncta autem P, P'' abibunt in ejusmodi puncta

cta Y, Y', ut sit tam AY, quam AY' ad AF in subduplicata ratione IO ad IB, nimirum 3 ad 4, sive proxime ut 87 ad 100.

24. Et quidem ubicumque fuerit H extra centrum O, ad ipsum non devenient, nisi soli tres radii delati a tribus punctis P jacentibus in eodem plano cum ipso, & axe determinatis per propositam constructionem. Sed ad centrum O præter radium, qui venit per axem, venient infiniti numero radii, nimirum ii omnes, qui transeunt per peripheriam circuli habentis Y'Y pro diametro, cum plana omnia in eo casu transeant per punctum H tum jacens in ipso axe in O.

25. Si captis in OC, OC' punctis q, q' ita, ut quadratum Oq, Oq' sit dimidium quadrati OC, punctum H abeat in q, vel q'; erit IG dimidia IE, adeoque punctum G abibit in R, evanescentibus tam RK, quam RM. Is est casus, in quo unâ e tribus radicibus æquationis RM factâ $= 0$; reliquæ binæ RM', RM'' evadent æquales inter se, & erunt singulæ ad IR in subduplicata ratione 3 ad 4, sive proxime ut 87 ad 100; cadet N in R, & P in quoddam punctum Q ita, ut sit itidem quadratum AQ dimidium quadrati AF, uti est IR dimidia IE, eritque ibi $AQ : AF :: Oq : OC$. Sumptis autem Rr, Rr' versus I, & E, quæ sint ad IR in subduplicata ratione 3 ad 4, abibunt N', N'' in r, r'.

26. Si fuerit OH adhuc major; jam IG evadens major, quam IR abibit in Ig. Factâ Rg negativâ, debebit mutare directionem etiam arcus RMK juxta num. 18, abeunte K in k, M in m, N in n infra R, N' in n' supra r, N'' in n'' supra r'; perget autem recedere P ab F, P' ab A, & accedere P'' ad F.

27. Si punctum H abierit in C; erit $Ig = IE$, adeoque Rk iterum æqualis RI, abeunte m'' in I, n'' in E, & factis Rm, Rm' æqualibus inter se, & æqualibus radio RO, abibunt ambo n', n in O. Nimirum contactus t'' abibit in D', & bini contactus t', t in C, abeunte radio P''H in illum F'D'C extremum, & binis P'HT', PTH in unicum, tangentem curvam in C, & transeuntem per quoddam punctum X, quod quidem secabit bifariam rectam AF, cum per num. 10 debeat tum esse $AP^2 = AX^2 : AF^2 ::$

IO:

IO : IE : : 1 : 4 (num. 8, & 10), licet id figura non exprimat ob nimis exiguam distantiam rectæ F'AF a curva D'ID.

28. *Coroll.* Ad quodvis punctum assumptum in margine circelli deveniunt bini radii, ad quodvis positum ubivis inter peripheriam, & centrum deveniunt tres, ad centrum ipsum numero infiniti.

29. Patet ex evolutione casuum expositorum in scholio superiore.

30. *Scholium* 4. Erit admodum utile considerare nexum omnem punctorum P, T, N, H', & eorum motus pendentes a se invicem ad acquirendam ideam admodum distinctam casuum omnium, quæ viam sternet pronam, & expeditam ad considerandam ipsam luminis distributionem, quæ est totius perquisitionis caput præcipuum.

31. Si punctum H digressum a centro O percurrat totum radium OC; punctum P' percurret rectam AX, punctum P rectam YX, punctum P'' rectam Y'F': punctum N', & n' rectam IrO: N, & n rectam SRO: N'', & n'' rectam Sr'E: punctum T', & t' arcum IC: T, & t arcum VZC: T'', & t'' arcum V'D', & iis æquales sunt motus ex parte opposita, puncto H' percurrente OC'.

32. Si punctum P (designabimus hic unicâ litterâ sine accentibus casus omnes pertinentes ad H, & H') motu continuo excurrat ab F' ad F, unicam quandam velut oscillationem perficiens; punctum contactus T percurret itidem motu continuo arcus D'C'I, ICD unicam itidem oscillationem conficiens in curva continua D'ID: punctum N ipsi respondens descendet per EI, tum ascendet per IE conficiens oscillationem duplicem: punctum H discedet a C, & perficiet oscillationem triplicem: primam per COC', dum abit P per F'X', N per EO, T per D'C', secundam per C'OC, dum abit P per X'AX, N per OIO, T per C'IC, tertiam iterum per COC', dum abit P per XF, N per OE, T per CD.

33. Quoniam punctum H in singulis ejusmodi oscillationibus semel advenit ad quodvis punctum assumptum intra diametrum

C'OC,

C'OC, præter ipsa puncta extrema C', C, ad quorum utrumvis advenit tantummodo bis in oscillationum limitibus; idcirco ad quodvis punctum H advenient tres radii, & ad utrumvis e punctis C', C duo tantum. Ad centrum O etiam advenient tantummodo tres e radiis jacentibus in plano quovis transeunte per axem. Sed quoniam advenient radii pertinentes ad omnia ejusmodi plana; in eo habebuntur simul infiniti.

34. Patet autem, in secunda sesquioscillatione puncti H redire omnia eodem prorsus modo, quo in prima, sed ordine retrogrado.

35. *Scholium* 5. Si pro puncto H assumatur quodvis punctum d in recta C'OC producta ex parte utravis; quadratum Od fit majus quadrato OC, adeoque & Ig major, quam IE, & Rg major diametro RI. Quamobrem chorda ipsi æqualis in circulo aptari non potest. Is est casus, in quo valor $\frac{4ar^2}{c^2}$ evadit major, quam $4a$, & $2a - \frac{4ar^2}{c^2}$ major, quam $2a$. In eo casu æquatio $x^3 - 3a^2x + a^2(2a - \frac{4ar^2}{c^2}) = 0$, habet unicam radicem realem, quæ non pertinet ad trisectionem anguli, sed ad inventionem duarum mediarum continue proportionalium inter duas datas: ejus expressio habetur tota realis per formulas notissimas radicales: ea rite tractata huc reducitur

$$a\sqrt[3]{\left(\frac{2r^2 - c^2 + 2r\sqrt{(r^2 - c^2)}}{c^2}\right)} + a\sqrt[3]{\left(\frac{2r^2 - c^2 - 2r\sqrt{(r^2 - c^2)}}{c^2}\right)},$$

cujus valor debet esse major, quam $2a$, adeoque punctum N abiret ultra E, & determinaret contactum in arcu IC'D' opposito puncto h producto ultra D'. Illuc nimirum adveniret radius unicus pertinens ad aperturam productam ultra F', adeoque majorem datâ (*).

36. Fa-

(*) 1. Punctum quidem d adhuc est ejusmodi, ut perpendicularis ex ipso ducta ad axem occurrat ipsi axi supra punctum I, & secet curvam alicubi in C, quam ob causam ad ipsum etiam pertinet inventa æquatio. Sed si ea perpendicularis caderet infra I; immutanda esset paullisper calculi ratio. Illud quidem

satis

36. Facile autem demonstrari potest illud, ex omnibus radiis transeuntibus per aperturam FF' devenire ad quodvis punctum assumptum intra angulum F'BF radium unicum: ad quodvis punctum trilinei D'BC', vel DBC contenti binis rectis, & arcu D'C', vel binis rectis, & arcu DC duos: ad quodvis punctum quadrilinei BC'ICB contenti binis rectis, & binis arcubus C'I, CI tres: ad quodvis punctum situm extra ejusmodi quadrilineum, sed in-

 tra

satis erat pro investiganda distributione luminis per circellum C'OC, & per totum ejus planum, sed ad eam habendam pro plano quovis, sive situm sit supra I, sive per ipsum transeat, sive cadat infra, ita instituenda est analysis, ut non pendeat a concursu ejus perpendicularis cum ipsa curva. Id autem hic præstabimus.

2. Ad id præstandum considerentur positiones omnes puncti H, per quod radius transire debeat. Sint in fig. 4 ID'X', IDX bina crura ejus parabolæ gradus tertii, ad cujus formam accedit caustica in infinitum prope cuspidem I, & jaceat ubicunque punctum H, per quod debeat transire radius contingens ipsam curvam in T, & occurrens axi in L. Ducta ex eo recta perpendiculari ad axem, tres erunt casus, quorum singuli in alios subdividentur: vel enim ea recta incurret in ipsum axem supra I versus curvam in O, vel incurret in ipsum I, puncto H abeunte in h, vel infra ipsum in O', puncto H abeunte in H'. In primo autem casu recta OH incurret alicubi in curvam in C, & punctum H jacebit vel in axe in O, vel respectu ipsius axis citra C, vel in C, vel ultra C; in secundo, & tertio vel erit in axe in ipso I, aut O', vel cadet extra ipsum.

3. Ut unica solutio transferri possit ad omnes eos casus, applicetur ipsa primo casui, & in eo consideretur contactus T cadens ad partem axis contrariam respectu H; nam ex ea parte habetur semper aliqua solutio realis in omnibus casibus, & ductâ ordinatâ TN, tum ex quovis alio puncto p assumpto ad arbitrium in axe supra I ordinatâ pq, captâque OR æquali, & contraria OI, ponatur IO $=$ OR $= a$, OH $= r$, I$p = b$, $pq = c$, RN $= x$: eritque (juxta num. 8) IL $= \frac{1}{3}$IN $= \frac{1}{3}(x + 2a)$, LN $= \frac{2}{3}(x + 2a)$, OL $= \frac{1}{3}(x + 2a) - a = \frac{1}{3}(x - a)$.

4. Erit autem (juxta num. 5) I$p^3 = b^3$: IN$^3 = (x + 2a)^3$ :: $pq^2 = c^2$: NT$^2 = \frac{c^2(x + 2a)^3}{b^3}$. Rursum OL$^2 = \frac{1}{9}(x - a)^2$: LN$^2 = \frac{4}{9}(x + 2a)^2$ :: OH$^2 = r^2$: NT$^2 = \frac{4r^2(x + 2a)^2}{(x - a)^2} = \frac{c^2(x + 2a)^3}{b^3}$. Hinc $\frac{4b^3r^2}{c^2} = (x + 2a) \times (x - a)^2$, quod exhibet æquationem $x^3 - 3a^2x + a^2\left(2a - \frac{4b^3r^2}{a^2c^2}\right) = 0$.

5. Si

tra angulum C'BC cruribus utcumque in infinitum productis, iterum unicum; ad reliqua puncta omnia nullum. Sed iis omissis progrediemur ad determinandam distributionem luminis per circellum C'OC.

37. Ad ejusmodi perquisitionem notandum illud, quod facile patet: si concipiatur aliud punctum h quodcunque in radio OC cum punctis p, p', p'' ipsi respondentibus in apertura FF', lumen

---

5. Si jam punctum p arbitrarium ita assumatur, ut congruat cum O, fiet $c =$ OC, & $b = a$, adeoque $x^3 - 3a^2x + a^2(2a - \frac{4ar^2}{c^2}) = 0$ æquatio illa ipsa, quam evolvimus a num. 15, in qua nimirum si OH non sit major, quam OC, sive r major, quam c, habentur radices tres reales, quas exhibet illa trisectio arcus circularis: sed earum binæ fiunt inter se æquales, ubi abeat H vel in O, existente tum æquatione $x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$ cum radicibus a, a, $-2a$, vel in C, existente tum æquatione $x^3 - 3a^2x - 2a^3 = 0$ cum radicibus $-a$, $-a$, $+2a$: habenturque generaliter quidem in figura 1 tres radii PH, P'H, P''H, sed ubi H abit in O, abeuntibus P, P'' in Y, Y', ac P' in A, adhuc sunt tres: & ubi H abit in C, abeuntibus P, P' in X, ac P'' in F', remanent tantum duo: illi autem, qui veniunt ad centrum O ex Y', Y, sunt tantum duo ex omnibus advenientibus in unico plano transeunte per axem: sed cum in omnibus ejusmodi planis jaceat ipsum O, & in singulis habeantur bini ejusmodi radii; infiniti numero adveniunt ad punctum H abiens in O juxta num. 28.

6. In secundo casu, in quo punctum O abit in I, fit $a = 0$, adeoque æquatio $x^3 - \frac{4b^3r^2}{c^2} = 0$. In ea si etiam h figuræ 4 abeat in I; evanescit & r, & evadit $x^3 = 0$, quo nimirum casu omnia puncta P, P', P'' figuræ 1 abeunt in unicum A, solo radio, qui per axem advenit, abeunte ad I. Sed si h sit extra I; habet x unicum valorem realem $b\sqrt[3]{\frac{4r^2}{c^2}}$, qui facile admodum construitur. Si enim in figura 4 ita capiatur Ip, ut sit $pq = 2$Ih, evadet $c = 2r$, adeoque $x = b =$ Ip.

7. Capiatur igitur Ie dupla Ih in directione contraria, & ex e erigatur recta axi parallela: ejus occursus cum arcu curvæ exhibebit quæsitum punctum T. Erit enim NT = Ie dupla Ih, & abeunte p in N, fiet pq æqualis ipsi NT. Est autem admodum expedita etiam directa demonstratio constructionis adeo simplicis, erit enim IL : IN = eT :: hi : he :: 1 : 3, ut oportebat juxta num. 8. In tertio casu, in quo O' cadit infra I, abit infra I etiam R', ac mutatâ directione rectæ IO', mutatur signum valoris a, & æquatio evadit $x^3 - 3a^2x + a^2(-2a - \frac{4b^3r^2}{a^2c^2}) = 0$, sive $x^3 - 3a^2x - a^2(2a + \frac{4b^3r^2}{a^2c^2}) = 0$, quæ

men omne, quod transmittitur per annulos genitos a conversione linearum Pp, $P'p'$, $P''p''$ circa axem AI, abire in annulum genitum a linea Hh. Radius enim PH motu continuo puncti P usque ad p abit in ph, & everrit quodammodo spatia Pp, Hh: atque idem habetur in reliquis.

38. Porro inde facile eruitur sequens lemma, quod viam sternit ad solutionem sequentium problematum.

 39. *Lem-*

quæ quidem æquatio, ubi posito H' extra O' valor r non evanescit, habet unicam radicem realem ob valorem inclusum parenthesi majorem valore $2a$, eamque habet positivam, & majorem quam $2a$.

9. Ea æquatio invenietur immediate, si fiat $IO' = O'R' = a$, & $R'N = x$, tum enim habetur $IN = x - 2a$, & $OL = \frac{1}{3}(x + a)$, adeoque $(x - 2a) \times (x + a)^2$, ut num. 4, mutato tantummodo signo valoris a, sive $x^3 - 3a^2x - 2a^3 = \frac{4b^2r^2}{c^2}$, sive $x^3 - 3a^2x - a^2(2a + \frac{4b^2r^2}{c^2}) = 0$.

10. Quod si valor arbitrarius b fiat $= a$, assumpta nimirum $Ip = IO'$; habebitur $x^3 - 3a^2x - a^2(2a + \frac{4ar^2}{c^2}) = 0$, quæ æquatio differt ab æquatione reducta primi casus in solis signis postremi termini. Formula autem eam radicem exprimens cum solo signorum discrimine invenietur

$$a\sqrt[3]{\left(\frac{2r^2 + c^2 + 2r\sqrt{(r^2 + c^2)}}{c^2}\right)} + a\sqrt[3]{\left(\frac{2r^2 + c^2 - 2r\sqrt{(r^2 + c^2)}}{c^2}\right)}.$$

11. Si autem abeunte H' in O' fiat $r = 0$; habetur $x^3 - 3a^2x - 2a^3 = 0$, cum tribus radicibus $-a$, $-a$, $+2a$. Sed priores illæ, quæ in primo casu obvenerant, abeunte H in C, & exhibebant binos valores $x = RO$, cum binis punctis contactuum abeuntibus in C, hìc nullius sunt usus, cum terminentur infra R' ad punctum axis, cui respondent ordinatæ ad curvam imaginariæ: postrema terminatur ad I, & exhibet unicam solutionem realem, qua ostenditur, ad ipsum O' devenire unicum radium, nimirum illum, qui defertur per axem.

12. Hæc quidem locum habent; si consideretur curva integra producta utcumque ultra puncta D', D figuræ 1 independenter a limitatione aperturæ F'F, quæ e tota curva abscindit solos arcus finitos ID', ID. Omnia puncta, quæ respectu rectæ F'D'BC in infinitum productæ jacent versus lentem, habent unam tangentem ejus arcus, qui post arcum ID' sursum producitur, & idem accidit respectu productionis arcus ID punctis omnibus jacentibus eodem modo respectu rectæ FDBC'. Eæ demendæ sunt a tangentibus exhibentibus radios ad ea puncta delatos definitis per superiores æquationes. Huic animadversioni innituntur ea, quæ proponuntur sequenti num. 36.

39. *Lemma*. Quantitas luminis delati ad annulum Hh ab annulis $P'p'$, $P''p''$ simul, æquatur lumini delato a solo annulo Pp.

40. Nam eæ quantitates luminis sunt proportionales ipsis annulis, cum lumen uniforme deferatur ad totam aperturam FF'. Porro ii annuli sunt differentiæ circulorum habentium pro radiis AP, AP', AP'' a circulis habentibus radios Ap, Ap', Ap''. Differentiæ eorum circulorum sunt, ut differentiæ, quæ habentur inter quadrata radiorum, quæ quadrata cum sint per num. 8 ut rectæ IN, IN', IN'', erunt illi annuli, ut harum differentiæ. Porro differentiæ harum sunt eædem, ac differentiæ rectarum RN, RN', RN'', cum pendeant a sola mutatione punctorum N, N', N'', adeoque sunt eædem, ac differentiæ chordarum RM, RM', RM'', ipsis æqualium. Cum igitur differentia solius chordæ RM æquetur per num. 8 adnotationis ad num. 15 binis differentiis chordarum RM', RM'' simul; etiam solus annulus Pp æquatur binis $P'p'$, $P''p''$ simul sumptis, & quantitas luminis delati ab illo quantitati luminis delati ab his. Q. E. D.

41. *Corol.* Lumen transmissum ab annulo XY æquatur lumini transmisso a circulo AX, & annulo YF.

42. Nam per num. 31 abeunte H ab O ad C percurrit P rectam YX, P' rectam AX, P'' rectam $Y'F'$. Hinc lumen delatum ab annulo XY æquatur lumini delato simul a circulo AX, & annulo $Y'F'$, qui est idem, ac annulus YF, cum in media conversione abeat YF in $Y'F'$.

43. *Scholium*. Id quidem patet etiam ex eo, quod per numer. 32, 25, 27 puncta A, X, Y, F respondent punctis I, O, S, E, adeoque quadrata, & circuli AX, AY, AF sunt, ut rectæ IO, OS, SE, & circulus AX, annulus XY, ac annulus YF, ut rectæ IO, OS, SE, quarum media æquatur binis extremis simul.

44. Quin immo cum OI, & SE æquentur inter se, patet, summam omnium annulorum $P'p'$ æquari summæ omnium $P''p''$, licet singuli singulis non sint æquales.

45. *Probl.* 2. Invenire rationem luminis contenti circello interiore OH, & annulo exteriore HC ad totum lumen transiens per totum circellum OC.

46. Quo-

46. Quoniam lumen allapsum ad quemvis annulum Hh a binis locis P', P'', æquatur simul lumini allapso a solo loco P, satis erit invenire rationem luminis delati ex hoc solo postremo. Porro inde defertur ad circellum OH lumen pertinens ad annulum YP, & ad HC lumen pertinens ad annulum PX. Sunt igitur ea lumina, ut ii annuli, nimirum ut differentiæ circulorum habentium radios AY, AP, & AP, AX, sive ut differentiæ quadratorum eorundem radiorum, nimirum per num. 8 ut differentiæ rectarum IS, IN, & IN, IO, vel ut rectæ SN, NO. Quare tres rectæ SN, NO, SO exprimen lumen contentum circello OH, annulo HC, & toto circello OC, quod erat inveniendum.

47. *Corol.* 1. Luminis quantitas erit eadem in circello interiore, & annulo exteriore, ubi puncto H abeunte in q, fuerit area circelli æqualis areæ annuli.

48. Nam puncto H abeunte in q, abit per num. 25 N in R, & fit SN = NO. Porro ibidem est quadratum OH dimidium quadrati OC, & proinde circellus interior dimidius circelli totius, adeoque æqualis residuo annulo exteriori.

49. *Corol.* 2. Semisumma luminis totius ad semidifferentiam luminis contenti circello interiore, & annulo exteriore est, ut radius circuli OR ad chordam RM, existente majore illo, vel hoc, prout OH fuerit major, vel minor quam Oq.

50. Est enim OR dimidia summæ OS, & RN æqualis RM est semidifferentia rectarum SN, NO. Circellus autem OH continebit plus, vel minus dimidio contento in circello Oq, prout fuerit major, vel minor ipso.

51. *Probl.* 3. Determinare rationem densitatis luminis in diversis locis H circelli OC.

52. Concipiatur radius ph infinite proximus radio PH, pro quorum intersectione assumi poterit juxta num. 8 contactus T, & erit densitas radiorum in Hh ad densitatem in Pp, ut annulus Pp ad annulum Hh. Is annulus ad hunc est conjunctim, ut ejus latitudo Pp ad latitudinem Hh, & ut peripheria circuli habentis pro radio AP ad peripheriam circuli habentis pro radio OH. Prima ratio est PT ad TH, sive AN ad NO, secunda

radii

radii AP ad OH, sive AL ad OL. Quare illa ratio composita est AN$\times$AL ad NO$\times$OL. Porro ob tantam distantiam puncti A a punctis N, L proximis puncto I, poterit haberi utraque AN, AL pro æquali constanti AI, adeoque cum & densitas in annulo Pp sit constanter eadem per totam aperturam, nimirum densitas radiorum incidentium; erit densitas in H reciproce, ut rectangulum NO$\times$OL, sive ob SN triplam OL per num. 14, reciproce ut rectangulum ON$\times$NS, quæ quidem ratio pertinebit ad densitatem luminis ingesti in H tam ex unico loco P, quam ex omnibus tribus simul, cum per num. 39 hoc sit illius duplum. Quamobrem patet haberi id, quod erat inveniendum.

53. *Schol.* 1. Ratio, quæ determinata est pro lumine veniente ex P, est generalis etiam pro lumine, quod veniat e singulis locis P', P'', comparando vel singula ejusmodi puncta inter se in diversis positionibus, vel alia cum aliis, & cum ipso puncto d, si producta apertura, & caustica, radii eo devenirent, assumendo suum N, quod caderet ultra E; ubique enim demonstratio est eadem. Præterea patet, ad videndum omnem progressum densitatis satis fore, si consideretur nexus inter motum puncti H ab O ad C, & motum puncti N, vel n ab S ad O juxta num. 31.

54. *Corol.* 1. Densitas luminis erit reciproce, ut differentia quadratorum semidiametri OR, & chordæ RM.

55. Est enim rectangulum ON$\times$NS differentia quadratorum OR, RN, & RM æquatur ipsi RN.

56. *Corol.* 2. Densitas eadem in centro O, & in margine C excrescit in infinitum, a centro usque ad punctum q perpetuo decrescit, tum usque ad marginem perpetuo crescit, ut idcirco sit minima in ipsa distantia Oq, cujus quadratum est dimidium quadrati totius OC.

57. Nam rectangulum ON$\times$NS evanescit tam puncto N abeunte in S, quam puncto n in O, perpetuo crescit puncto N, vel n accedente ad medium R, ubi fit maximum: puncto autem H abeunte utravis ex parte ad q, accedit G, vel g ad R, adeoque etiam N, vel n, quod in ipsum recidit, ubi H appellit ad ipsum q.

58. *Co-*

58. *Corol.* 3. Eadem densitas æqualis est in iis binis distantiis a centro O, quarum quadrata æque differunt a quadrato Oq dimidio quadrati OC.

59. Quoniam enim recta IG, vel Ig est proportionalis quadrato OH; ubi hoc quadratum æque distiterit a dimidio quadrato OC, rectæ IG, Ig æque different ab IR dimidia IE, adeoque RG, Rg æquales erunt, ac proinde æquales & RK, Rk, & RM, Rm, & RN, Rn, & $ON \times NS$, $On \times nS$.

60. *Corol.* 4. Densitas minima in q ad densitatem mediam, quæ haberetur, si totum lumen æqualiter diffunderetur per circellum OC, est ut 2 ad 3.

61. Nam ob densitatem constantem in tota apertura exprimet densitatem in Hh luminis venientis ex solo annulo Pp is annulus divisus per annulum Hh, sive $\frac{AN \times AL}{NO \times OL} = \frac{3AN \times AL}{ON \times NS}$, adeoque totius luminis densitatem $\frac{6AN \times AL}{ON \times NS}$: densitatem autem mediam circulus radio AF divisus per circulum radio OC, nimirum $\frac{AB^2}{BO^2} = \frac{9AB^2}{OR^2}$, cum per num. 10 sit $OB = \frac{1}{3} IO = \frac{1}{3} OR$. Cum igitur AN, & AL possint haberi pro æqualibus AB, & abeunte H in q, adeoque N in R, fiat $ON \times NS = OR^2$, erit illa densitas ad hanc ut 6 ad 9, sive ut 2 ad 3.

62. *Scholium* 2. Si consideretur densitas luminis venientis ab unico loco, facile invenietur ratio variationis ipsius habitæ, dum punctum P percurrit totam aperturam F'F, quo tempore punctum N juxta num. 32 perficit duas oscillationes, descendendo per EI, & ascendendo per IE, ac punctum H tres, primam per COC', dum abit P per F'X', & N per EO, secundam per C'OC, dum abit P per X'AX, & N per OIO, tertiam iterum per COC', dum abit P per XF, & N per OE.

63. Initio primæ oscillationis rectangulum $ON \times NS$, abeunte N in E evadit $OE \times ES = 3OR^2$, tum perpetuo decrescit, donec abeunte P in Y', & H in O, ac N in S, id evanescat cum NS: deinde iterum crescit in progressu P ab Y' ad Q', abeunte H ab

H ab O ad q', & N ab S ad R, ubi recidente N in R fit maximum, æquale nimirum quadrato OR. Inde iterum decrescit in progressu P a Q' ad X', H a q' ad C', N ab R ad O, ubi iterum evanescit, evanescente ON.

64. Quare initio primæ oscillationis ea densitas minima in margine C, inde perpetuo crescit versus centrum O, in quo excrescit in infinitum, tum inde decrescit perpetuo, & evadit minima in q', in ea distantia, cujus quadratum est dimidium quadrati OC'. Ibi iterum incipit augeri, & post incrementum continuum abit in fine ipsius primæ oscillationis in infinitum in C'.

65. In secunda oscillatione abeunte P ab X' ad A, & H a C' ad O, N ab O ad I, rectangulum $ON \times NS$ perpetuo crescit, evadit maximum in I, ubi iterum fit $= 3OI^2 = 3OR^2$, tum decrescit per eosdem gradus, abeunte P ab A ad X, H ab O ad C, & N ab I ad O, ubi iterum evanescit.

66. Quare densitas initio secundæ oscillationis decrescit usque ad centrum, ubi evadit minima, tum crescit perpetuo usque ad marginem C, in quo iterum excrescit in infinitum.

67. In tertia oscillatione, cum omnia debeant redire, ut in prima ordine retrogrado, densitas ex infinito marginis C decrescit perpetuo usque ad q, ubi fit minima, tum augetur perpetuo usque ad centrum, ubi excrescit in infinitum, ac inde perpetuo decrescit usque ad marginem C'.

68. In omni ejusmodi excursione abit in infinitum bis in centro in medio primæ, & postremæ oscillationis, bis in margine in initio, & fine secundæ, acquirit minimum bis in margine in initio primæ, & fine tertiæ, semel in centro in medio secundæ, semel in puncto q' in prima post, & in q in tertia ante appulsum ad centrum.

69. Porro in initio primæ in C, in medio secundæ in O, & in fine tertiæ in C' densitas est æqualis, cum illud rectangulum ubique fiat $= 3OR^2$. In punctis q, q' est triplo major, cum ibidem idem rectangulum sit $= OR^2$. Minimum autem illud in C, & C' oritur ex eo, quod apertura non procurrat ulterius ultra F', & F; nam si ea procurreret eundo a C versus d, vel a C' ver-

C' versus d', pergeret imminui continuatâ mutatione, quam habuit a q ad C, & a q' ad C', procurrente N ultra E, & aucto idcirco adhuc rectangulo ON×NS.

70. Singula e tribus punctis P'', P', P implent totum circellum descriptum radio OC lumine diverso; primum quidem juxta num. 42 lumine annuli F'Y', secundum lumine circuli AX, tertium lumine annuli XY, nam FY, X'A, X'Y' dum transmittunt lumen ad radium OC', idem eorundem illorum annulorum lumen adhibent, cum ad eosdem pertineant, figurâ circa axem revolutâ. Eæ luminum quantitates sunt juxta num. 43, ut rectæ ES, IO, OS, sive 1, 1, 2, uti debuit esse, cum P solum ingerat quantitatem æqualem illatæ a P', & P'' simul.

71. Sed si omnia ea puncta æquale lumen ubique ingererent in suo motu, haberetur densitas media triplo utique minor, quam media considerata num. 60 totius luminis ingesti ab omnibus simul, & densitas minima in q esset duplo minor eâ, quam consideravimus ibidem, cum ibi assumpserimus lumen veniens ab omnibus tribus locis duplum luminis venientis hîc a solo loco P. Cum igitur ibi densitas minima ad illam mediam in q fuerit, ut 2 ad 3; erit hîc ad hanc ut 1 ad 1, sive ipsi æqualis, & in centro in O, ac in marginibus C, C' in initio, & fine triplo minor.

72. *Scholium* 3. Ubi dicitur, densitatem excrescere in infinitum, diligenter notandum est, rem debere accipi in consideratione geometrica, non in physica, considerando nimirum lumen tanquam corpus quoddam continuum, cujus omnia puncta progrediantur per lineas accurate rectas, atque id ita, ut compenetrari etiam possint partes diversæ, & quidquid luminis per lineam continuam extendebatur, possit abire in punctum unicum, quidquid extendebatur per superficiem, possit abire in lineam, vel punctum. In physica res longe aliter se habet: lumen non est corpus quoddam continuum, nec ejus partes compenetrantur, sed addensatio fit per earum mutuum accessum majorem; idcirco in ipsa Physica oportet infinitæ densitati substituere densitatem ingentem tantummodo respectu raritatis prioris.

73. Reipsa autem ne in geometrica quidem consideratione hic habebitur densitas infinita, hæc nimirum densitas, quam hic consideravimus. Hic enim consideravimus densitatem, quæ oritur ex massa luminis collocata in spatio habente tres dimensiones, quarum binæ tantum consideratæ sunt in annulis ex Pp, Hh, quia interea tertia dimensio, quæ pendet a progressu luminis, habetur utrobique pro eadem ob celeritatem luminis ubique eandem.

74. Hujusmodi densitas non convenit unico cuipiam puncto, nec unicæ cuipiam lineæ, aut superficiei, sed solido: quando applicatur puncto cuipiam, intelligitur semper spatiolum circa illud punctum, in quo ea ubique sit eadem, vel habeatur pro eâdem, nimirum cujus singulis particulis æqualibus contineantur singulæ particulæ æquales quantitatis luminis, & metitur eam densitatem quantitas luminis divisa per illud spatiolum, quod eam continet.

75. Porro si assumatur areola utcunque exigua circa centrum, vel prope margines; nulli alteri puncto ejus areolæ posito extra centrum, & ipsos margines convenit expressio densitatis infinitæ, sed erit finita in punctis quibusvis ejus areolæ in se determinatis. Quare nulli spatiolo in se determinato utcumque exiguo conveniet densitas infinita.

76. Habebitur tantummodo illud: si concipiatur punctum quodcunque in se determinatum utcumque proximum centro, vel peripheriæ, & circa ipsum areola in immensum minus lata, quam sit ejus distantia a centro, vel peripheria; in illa areola habebitur quædam densitas, quæ eo erit major, quo illud punctum plus accedet ad centrum, vel peripheriam, nec ulla erit densitas utcumque magna ejusmodi, ut non possit inveniri punctum quoddam ita parum distans a centro, vel peripheria, ut in spatiolo circa ipsum posito multo minore, quam sit ea parva distantia, densitas sit major, quam illa data. Id constituet seriem quandam densitatum finitarum continuatam in infinitum sine ulla ultima, sed etiam sine ulla absolute infinita, quod probe notandum est ad evitandas plurimas æquivocationes, in quas facile inciditur, ubi agitur de infinito, & infinitesimis quantitatibus, quæ qui-

quidem nullæ sunt in se ipsis absolute tales, sed a nobis tantummodo concipiuntur indefinite tales.

77. Si accipiatur centrum ipsum, vel punctum aliquod peripheriæ, & spatiolum accipiatur ipsi adjacens; utcunque id sumatur parvum, densitas luminis in eo, æstimata a toto lumine, quod continet, diviso per ipsum spatiolum, erit semper finita, sed eo major, quo minus spatiolum assumetur: datâ quacunque densitate utcumque magnâ, invenietur spatiolum ita parvum, ut habeat densitatem ita consideratam majorem ipsâ. Sed cum nullum possit esse ultimum spatiolum minimum; nulla pariter erit ultima densitas absolute infinita. Id autem habebitur discriminis inter punctum assumptum ubicunque alibi, ubi expressio densitatis est finita, & ibi, ubi est infinita, quod in primo casu, si consideretur spatiolum perquam exiguum circa ipsum, imminuto eo spatiolo in infinitum, densitas computata a toto lumine diviso per totum spatiolum manebit æquipollenter eadem, quia in singulis ejus particulis æqualibus quantitas luminis est æquipollenter eadem, adeoque densitas æquipollenter eadem: at in secundo casu, quo spatiolum illud magis minuitur, eo magis crescit densitas illa ita computata, nam in particulis ejus æqualibus, quæ propiores sunt ipsi puncto, continetur plus luminis, quam in remotioribus, densitate in illis majore, quam in his, & quidem eo majore in infinitum, quo magis accedunt ad illud ipsum punctum.

78. Plura hic considerari possent eo pertinentia, sed quæ magis pertinerent ad illustrandam methodum infinitesimorum, atque infinitorum, eorumque usum in Geometria, quam ad argumentum, de quo agimus. Addemus tantummodo illud, quod magis facit ad rem præsentem, quod nimirum in circello habente centrum in ipso margine expressio densitatis infinitæ habetur in punctis omnibus lineolæ continuæ, nimirum arcus peripheriæ, dum in spatiolo assumpto circa centrum ea habetur in unico puncto. Hinc etiam translatâ consideratione ejusmodi ad Physicam, magis debet sensum percellere maxima illa radiorum densitas in ipsis marginibus, quam in centro erroris, quia in centro ipsa est tan-

ta in spatiolo quaquaversus exiguo, ad margines vero eam ingentem magnitudinem habet per totam longitudinem peripheriæ erroris ejusdem.

79. *Schol.* 4. Potest considerari & aliud densitatis genus, ubi lumen geometrice consideratur, non physice: in eo genere habebitur densitas absolute infinita in centro, ad quod cum adveniant per num. 33 radii omnes, qui transeunt per omnia puncta peripheriæ habentis radium AY, in eo quodammodo compenetrantur.

80. Ad omnia reliqua puncta bini, vel terni radii deferuntur ad singula, quorum singuli per singula puncta aperturæ transeunt: quamobrem in iis densitas, si ita loqui fas est, punctualis est ubique eadem extra centrum, in quo ea est absolute infinita, & extra marginem, in cujus singulis punctis non compenetrantur, nisi duo radii.

81. Potest itidem considerari densitas linearis, considerando lineas luminis ut continuas, quæ a lineis longioribus, per quas transibant, abeant ad alias breviores. Quantitatem hanc linearem luminis exprimere poterit peripheria circuli aperturæ, per quam id transit, & spatium erit peripheria circuli, in quam contrahitur, ac illa divisa per hanc, exhibebit ejusmodi linearem densitatem.

82. Eo pacto densitatem linearem in H exprimet peripheria radio AP divisa per peripheriam radio OH, erit ea nimirum, ut $\frac{AP}{OH} = \frac{AL}{OL}$, sive cum AL considerari possit, ut æqualis constanti AI, erit ea densitas reciproce, ut sola OL, nimirum reciproce ut SN ejus tripla. Initio in C, abeunte N in E, exprimetur per $\frac{1}{SE} = \frac{1}{OR}$. Abeunte H in O, abibit N in S, adeoque desinente totâ peripheriâ genitâ a puncto H in unicum punctum, evadet densitas absolute infinita, sed punctualis, non vero linearis. Abeunte H in fine primæ oscillationis in C', jam abibit N in O, & fiet SN = SO = 2OR, adeoque densitas evadet prioris subdupla. Redeunte H ad O in secunda oscillatione, jam

jam abibit N in I, & fiet SN $=$ SI $=$ 3OR, adeoque densitas primæ subtripla: in reliqua autem sesquioscillatione omnia redeunt ordine retrogrado. Erit nimirum in binis appulsibus ad binos margines, & ternis intermediis ad centrum, ut 1, ∞, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, ∞, 1.

83. *Scholium* 5. Nec inutile futurum arbitror, nec injucundum, iis potissimum, qui simplicitate geometrica delectantur, & in problematum solutione ingenium exercent suum, si aperiam, qua via ad propositas solutiones devenerim, itinere nimirum tortuoso admodum, & molesto. Sæpe mihi videor per sylvam quandam vagari densissimam, dum veritatem quampiam inquiro, spinis, herbisque obrutam, & virgultis contectam. Longo ambitu per implexas, & intricatissimas ambages circumferor, signis per totum iter dispositis, quæ extent, & facile deprehendi possint. Ubi demum in eam incurro, inde trans tenues ramusculos, frondesque transpiciens, agnosco per ea ipsa relicta indicia vel illum locum, unde primo discesseram, vel aliquem ex iis, quæ in via offenderam, ad quem brevi exsecto tramite, per ipsum eo alios adduco, labore brevissimo, omissis omnibus illis tortuosis, atque spinosis anfractibus, per quos primo incesseram, quorum quidem me demum pudet, quasi vero non illa esset methodorum simplicissimarum ratio, atque natura, ut postremæ in mentem veniant, & nisi aliquanto obstinatiore quærantur animo, ne veniant quidem.

84. In primis inquirens in radios, qui transeant per datum punctum H figuræ 1, feceram, uti erat magis pronum, abscissam IN $= x$, qua positione adhibita, habebam $LO^2 = (a - \frac{1}{3}x)^2 :$ $LN^2 = \frac{4}{9}x^2 :: OH^2 = r^2 : NT^2 = \frac{c^2x^3}{a^3}$; unde mihi obvenit æquatio $x^3 - 6ax^2 + 9a^2x - \frac{4a^3r^2}{c^2} = 0$. In ea, facta $z + 2a$ $= x$ ad eliminandum secundum terminum, habui $z^3 - 3a^2z$ $+ a^2(2a - \frac{4ar^2}{c^2})$, quæ usque adeo facile construi poterat ad anguli trisectionem. Hinc cum ea positio det $z = x - 2a =$ IN $-$ IR

— IR = RN, vidi statim, satius fore, si fieret ipsa $RN = x$, quo pacto debet obvenire statim æquatio illa ipsa carens secundo termino sine ullo transformationis subsidio.

85. Casu animadverti multo post, cum densitatis rationem investigarem, esse NS triplam OL, ex quo mihi statim facile innotuit, rem eo adduci posse, ut datis punctis I, S quæri deberet punctum N ita, ut quadratum ejus distantiæ IN ductum in distantiam alteram NS æquaretur solido dato juxta num. 14, quo omnes reducuntur æquationes gradus tertii, in quibus deficiente secundo termino tertius est negativus: sed ad ejusmodi æquationem obtinendam oportet abscindere SR trientem datæ SI, & denominare x distantiam RN, uti præstiti.

86. In eo quidem nulla difficultas occurrebat, vel admodum exigua; trisectio anguli itidem exhibuit mihi admodum expedite casus omnes pendentes a positione puncti H assumpti ubicumque intra rectam OC: deprehendi etiam facile, pro punctis H assumptis in rectâ OC productâ, habere locum eandem æquationem, sed ibi unicam haberi realem radicem, quin arcus circularis trisectio ulli usui esse posset. Multo serius animadverti illud, quod jam ab initio debebam animadvertere, eam solutionem non esse generalem pro punctis assumptis in quavis recta, cum possent proponi etiam rectæ transeuntes per ipsam cuspidem causticæ, vel infra ipsam, quo casu paullo aliter disponenda erat figura, & instituendus calculus, uti est deinde præstitum in adnotatione ad num. 35. Quoniam pluribus jam vicibus omnem dissertationis ordinem mutaveram, simplicioribus, vel generalioribus substitutis, & res ad id, quod mihi initio quærendum proposueram, non pertinebat; ut novam mutationem evitarem, adnotatione sum usus sejuncta a textu, quæ methodum adhibitam extenderet.

87. Processi inde ad investigandam densitatem luminis in quovis loco dato H. Illud mihi statim innotuit, multo faciliorem fore perquisitionem, si considerandam susciperem densitatem luminis venientis ex unico loco, nam consideratio luminis compositi ex omnibus tribus provenientibus e tribus locis P, P', P'' debebat esse multo operosior, cum singularum æquationis radicum valo-

valores analytici seorsum haberi non possent. Inquirens autem in ejusmodi densitatem respondentem soli annulo Pp, vidi facile, eam fore proportionalem reciproce rectangulo LO×ON, & inde facile intuli casus omnes densitatis auctæ in infinitum, evanescente nimirum OL, OL'', ubi punctum H abit in O, & ON, ON', ubi abit in C. Verum ad determinandum locum minimæ densitatis primo quidem usus sum calculo.

88. Positâ itidem IN $= x$, IO $= a$, obtinui OL $= a - \frac{1}{3}x$, ON $= x - a$, adeoque OL×ON $= -\frac{1}{3}(x^2 - 4ax + 3a^2)$. Differentiando hanc formulam, & omittendo divisorem communem $-\frac{1}{3}$, obtinui $2xdx - 4adx = 0$, adeoque $x = 2a$, sive IN $=$ IR, quo casu cum evanescat RN, adeoque RM, & idcirco RK, & RG, existente IG $= \frac{1}{2}$IE, vidi, fore ibi quadratum OH dimidium quadrati OC.

89. Eo pacto obtinui minimum, quod habetur in puncto q in prima oscillatione, & in puncto q' in tertia inter duo infinita marginis, & centri. Verum ea formula mihi non exhibebat illud minimum, quod habetur in O in media secunda oscillatione. Cum inquirerem in originem ejus defectus, vidi haud ita difficulter, illud minimum non contineri formulâ $x^2 - 4ax + 3a^2$, quæ non habet ullum limitem maximi, qui minimæ densitati respondeat, præter illum, in quo $x = 2a$. Illa minima densitas respondet puncto N eunti in I, ubi $x = 0$. Porro si valor x perpetuo minuatur, donec evanescat; formula ita crescit, ut abeunte x in negativum, adhuc pergat crescere, & crescat perpetuo in infinitum. At id ipsum minimum pendet a natura curvæ, vi cujus valor x non transit e positivo in negativum, sed posteaquam evanuit in appulsu N ad I, retro regrediente ipso N, iterum crescit ex parte positiva. Debetur id maximum in formula, minimum in densitate, non naturæ ipsius formulæ, sed naturæ curvæ non permittentis valorem x formulæ excurrere per omnes magnitudines hinc & inde a zero.

90. Si autem libeat in ipsa differentiatione invenire indicium ejus minimi, oportebit eumdem conferre cum ipsa natura curvæ. In ea ibi ob ipsam naturam ejus cuspidis evadit valor dx infinities

ties major, quam alibi respectu differentiæ ordinatæ, si assumpto valore alterius abscissæ x immoto, altera abscissa $x + dx$ concipiatur ad ipsam accedens in infinitum, decrescente in infinitum dx. Potest autem ibi alio pacto considerari dx, nimirum ut differentia inter duas x, pertinentes ad bina puncta extrema arcus infinitesimi, qui concipiatur motu continuo delatus ita, ut ejus extrema puncta aliud post aliud transcurrant punctum I. Ubi medium ejus arcus devenerit ad I, duo extrema ejus puncta hinc, & inde posita ab ipso I eandem habebunt abscissam, existentibus ibi æqualibus binis x, & existente $dx = 0$. Quamobrem adhuc ibi habebitur $2xdx - 4adx = 0$, non quod ibi sit $x = 2a$, sed quod sit $dx = 0$, facta $= 0$ differentia formulæ, quæ redit ad priorem valorem.

91. Ejusmodi aberrationes a regulis communibus sæpe accidunt in curvarum punctis quibusdam, quæ ego appellare soleo anomala, uti sunt puncta flexus contrarii, cuspides, atque alia quædam; & jam diu constat; quod & ego demonstravi jam ab anno 1740, in punctis flexus contrarii fallere methodum communem inveniendi maxima, & minima per differentiam positam $= 0$: sed hæc hoc loco innuisse sit satis.

92. Dum illam formulam considerarem $-\frac{1}{3}(x^2 - 4ax + 3a^2)$, quæ oritur multiplicando $x - a$ per $\frac{1}{3}(3a - x)$, facile animadverti illud, $3a - x$ exhibere mihi valorem SN, qui proinde deberet esse triplus LO. Statim mihi directe patuit, rem ita se habere, adeoque ejus demonstrationem præmisi initio numeri 14, & ejus ope solutionem problematis, quo radii quærebantur transeuntes per H, multo elegantiorem concinnavi, reducendo eodem numero problema ipsum ad inventionem puncti N inter puncta data I, S ejusmodi, ut $IN^2 \times SN$ æquaretur dato solido, mutatâ idcirco magna parte eorum, quæ jam conscripseram.

93. Cum vero viderem, densitatem quæsitam esse in ratione reciproca rectanguli $ON \times NS$ tripli $LO \times ON$; illud mihi primo in mentem venit, ut eam exprimerem per rectam lineam ei rectangulo proportionalem. Vidi, eam rectam fore ordinatam ad parabolam quamcumque, quæ haberet chordam OS perpendicularem axi:

axi: facile enim demonstratur, id rectangulum fore æquale rectangulo sub ea ordinata, & parametro. Eam curvam delineaveram, & progressum omnem densitatis ope ejus ordinatæ facile determinaveram, cum illud occurrit, quod statim initio debuisset, nihil opus esse altiore curva, cum quadratum ordinatæ ad circulum, cujus diameter OS, æquetur rectangulo sub ON, & NS, ubi N cadat inter O, & S, & quadratum tangentis, ubi N abeat extra eos limites in N', vel N''. Sed statim & illud occurrit, nec circulo opus esse, cum satis ipsa sola consideratio rectanguli ON × NS omnia per se præberet per varias positiones puncti N, quibus consideratis præstiti omnia a num. 22, sine calculo differentiali, sine parabola, sine circulo.

94. Cum adhuc calculum differentialem adhiberem ad deprehendendam minimam densitatem luminis ex unico loco venientis, tentavi viam, qua invenirem phænomena omnia densitatis luminis venientis simul ex omnibus tribus locis, quæ initio mihi apparuit satis ardua. En specimen tentati itineris.

95. Positâ OH $= r$, IN $= x$, IO $= a$, NT $= x^{\frac{3}{2}}$, & factis LN $= \frac{2}{3}x$: NT $= x^{\frac{3}{2}}$ :: OL $= a - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}(3a-x)$: OH $= r$, habueram $2r = 3ax^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}$. Positis autem IN $= x$, IN' $= x'$, IN'' $= x''$ habebam densitatem ex tribus locis P, P', P'' simul, ut $\frac{1}{\text{LO} \times \text{ON}} + \frac{1}{\text{L'O} \times \text{ON'}} + \frac{1}{\text{L''O} \times \text{ON''}}$, sive ut

$$\frac{1}{x^2 - 4ax + 3a^2} + \frac{1}{x'^2 - 4ax' + 3a^2} + \frac{1}{x''^2 - 4ax'' + 3a^2},$$

nullâ mutatione factâ in signis, licet in secundo valore evadat negativum ON', in tertio OL'', cum ex omnibus locis positivum ingeratur lumen, utut expressum valore negativo. Capienda jam erat differentia hujus formulæ, & ponenda $= 0$.

96. Ibi dx, dx', dx'' reducendæ essent ad dr ope formulæ $2r = 3ax^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}$, in qua $2dr = \frac{3}{2}ax^{-\frac{1}{2}}dx - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}dx$, sive $dx = \frac{4x^{\frac{1}{2}}dr}{3(a-x)}$, $dx' = \frac{4x'^{\frac{1}{2}}dr}{3(a-x')}$, $dx'' = \frac{4x''^{\frac{1}{2}}dr}{3(a-x'')}$. Hoc pacto elimina-

tis jam dx, dx', dx'', tota formula dividi posset per dr, & remaneret æquatio data per x, x', x''. Haberentur autem aliæ tres $2r = x^{\frac{1}{2}}(3a - x)$, $2r = x'^{\frac{1}{2}}(3a - x')$, $2r = x''^{\frac{1}{2}}(3a - x'')$, quarum ope eliminatis x, x', x'', remaneret unica æquatio pro r.

97. Hoc pacto haberetur expressio densitatis quæsitæ per solum valorem r, adhibitis ad eam inveniendam tribus valoribus x, x', x'', sive tribus æquationis radicibus, utut incognitis, & talibus, ut per formulam algebraicam singulæ sine imaginarietate exprimi non possint. Verum is quidem calculus ita est molestus, & implexus, ut omnino vel deterreat, vel saltem animum avertat. Idcirco omissâ ejusmodi perquisitione illud mihi in mentem venit, satius fore, si prius investigarem, quota pars totius luminis contineretur circello, cujus radius OH, ut deinde captâ differentiâ ejus valoris, & divisâ per annulum Hh, obtinerem expressionem quæsitam densitatis luminis totalis.

98. In ejusmodi perquisitione vidi facile, lumen ad annulum CH devenire ab annulo F'P'', ab annulo P'X, & ab annulo XP, nimirum ab annulo F'P'', & ab annulo P'P; ad circellum autem OH ab annulo P''Y', circulo AP', & annulo PY. Porro annuli ii sunt differentiæ circulorum respondentium eorum peripheriis, adeoque pro circello OH habetur circulus AP', & differentia circulorum AP, AY, ac AY', AP'', quæ duæ simul efficiunt differentiam circulorum AP, AP'': pro annulo HC habetur differentia circulorum AP'', AF', & circulorum AP', AP. Nimirum si sumantur quatuor circuli AF, AP'', AP, AP', ordine suæ magnitudinis, pertinent ad annulum, & ad circellum alterni sumpti positive, & negative: si ii dicantur a, b, c, d, pertinent ad annulum $a - b + c - d$, ad circellum $b - c + d$, quorum summa est a circulus totius aperturæ.

99. Porro patebat, eos circulos esse, ut quadrata radiorum, & noveram, ea quadrata esse, ut rectas IN', IN, IN'', IE, juxta num. 5. Quare inde intuli lumine totali expresso per IE, exprimi lumen circelli per IN' + N'N'', & lumen annuli per N'N + N''E.

100. Quo-

100. Quoniam autem $RN + RN''$ erat $= RN'$ ob $RM + RM'' = RM'$, haud difficulter perspexi, esse $IN' = IR - RN' = IR - RN - RN'' = IR - 2RN - NN''$, adeoque $IN' + NN'' = IR - 2RN = 2OR - 2RN$. Inde vero ob lumen totale expressum a tota $IE = 4OR$, statim patuit, lumen residuum annuli HC debere exprimi per $IR + 2RN = 2OR + 2RN$. Assumptis autem dimidiis OR, & RN, sive RM, patebat, posse exprimi totum lumen per OS, lumen circelli per SN, lumen annuli per ON, & sponte inde profluebat theorema propositum num. 49, semisummam luminis circelli, & annuli ad semidifferentiam esse, ut est radius circuli OR ad chordam RM.

101. Id quidem theorema & elegans omnino est, & simplex: at satis longo ambitu ad ipsum deveneram, cum nondum animadvertissem, a binis locis P', & P'' simul, tantum luminis devenire ad annulum HC, quantum a solo loco P. Poteram ego quidem id ipsum vel inde colligere, cum in circellum OH ingeratur ex P lumen ab annulo XP, sive differentiâ circulorum AP, AX, cui respondet recta SN differentia rectarum IS, IN, quæ cum sit dimidia valoris $2OR - 2RN$ exprimentis totum lumen, statim inde inferebatur, a solo loco P ingeri tantum, quantum a locis P', P'' simul. Verum cum non pateret hic usus luminis ingesti a solo loco P, ipsum seorsum non quæsieram, sed totum annulum PP' simul consideraveram, ut idcirco eam ibi æqualitatem non adverterim. Ubi autem id agnovi ea ratione, quam inferius indicabo, multo brevior, & expeditior patuit via ad id ipsum theorema, ex hac ipsa expressione luminis ingesti e solo P respondentis rectæ SN, qua deinde sum usus, deletis iis, quæ ante conscripseram.

102. Inventâ simplici mensurâ totius luminis conclusi circello OH, quod nimirum esset proportionale rectæ SN, inde progressus sum ad definiendam densitatem in annulo H*h* sequenti ratione.

103. Densitatem in H*h* exprimit totum lumen, quod eo ingeritur divisum per annulum H*h*. Quoniam autem totum lumen circelli OH exprimitur per SN, lumen annuli H*h* exprimet differentia rectæ SN, quæ est eadem, ac differentia rectæ RN ob RS

 con-

constantem, sive chordæ RM; & quoniam IG est, ut quadratum OH, adeoque ut circellus OH; annulum Hh, qui est ejus circelli differentia, exprimet differentia rectæ IG, sive RG, ob IR constantem, vel chordæ RK.

104. Res igitur eo deducta erat, ut inveniretur expressio commoda rationis, quam habet differentia chordæ RM ad chordam arcus tripli RK.

105. Ad eam investigandam reduxi utramque differentiam ad differentiam arcus, nam differentia arcus tripli est tripla, adeoque utraque differentia chordæ facile reducitur ad differentiam arcus minoris, quæ proinde ex utroque termino rationis eliminatur, remanente ratione expressa per quantitates finitas. Ad eam rem adhibui hujusmodi theorema elementare: differentia arcus ad differentiam chordæ terminatæ ad alterum diametri extremum est, ut ipsa diameter ad chordam, quæ terminatur ad ejus extremum alterum. Nam in fig. 5. si chordæ IM, Rm sibi invicem occurrant in N, lineola MN æquivalebit arcui circuli descripti centro R ob angulum RMN in semicirculo rectum. Quare erit mN differentia chordæ: sunt autem similia triangula mMN, IRN ob angulos ad M, & R insistentes eidem arcui Im, & angulos ad N oppositos ad verticem æquales. Erit igitur differentia arcus Mm ad Nm differentiam chordæ RM, ut diameter RI ad IN, quæ potest sumi pro chorda IM.

106. Hinc in fig. 6 differentia chordæ RM erit $\frac{MI \times Mm}{RI}$, differentia chordæ RK $= \frac{KI \times Kk}{IR} = \frac{3KI \times Mm}{IR}$, & illa divisa per hanc erit $= \frac{MI}{3KI}$. Quare densitas quæsita erit, ut hæc fractio, sive, omisso constanti 3, ut fractio $\frac{MI}{KI}$.

107. Hæc expressio binas habet variabiles, quarum nexus mutuus non est ita simplex, ut possit statim ingerere ideam variationum omnium, quæ densitati accidunt. Quamobrem ut ad unicam variabilem devenirem, arcu MK bifariam secto in N, duxi rectam IN quærens, quid mihi exhiberet angulus NIR æqualis KIM. Cum & angulus KRI sit æqualis angulo KMI ob commu-

nem

nem arcum KI, cui insistunt, vidi statim, posito D in concursu rectarum IN, RK, fore similia triangula KIM, DIR, adeoque $\frac{MI}{KI} = \frac{RI}{DI}$, sive ob RI constantem, fore illam fractionem, & densitatem quaesitam reciproce ut ID.

108. Variationes rectae ID persecutus pro varia magnitudine arcus RK, qui in fig. 1 pendet a positione puncti G in IE, & H in OC, jam definiveram loca densitatis infinitae, & minimae, putans me devenisse ad expressionem simplicissimam; licet adhuc tota lex mutationis rectae ID non esset satis obvia primo aspectui; cum repente animadverti, posito A in occursu rectae OM cum RK, oriri angulum AOR aequalem angulo DIR, insistente illo ad centrum arcui MR, hoc ad peripheriam arcui duplo RN. Hinc $\frac{MI}{KI} = \frac{IR}{ID} = \frac{OR}{OA}$, sive ob OR constantem reciproce ut OA.

109. Ipsius OA variatio vix, aut ne vix quidem est magis manifesta, quam variatio ID.: at vidi statim ex iis, quae in fig. 3 demonstrata fuerant in adnot. ad num. 15, esse OA ut differentiam quadratorum OR, RM. Est enim ibi OR : RM :: RM : $MA = \frac{RM^2}{OR}$, adeoque $OA = OM - MA = OR - \frac{RM^2}{OR} = \frac{OR^2 - RM^2}{OR}$, qui valor est ut $OR^2 - RM^2$ ob OR constantem.

110. Reducta res erat ad variationem solius chordae RM, cujus mutationes omnes statim incurrunt in oculos. At progressus per unum, & alterum passum, vidi in fig. 1 differentiam quadratorum OR, RM esse eandem, ac differentiam quadratorum OR, RN, adeoque aequalem rectangulo $ON \times NS$. Eo delatus agnovi locum, per quem transieram quaerendo rationem densitatis luminis provenientis a solo loco P, quae ratio inventa est eadem numer. 52. Id quidem me illico perculit; cum enim in eadem ratione mutaretur densitas luminis venientis a solo loco P, ac luminis venientis ex omnibus tribus simul, oportebat, constans aliqua ratio intercederet inter lumen ex eo loco solo adveniens, &

lumen

lumen delatum ex omnibus tribus simul. Quæsivi igitur, quæ esset ejusmodi ratio, & ea perquisitio industriam requirebat non vulgarem.

111. Primo quidem vidi, annulos Pp, $P'p'$, $P''p''$ inferre in annulum Hh lumen sibi proportionale, eos autem esse, ut differentias circulorum AP, AP', AP'', sive quadratorum eorundem, vel ut differentias rectarum IN, IN', IN'', quæ sunt eædem, ac differentiæ rectarum RN, RN', RN'', sive chordarum RM, RM', RM'': quærenda igitur erat relatio inter ejusmodi differentias.

112. Ad eam relationem investigandam, primo mihi sese obtulit theorema expositum num. 105, ex quo, si mente concipiantur chordæ IM, IM', IM'', eæ debent esse, ut differentiæ chordarum RM, RM', RM'': nam ob arcus MM', MM'' constantes, differentiæ arcuum RM, RM', RM'', debent esse æquales inter se, & ipsæ ad diametrum RI ubique eandem, debent per id theorema esse, ut sunt eæ differentiæ ad eas chordas. Porro noveram, ubi tria puncta M, M', M'' circulum dividunt in tres partes æquales, assumpto quovis peripheriæ puncto I, chordas IM', IM'', quæ ducuntur ad puncta terminantia arcum, in quo assumitur I, simul sumptas, æquari chordæ tertiæ IM, quod quidem theorema prorsus elementare ingentem habet usum, & facillime demonstratur, ac ex eo etiam pendebat æqualitas summæ chordarum RM, RM'' cum chorda RM'. Quare statim se prodidit æqualitas differentiarum pertinentium ad chordas RM', RM'' cum sola differentia chordæ RM, quæ mihi prodidit illud, rationem illam constantem luminis delati e locis P', P'' cum lumine delato ex unico loco P esse rationem æqualitatis.

113. At ea æqualitatis deductio erat adhuc aliquanto prolixior: indigebat novis rectis, & lemmate, quod non est verum, nisi in differentiis infinitesimis, quarum theoriâ indiget ad sui demonstrationem. Vidi autem, rem debere immediate profluere etiam ex æqualitate chordæ RM' cum summa chordarum RM, RM''. Verum ea æqualitas me initio suspensum tenuit, cum videretur idcirco differentia RM' debere æquari differentiis RM, RM'' simul, non differentia RM differentiis RM', RM''. At rem aliquan-

quanto diligentius perpendens, vidi illud, ob MM'' constantem, crescente chorda RM, majorem e binis RM', RM'' necessario crescere, minorem decrescere, & cum excessus ejus incrementi supra decrementum sociæ minoris debeat æquari incremento minoris, oportere idcirco incrementum minimæ e tribus æquari simul & incremento maximæ, & decremento mediæ: vidi nimirum, quod & num. 95 innui, nullum hic habere usum positiva, & negativa, ubi nimirum quantitas luminis ingerenda in annulum Hh e quovis trium locorum P, P', P'' est quidpiam positivum, nec negativa alium usum habeant, nisi ad determinandas plagas motuum in iis differentiis, quarum singularum magnitudini, quocunque ea signo affecta sit, est proportionale lumen ipsum, quod ingeritur.

114. Hic quidem fuit errorum meorum finis. Deletis fere omnibus, quæ conscripseram, nimirum omissis tot tortuosis itineribus, quibus ad hanc æqualitatem deveneram, statim post ipsam constructionem primi problematis posui numero 9 adnotationis ad numerum 15 textus hanc ipsam æqualitatem incrementi chordæ RM cum incremento alterius e chordis RM', RM'', & decremento alterius, quæ æqualitas debeat manere etiam in m, m', m'', licet ibi incremento Rm respondeat incrementum Rm'', & decrementum Rm'. Id me brevi itinere deduxit ad æqualitatem luminis propositam num. 39; unde & secundi, & tertii problematis solutio profluxit sane elegans, & expedita. Eam semitam non habuissem, nec æqualitatem differentiarum vidissem, nec ejus nexum cum æqualitate luminum, nisi ad hanc illo tam longo ambitu deductus percepissem terminorum viciniam inter se, & cum ipso illo, quod in iis problematis quærebatur.

115. Prona quidem erat ea elementaris veritas, quæ mihi alibi etiam fortasse futura erit usui aliquando: *in tribus chordis a quovis peripheriæ puncto ductis ad tria puncta ipsam dividentia in partes æquales tres, incrementum brevissimæ æquari incremento longissimæ, & decremento mediæ simul sumptis*. Prona erat ejus translatio ad hanc æqualitatem luminis in hac investigatione, pronus hujus usus ad hæc solvenda problemata; sed eorum

eorum nihil ego quidem perspiciebam initio, nec vero perspexissem, nisi post adeo longam indaginem.

116. Dum eam meæ mentis imbecillitatem contemplor, alia se mihi prodit imago rei nihilo minus apta ad eam exprimendam, quam ipse ille implexus per sylvam error. Videor mihi aliquando videre immensam quandam, apertamque planitiem signis marmoreis, & ornatissimis fontibus, ac floribus, & plantis refertam, ad cujus latus per ampliorem viam ingens cæcorum, & semicæcorum turba prætereat. Illi nihil deprehendunt, hi umbram quandam percipiunt monumentorum, quæ ad paucos passus intra campum sunt sita, de quibus vix quidquam agnoscant, nisi ad singula accedant, & palpando magis, quam adspectando deprehendant demum, ad quam singula classem pertineant; dum quispiam bene oculatus remotissima quæque cum proximis perspicit simul omnia, & unico intuitu contemplatur. Eodem sane pacto vulgus nihil extra communem semitam situm deprehendit: vulgares Geometræ prima quædam in campi limite sita, utcumque agnoscunt: ii, qui habentur pro perspicacissimis, ad paucos passus cognitiones protendunt suas, labore ingenti, quos si ita veluti attentantes, palpantesque intueatur aliud mentium genus ordinis supra humanam naturam multo eminentioris; dum omnem non earum modo veritatum, sed longissime etiam positarum multitudinem immensam intuitu unico perlustrat; irrideat, necesse est, humanam imbecillitatem, cæcitatemque, potissimum si nos videat, tam paucis tanto labore utcumque semicompertis, per intolerabilem dementiam superbire.

A D-

ADDITAMENTUM

De distributione luminis per circellum erroris diversæ refrangibilitatis.

117. NUMERO 3 hujus supplementi exhibui theoremata a Newtono proposita pro hac distributione, & num. 4. promisi eorum demonstrationem excerptam ex mea dissertatione de lumine edita anno 1748. Hìc fidem liberabo adhibitis schematis, quæ ibidem expressi, quæ quidem hic erunt 7, & 8, ibi erant 11, & 12: in iis litteræ ad eadem puncta denotanda adhibentur diversæ a litteris hìc adhibitis in fig. 1, sed ipsâ schematum comparatione illæ facile ad has reducentur. In ea dissertatione a num. 115 habentur, quæ hìc sequuntur.

118. Newtonus Opticæ parte 1, libri 1, prop. 7. agens de distributione radii albi provenientis ab eodem puncto objecti, & transmissi per lentem vitream intra circellum, per quem dispergitur ob diversam refrangibilitatem diversorum colorum, qua fit, ut non omnes in eodem puncto coeant, sed alii propius, alii remotius a lente ipsa, sic habet: „ Sit (hìc in nostra fig. 7) ADa, „ istiusmodi circulus centro C semidiametro AC descriptus, sitque „ Bb minor circellus descriptus eodem centro cum isto ADa, ejus„ que semidiametrum AC intersecans in B: bisseca autem AC in „ N. Jamque, ut ego quidem calculum posui, densitas luminis in „ quovis loco B erit ad densitatem ejusdem in N, ut AB ad BC, „ totumque lumen intra circulum minorem Bb ad totum intra ma„ jorem ADa erit, ut excessus quadrati AC super quadratum AB „ ad quadratum ipsius AC ".

119. Sine calculo etiam id theorema sic geometrice eruitur ex illa æquabili distributione (nimirum luminis refracti per longitudinem spectri, de qua in illa dissertatione (*) agebatur). Ra-

(*) Tum in hoc, tum in aliis locis suæ Opticæ Newtonus supposuit distributionem æquabilem luminis per totum spectrum, ut in illa ipsa dissertatione ostenditur, sine qua suppositione nec theoremata ibi proposita essent vera, nec solutiones problematum procederent.

dii incidentes in fig. 8 ad sensum paralleli in lentem DE ita refringantur, ut rubei quidem minime refrangibiles, contemptâ aberratione proveniente a figura vitri, convergant ad punctum axis M, violacei autem maxime refrangibiles ad punctum L, & reliqui omnes radii convergent ad punctum aliquod interjacens inter puncta L, M, ac totidem coni efformabuntur, quorum omnium vertices erunt in recta illa ML. Si omnes hi radii excipiantur alicubi plano ad axem perpendiculari, efformabunt circulum quendam, & omnium ejusmodi circulorum minimus erit, si planum transeat per intersectionem AC*a* extremorum conorum terminatorum ad M, & L, ut satis patet (*).

120. Quoniam anguli MEL, MDL sunt circiter pars vigesima septima totius refractionis, sive totius anguli FME, vel FMD, erunt satis exigui, & distributio radiorum æquabilis per angulos eosdem trahet secum æquabilem distributionem eorundem per intervallum LM convenientium in punctis O, H. Mediæ refrangibilitatis radii coibunt in C, reliqui tam minus, quam magis refrangibiles dispergentur ante concursum in aliquo puncto H, vel post concursum in aliquo puncto O, per circellum, cujus diameter IC*i*, & intra eundem circulum singulorum densitas erit ubique ad sensum eadem, ut erat eadem in appulsu ad lentem DE. Excurret autem a C ad A duplex series continua peripheriarum circulorum I*i* sensim majorum, quarum peripheriarum numerus in æqualibus ipsius CA segmentis erit ad sensum æqualis ob æquabilem illam distributionem radiorum in angulis AE*a*, AD*a*. Sed si aliorum densitates cum aliorum densitatibus comparentur, erunt ipsæ in ratione reciproca circulorum, per quos singuli

---

(*) Facile hic demonstratur primum e binis theorematis adhibitis in supplemento II Opusculi II Tomi I, cujus mentionem fecimus in adnotat. ad numerum 10 hujus supplementi, quod nimirum, ubi agitur de errore refrangibilitatis, *error longitudinalis sit ad diametrum erroris circularis, ut est dupla distantia focalis ad aperturam*. Nam ob angulos MD*a*, MEA exiguos latera L*a*, LA haberi poterunt pro parallelis lateribus *a*M, MA, adeoque LAM*a* pro parallelogrammo, in quo error longitudinalis LM sit sectus bifariam ab altera diametro A*a* in C. Est autem CM : FM :: A*a* : DE, adeoque CM : A*a* :: FM : DE, & LM = 2CM : A*a* :: 2FM : DE.

guli disperguntur, sive in ratione reciproca duplicata semidiametrorum CI.

121. Exprimat jam fig. 7. eosdem circulos Aa, Ii, & in quovis puncto B aderit aliquid luminis ex omnibus radiis, quorum circumferentia terminatur ad quodvis punctum I positum inter B, & A, & nihil ex iis, qui ad B non pertingunt. Singulorum autem densitas erit in ratione reciproca duplicata rectæ CI; ac proinde exprimetur per IG ordinatam ad hyperbolam tertii gradus FGM descriptam inter asymptotos perpendiculares AC, CV, in qua ordinatæ sint in ratione reciproca duplicata abscissarum*. Quare cum excurrente æquabiliter puncto I ab A ad B, numerus quoque peripheriarum circulorum æquabiliter excurrat; exprimet tota area hyperbolica FABM summam omnium particularum luminis existentium in B pertinentium ad omnes ejusmodi circulos. Est autem ex hujus hyperbolæ natura area ipsius ab ordinata quavis BM, vel AF ad partes oppositas C æqualis rectangulo CBM, vel CAF. Quare eæ areæ sunt reciproce, ut ipsæ CB, CA, sive directe ut CA, CB, & dividendo erit AB ad BC, ut differentia illarum arearum, sive area FABM, ad aream ultra FA positam. Abeat jam punctum B in N, & factis AB, BC æqualibus, evadet area FABM æqualis illi areæ positæ ultra FA. Quare area pertinens ad quodvis punctum B ad hanc ipsam aream pertinentem ad punctum N, sive densitas radiorum in quovis puncto B ad eorundem densitatem in N erit in illa ratione AB ad BC, ut Newtonus posuit primo loco.

122. Ut jam innotescat quantitas luminis comprehensi quovis circulo Bb, ad quodvis punctum O rectæ CV ducatur recta AO occurrens ordinatæ BM in P, & recta quævis BP exponet numerum particularum in quavis circumferentia cujusvis circuli Bb. Nam erit is numerus ut densitas, & circumferentia Bb simul, sive directe ut densitas, & ut radius CB. Quare is numerus pertinens ad quodvis punctum B ad eundem numerum pertinentem ad N erit, ut AB ad BC, & BC ad CN simul, sive ut AB ad CN. Stante igitur puncto N, & utcumque variato B, erit numerus in circumferentia Bb, ut AB, sive ut BP. Quare quanti-

 tas

tas luminis in toto circulo CB inclusi exprimetur per aream BCOP, sive per differentiam similium triangulorum CAO, BAP; quæ cum sint, ut quadrata laterum CA, AB; eadem quantitas exprimetur per differentiam quadratorum eorundem: & quoniam abeunte B in A, differentia illa jam æquatur quadrato solius CA, erit in quavis alia puncti B positione quantitas luminis inclusa circulo Bb ad totum lumen inclusum toto circulo Aa, ut differentia quadratorum CA, AB ad quadratum CA. Quod erat alterum a Newtono propositum.

123. Hæc quidem in ea dissertatione: addam hic illud tantummodo, patere ex hac ipsa demonstratione illud, in illo circello haberi in centro unionem omnium colorum, adeoque lumen album, si id objecti punctum, ad quod ii radii pertinent, & is circellus, pertinebat ad objectum album, vel per se radians, quod nimirum reflectat, vel emittat omne radiorum genus: tum abeundo versus margines deerunt alii post alios colores, qui circa medium spectrum versantur, ac demum in ipso circelli margine habebuntur uniti simul radii rubei, & violacei, qui gignunt purpureum vinaceum nulli primigenio colori similem. Inde autem constat, ex hoc erroris genere non provenire colores illos, qui in communibus telescopiis apparere solent, qui quidem sunt in objectorum lucidorum marginibus violaceus versus campi marginem, & rubeus versus centrum, sed eos gigni ab oculari juxta theoriam, quam exposuimus in adn. ad num. 98. dissertationis primæ (nimirum primæ ex illis veteribus, quarum tertia habet in fine hoc additamentum). Quamobrem conjunctio binarum lentium convexæ, & concavæ e binis substantiis pro objectivo vitro, quæ errorem illum diversæ radiorum refrangibilitatis corrigit in foco ipsius objectivi, non tollit illos colores, qui in communibus telescopiis apparere solent, ubi campus habeatur amplior, cum augmento imaginis objecti satis magno, quod quidem etiam in ea adnotatione monuimus.

OPU-

OPUSCULUM II.

De lente ustoria potissimum ingenti.

1. Constructa est ante hos aliquot annos Parisiis lens ustoria ingens constans binis crassioribus laminis vitreis habentibus figuram concavo-convexam sphæricam crassitudine æquali, & continentibus spiritum vini inclusum, cujus lentis apertura habet diametrum pedum 4, & distantia focalis est pedum 10. Non defuit, qui affirmaret, melius fore, si ea fieret potius tota e flint. Ea de re interrogatus, quid sentirem, non modo rejiciendum censui id consilium ob plures rationes, quas hic exponam, sed ea occasione perquisitionem institui de vi luminis collecti ab ejusmodi lente, determinando impedimenta omnia, quæ non permittunt, nisi certam quandam radiorum unionem minorem eâ, quæ prima fronte haberi posse videatur. Ea omnia sunt argumentum hujus Opusculi.

2. Vis lentis ustoriæ provenit ex intensitate radiorum, quorum ii omnes, qui incidunt in ejus superficiem ingentem, colliguntur in spatio exiguo. Quo minus est id spatium, eo major est ea vis: quanquam ipsa contractio ejus spatii id efficit, ut actio luminis collecti applicari non possit nisi exiguæ parti corporum, quæ ipsi objiciuntur. Potest quidem extendi id spatium removendo objectum ipsum a foco lentis: sed tum decrescente intensitate luminis, decrescit vis in singulis particulis spatii ipsius. Considerandum est primo loco, quæ sit unio, & intensitas, quæ per ejusmodi lentes obtineri possit.

3. Radii solares incidentes in quampiam lentem constantem ex unica quapiam substantia non possunt colligi in unico puncto ob triplicem rationem: 1°. quia sol non est punctum unicum, sed habet diametrum apparentem, & eam quidem non exiguam, nimirum circiter minutorum 31: 2°. quia figura sphærica non colligit

radios

radios ne homogeneos quidem, & digressos ex unico puncto solis, ut ex ejus centro, in puncto unico, sed, ut vidimus in supplemento Opusculi primi, eos dirigit secundum tangentes curvæ cujusdam, quæ appellatur caustica: 3°. quia etiam si singulæ radiorum species colligerentur a figura sphærica in totidem punctis; ea puncta essent diversa, radiis violaceis concurrentibus omnium citissime, & rubeis in distantia omnium maxima.

4. Singulæ ex iis tribus causis dispergunt radios per quemdam circulum, qui in lente habente ejusmodi aperturam, & distantiam focalem non est exiguus: disperguntur autem per circulum, cujus diameter est proxime æqualis summæ diametrorum respondentium iis omnibus causis. Postremi duo ex iis tribus circulis sunt ii, quos in eodem Opusculo primo hujus Tomi appellavimus errores circulares sphæricitatis, & refrangibilitatis.

5. Diameter primi circuli pendet a sola distantia focali lentis, cui est proportionalis. Diameter secundi pendet a distantia focali, a diametro aperturæ, & a qualitate refractivâ substantiæ ipsius lentis, & est eo major, quo distantia focalis est minor, & quo diameter aperturæ est major, sed in illius ratione reciproca duplicata, & in hujus directa triplicata, ut facile colligitur ex iis, quæ habentur in eodem supplemento Opusculi I. Diameter tertii pendet ab apertura, & a qualitate distractiva substantiæ, eo major, quo diameter aperturæ est major, sed in ejus ratione simplici, ac major, ubi vis distractiva est major. Licet autem in aperturis exiguis circulus secundus respondens errori figuræ sphæricæ sit perquam exiguus respectu tertii, qui respondet diversæ refrangibilitati, & hic exiguus respectu primi, qui respondet diametro apparenti solis; adhuc tamen in lente proposita distantiæ focalis, & aperturæ ita magnæ, sunt satis magni omnes tres, ut mox patebit.

6. Distributio luminis per primum circulum est ad sensum æquabilis, per reliquos binos fit admodum inæqualiter. Vidimus in eodem illo supplemento, lumen ita distribui per tertium circulum, ut densitas ipsius in centro excrescat in infinitum, & in recessu a centro ita imminuatur, ut in peripheria prorsus evanescat;

scat : pro secundo circulo densitatem in medio excrescere itidem in infinitum , & in recessu ab ipso ita initio descrescere , ut ubi deventum sit ad distantiam, cujus quadratum æquatur dimidio quadrato totius semidiametri , evadat minima , tum iterum crescat , & in peripheria ipsa rursus excrescat in infinitum : ibi autem , ubi est minima , adhuc est satis magna , cum æquetur binis trientibus ejus , quæ haberetur , si ubique esset eadem.

7. Diameter primi circuli , ut mox videbimus , in distantia focali pedum 10 , assumptâ diametro solis minutorum 31 , est quamproxime lin. 13 . Diameter secundi in lente e vitro communi , in quo ratio sinus incidentiæ ad sinum anguli refracti sit , ut 153 , ad 100 , cujusmodi frequenter occurrunt , invenitur proxime 9,10 : at in iis flint, quæ habent eam rationem 160 ad 100 , qui valor in iis occurrit sæpe , obtinetur tantummodo 8,18 . Diameter tertii in vitris communibus provenit linearum 9,78 , in pluribus flint proxime 13 . Hinc diameter spatii circularis , per quod in ejusmodi lente diffunduntur radii , est pro iis vitris communibus proxime linearum 32 , pro flint linearum 34 . Sed postremæ lineæ habebunt pro utroque vitri genere densitatem luminis exiguam pertinentem ad marginem tertii circuli .

8. Pro computandis omnibus hisce valoribus habentur formulæ satis simplices , quæ exhibeant valores satis proximos veris , ubi aperturæ sint exiguæ respectu distantiæ focalis : verum applicari possunt etiam huic casui distantiæ focalis pedum decem cum apertura pedum 4 sine errore ita magno , ut perturbet judicium , quod ferri possit de lentibus ustoriis .

9. Sit in fig. 1 (Tab. VI) C centrum , ACA diameter aperturæ lentis , ad cujus puncta omnia devenient ab omnibus punctis disci solaris radii , quorum singuli componuntur ex ingenti multitudine filorum coloratorum habentium refrangibilitatem diversam : primus rubeus habet minimam , postremus violaceus maximam . Si axis lentis obvertatur centro solis S , radius SC transibit irrefractus , & integer per CF , reliqui omnes patientur duas refractiones , alteram in ingressu , alteram in egressu . Inter radios digressos e quovis alio puncto disci solaris habebitur semper unicus speciei

ciei cujusvis, qui egredietur per rectam parallelam illi, per quam advenerat binis exiguis refractionibus oppositis se mutuo destruentibus, qui quidem transibit per ipsum centrum C, si lens sit isoscelia, & prope ipsum, si curvaturæ superficierum oppositarum sint diversæ; erit autem ita proxima via nova priori productæ, ut potissimum in primo casu is radius, qui transit per centrum C, possit considerari pro continuato, & irrefracto. Hinc si LSL sit diameter disci solaris; radii LCE haberi poterunt pro irrefractis, adeoque dispergentur per angulum ECE æqualem angulo LCL determinanti diametrum apparentem solis, qui idcirco diffundentur per spatium EE, quod in plano perpendiculari ad axem CF erit circulus habens centrum in ipso axe in F. Ii non poterunt colligi, nisi adjecta lente alia multo magis convexa inter C, & F, quæ quidem ipsos non poterit colligere accurate in puncto unico ob errorem figuræ sphæricæ, ut mox patebit, sed hic interea agimus de effectu lentis unicæ.

10. Patet, datâ diametro apparente solis, semidiametrum FE fore proportionalem distantiæ CF, ad quam erit, ut radius ad tangentem semidiametri apparentis solis LCS = ECF. Cum is angulus sit admodum exiguus, poterit diameter EFE considerari ut arcus circuli habentis radium CF: radius autem æquatur arcui circuli continenti $57°.\ 17'.45''$, sive quamproxime minuta 3438. Quamobrem si distantia CF fiat $= h$, & numerus minutorum diametri apparentis solis n, erit diameter $EE = \frac{nh}{3438}$. Si fiat $n = 31$, $h =$ ped. $10 =$ lin. 1440, erit $EE = 12,98$, sive quam proxime $=$ lin. 13, uti posui num. 7.

11. Considerentur jam in fig. 2. radii advenientes a centro solis ad totam superficiem lentis, qui omnes erunt ad sensum paralleli, ut bini radii extremi BA, cum illo medio SC: singuli præter ipsum medium dividuntur in plurima fila colorata, ut diximus, sed hic considerabimus unicam speciem quampiam coloris ejusdem. Radii illi extremi BA refracti versus axem incurrunt in ipsum in quodam puncto F', quod non est idem pro reliquis, sed reliqua, quo minus distant ab axe, dum ad ipsum adveniunt;

eo

eo serius in ipsum incidunt post egressum: extremus eorum concursuum limes est quoddam punctum F, in quo concipiuntur concurrere cum axe ipso radii, qui infinite parum ab eo distant, dum adveniunt ad lentem. Omnes ii radii contingunt (*) causticam GEFEG, quæ habet cuspidem in F. Radii extremi AF' tangunt singuli alterum ex arcubus ejus cuspidis in G ante concursum axis F', tum progressi secant in E arcum oppositum: spatium omnium minimum continens omnes eos radios est circulus habens diametrum EE, & centrum in ejus intersectione I cum axe; nam id spatium versus F' augetur a dilatatione cuspidis, & versus F a progressu radiorum F'E.

12. Punctum F est focus radiorum infinite proximorum axi, F'F error longitudinalis figuræ sphæricæ, circulus diametro EE ejus error circularis. Ultima pars causticæ GFG accedit in infinitum ad formam parabolæ gradus tertii, in qua quadrata ordinatarum IE sunt, ut cubi abscissarum FI. In curva ejus generis F'I est æqualis $\frac{1}{4}$ FF'. Hujus FF' valor est ille $r^{2}\rho$ adhibitus etiam numero 21 capitis II Opusculi I hujus Tomi II, qui numero *99* supplementi III Opusculi II Tomi I redactus est ad formam sequentem $(\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{4}(2m+1) + \frac{m+2}{8m}) \times \frac{e^2}{(m-1)^2 h}$. Est ibi de more m ratio sinuum, c semiapertura lentis, h distantia focalis. Si fiat $c = (\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{4}(2m+1) + \frac{m+2}{8m})$; fiet $FF' = \frac{ce^2}{(m-1)^2 h}$.

Assumpto autem valore h pro tota CF, erit $CF' = h - \frac{ce^2}{(m-1)^2 h}$: $F'I = \frac{1}{4} FF' :: AA = 2e : EE = \frac{ce^3}{2(m-1)^2 h \times CF'}$. Dato autem valore m qualitatis refractivæ, & habitâ CF' pro constanti, cum non ita multum differat a valore $CF = h$, quo pacto fiet EE

 $=ce^3$

(*) Quæ hic affirmantur de natura hujus curvæ, demonstrata sunt omnia in eo supplemento, sed in hac figura 2 litteræ A, C, A, G, H, G, F', F, E, I, E, respondent ejus figuræ 1 litteris F, A, F', D', E, D, B, I, C, O, C'. Id litterarum discrimen provenit ex eo, quod diversis temporibus hæc Opuscula conscripta sunt, atque id ita, ut aliæ e litteris analogis respondeant aliis e præcedentibus Opusculis.

$= \frac{ce^3}{2(m-1)^3 h^2}$, diameter erroris circularis figuræ sphæricæ sequetur rationem triplicatam directam diametri aperturæ e, & reciprocam duplicatam distantiæ focalis h, quod itidem eruimus in eodem supplemento Opusculi I hujus Tomi II. Quoniam autem habetur in numeratore e^3, & in denominatore h^2, qui valor uterque hìc datur in pedibus; satis erit formulam inventam multiplicare per $12 \times 12 = 144$, ad habendam diametrum quæsitam EE in lineis, & habebitur $\frac{72ce^3}{(m-1)^3 h^2}$. Factâ semidiametro aperturæ $e = 2$, distantiâ focali $h = 10$, & assumpto pro vitris communibus valore $m = 1,53$, obtinebitur valor ejus $EE = 9,10$, & facto pro flint $m = 1,60$ habebitur $8,18$, uti positum est numer. 7. Inveniretur aliquanto plus, si pro divisore adhiberetur non h^2, sed $h \times CF'$. Verum hìc non agitur nisi de valoribus, qui non multum distent a veris, quam etiam ob causam & hìc, & numero sequenti pro valore h non assumitur distantia lentis a loco maximæ unionis radiorum, vel a loco foci radiorum mediorum incidentium versus medium inter centrum lentis, & marginem, quod itidem aliquanto laxius accipietur in determinatione sequenti.

13. Demum in figura 3 considerentur ex iisdem radiis provenientibus a centro solis, & incidentibus in puncta extrema aperturæ fila extremæ refrangibilitatis rubea, & violacea, & secludatur mente error figuræ sphæricæ, tanquam si lens colligeret omnes radios homogeneos in puncto axis unico. Sit id punctum pro primis rubeis F, & pro postremis violaceis F', quod utique erit propius lenti, adeoque radii violacei AF' producti occurrent rubeis AF oppositis in quibusdam punctis E, ac spatium omnium minimum continens omnia fila colorum omnium erit circulus habens diametrum EE, ac centrum in ejus concursu cum axe in I. Existente h distantia focali, m ratione sinuum, dm ejus differentia pro violaceis, & rubeis, invenitur (num. 98 ejusdem supplementi III Opusculi II Tomi I) $FF' = dh = -\frac{hdm}{m-1}$. Quoniam

niam vero anguli F'AE sunt exigui ; quadrilineum FEF'E parum differet a parallelogrammo ; adeoque erit $FI = \frac{1}{2} FF' = \frac{hdm}{2(m-1)}$, & factis $CF = h : FI = \frac{hdm}{2(m-1)} :: AA = 2e : EE = \frac{edm}{m-1}$, hic erit valor diametri quæsitæ.

14. Hinc patet, ipsam diametrum EE pendere a diametro aperturæ $= 2e$, cui est proportionalis, & a valore $\frac{dm}{m-1}$, qui potest exprimere qualitatem distractivam : nam in exiguis angulis ratio, quam habet separatio filorum extremorum ad totam refractionem, exprimitur per ejusmodi fractionem, ut vidimus numero 41 capitis I Opusculi I hujus Tomi II. Valor *dm* absolutus admodum difficulter determinari potest, nec unquam prorsus accurate ; quia in spectro colorato orto ex distractione radiorum diversæ refrangibilitatis color violaceus ita sensim languescit, ut evadat in fine prorsus insensibilis : adhuc tamen determinatur per observationes vero proximus is, qui pertinet ad distractionem violaceorum sensibilium a rubeis. Assumemus hic etiam valorem m pro flint $= 1,60$, pro vitro communi $1,53$, tum dm pro illo $= 0,027$, pro hoc $= 0,018$, quibus valoribus proximos plerumque inveni. Positis hisce numeris in formula $\frac{edm}{m-1}$, & $2 \times 144 = 288$ pro e, invenitur diameter quæsita pro flint linearum 13, & pro vitro communi $9,78$.

15. Notandum hic occurrit illud, quod etiam notavimus in supplemento III Opusculi II Tomi I, quam decrescat in aperturis ingentibus respectu distantiæ focalis excessus erroris circularis pertinentis ad refrangibilitatem respectu ejus, qui pertinet ad sphæricitatem etiam, ubi comparentur solæ diametri eorum circellorum. Newtonus in objectivo, quod susceperat considerandum, invenerat rationem diametri primæ ad secundam eandem ac 5449 ad 1. Nos ibi invenimus pro errore longitudinali rationem tantummodo proxime 337 ad 28, quæ translata ad diametros errorum circularium non evaderet nisi duplo adhuc major. Hic autem ipsa ratio diametri er-

 roris

roris circularis primi ad diametrum secundi non obvenit pro vitro communi, quod itidem Newtonus consideraverat, nisi 9,78 ad 9,10, nimirum quam proxime accedens ad æqualitatem, usque adeo apertura ingens respectu distantiæ focalis auget errorem sphæricitatis.

16. Jam vero pro radiis provenientibus a quovis alio puncto solis, habebitur ad sensum eadem dispersio radiorum respondens iis binis erroribus figuræ sphæricæ, & diversæ refrangibilitatis, quæ habetur pro radiis provenientibus a centro, & effectus utriusque conjunctus exhibebit pro quovis puncto circuli figuræ 1 circulum, cujus diameter erit circiter summa diametrorum pertinentium ad eos binos errores, adeoque in figura 1 radii provenientes a limbo solis L dispergentur per circulum ejus magnitudinis, & loco circuli habentis diametrum EE habebitur circulus habens summam eorum diametrorum, quæ pro illo flint erit linearum circiter 34, pro illo vitro communi 32 juxta ipsum numerum 7. Ita ob eos errores augetur circulus diametri apparentis solis, qui habebat diametrum linearum 13, & ejus diameter evadit major vicibus circiter $2\frac{1}{2}$: cumque areæ sint, ut quadrata diametrorum, & quadratum $2\frac{1}{2}$ sit $6\frac{1}{4}$, patet, radios ob ejusmodi errores diffundi per spatium plusquam sextuplo majus.

17. Si densitas in eodem circulo esset æquabilis; ea ubique esset minor in eadem ratione: sed satis patet, distributionem luminis fore maxime inæqualem intra eum circulum, & in extremo margine densitas erit in immensum minor, quam intra, ob ipsam superpositionem circulorum pertinentium ad radios digressos a punctis solis propioribus centro, qui eo plures superponuntur alii aliis, quo magis acceditur ad id ipsum centrum; præter quam quod ipsi circuli errorum habent inæqualem distributionem, & circulus diversæ refrangibilitatis densitatem versus margines evanescentem, quæ inæqualitas obest perfectioni lentis juxta numerum 2. Problema, quo quæratur progressus densitatis luminis in eo circulo ortæ ab omnibus iis tribus causis dispersionis luminis, esset admodum implexum, etiam ubi agatur de aperturis exiguis, atque id multo magis evaderet difficile in casu aperturæ ita

ita magnæ, in quo formulæ, quas hic adhibuimus, sunt parum admodum accuratæ.

18. Potest hic circulus coarctari, adhibitâ secunda lente, quæ circulum figuræ 1 potest contrahere in spatium multo minus: nam radios omnes digressos a puncto C colligeret in spatiolum exiguum respectu suæ aperturæ excipientis eos radios, quæ ipsa apertura esset minor, quam EE, interpositâ lente inter C, & F. Sed ea colligeret citius radios AF' figuræ 2, & 3 jam convergentes, quam radios CE figuræ primæ divergentes: ii post intersectionem divaricati iterum recederent a se invicem, & occuparent spatium non exiguum excepti in ea distantia, in qua haberetur unio ipsorum CE figuræ 1. Esset itidem problema implexum illud, quo quæreretur distantia focalis, & positio lentis secundæ, quæ habitâ ratione omnium trium causarum dispersionis omnium maxime colligeret radios omnes digressos a toto disco solis, & incidentes in totam primæ lentis aperturam; nec satis video ante accuratiorem perquisitionem, an contractio possit esse ita magna, ut habitâ etiam ratione novæ dispersionis inductæ a secunda lente, & majoris inæqualitatis inductæ per ipsam in densitatem satis magnam, lucrum inde capi possit pro ingenti calore excitando.

19. Sed omissis iis perquisitionibus, ut deveniam ad rem, quæ quæritur; lens ejus magnitudinis, quæ contineat spiritum vini inter binas laminas vitreas, est omnino magis ad rem idonea, quam lens e quovis genere vitri, lens autem e flint est omnium maxime inepta, neque id tantum ubi agitur de lente adeo ingenti, sed etiam de minoribus quibuscunque. Tres circulos errorum consideravimus. Primus, qui provenit a diametro solis, est idem pro substantiis omnibus: secundus sphæricitatis, qui, pari aperturâ, & distantiâ focali, pendet a sola vi refractiva, inventus est quidem minor in flint habente vim refractivam majorem, quam in vitro communi, sed paullo minor, nimirum linearum 8,18 pro 9,10: sed error postremus refrangibilitatis, qui pendet a vi distractiva, in ipso flint habente ipsam tanto majorem obvenit linearum 13, dum in vitro communi evasit 9,78. Non habeo

habeo observationes pro comparanda vi refractiva, & distractiva spiritus vini cum vi vitrorum; sed omnino credo, vim distractivam spiritus vini fore minorem, quam vitri flint, quod redderet minus idoneum id genus vitri, quam spiritum vini, ut patet ex ipsa ingenti dispersione, quæ tertium errorem usque adeo auxit: quam ob causam si vitrum sit adhibendum, oportet, vitro flint rejecto, adhibere potius vitrum commune.

20. Et quidem ubi agitur de lente ustoria exigua, vel magnitudinis mediocris, præferendum videtur vitrum spiritui vini, quia ex una parte multo facilius est elaborare lentem e massa vitri, pro qua satis est perficere bene sphæricas, & politas binas superficies, quam quatuor, quæ necessariæ sunt ad efformandam lentem, quæ contineat spiritum vini conclusum inter duas laminas: & ex parte altera non ita raro inveniuntur massæ minores vitri communis satis puræ, & homogeneæ, quod requiritur, ne internis reflexionibus, & refractionibus nimis magna pars luminis dispergatur, & dispereat, ac pondus ejusmodi lentis non nimis enorme non reddit nimis incommodum ejus usum. Ea sunt bina incommoda lentis adeo ingentis, si fiat e massa vitrea plena, quæ quidem sunt minora in vitro communi, quam in flint; sed adhuc multo minora in lente continente spiritum vini inter duas laminas vitreas.

21. Quod pertinet ad pondus, id quidem est multo majus in vitro flint habente satis magnam copiam plumbi: adeoque ejus pondus in tanta mole est immane. Accedit, quod massa vitri flint adeo ingens satis pura sperari omnino non potest, nisi ars chymica demum invenerit methodum aliquam, quæ ejusmodi massas exhibeat homogeneas. Vix omnino haberi nunc possunt ex eo vitro laminæ exiguæ pro telescopiorum objectivis, & quidem jam ne vix quidem satis idoneæ pro objectivis aperturæ pollicum quatuor; vitium impedit omnino formationem lentis ustoriæ ejus molis e flint. Vitra etiam communia, quæ minus difficulter inveniuntur homogenea, & pura, sunt multo magis incommoda ob pondus ingens, quam binæ laminæ includentes spiritum vini. Accedit homogeneitas spiritus vini, quæ id efficit, ut ea

forma

forma lentis ustoriæ videri debeat omnino præferenda. Habentur quidem ibi præter reflexionem radiorum in ingressu in primam laminam, & egressu e secunda, quæ sunt communes etiam lenti e solo vitro, binæ aliæ reflexiones in transitu e vitro ad spiritum vini, & ab hoc ad vitrum, quæ disperdunt partem aliquam radiorum; sed eæ reflexiones non sunt ita fortes: in ipso autem transitu per massam vitream ita crassam intercipitur non ita exigua lucis copia, ac multo major homogeneitas spiritus vini, quam vitri, utcumque e maxime puris, illam exiguam jacturam compensat.

22. Quod si pondus immane non deterreat, & sperari possint aliquando massæ non solum vitri communis, sed etiam flint, satis puræ, & homogeneæ; tum optimum factu erit, si fiat lens composita ex iis binis substantiis more objectivorum acromaticorum, in quibus corrigatur tam error refrangibilitatis, quam sphæricitatis methodo exposita in præcedentibus Opusculis. Satis patet e supplemento tertio Opusculi II Tomi I, quantum minuantur errores tam sphæricitatis, quam refrangibilitatis per ejusmodi combinationem binarum lentium e binis substantiis convexæ, & concavæ, & quo pacto computari possint errores residui, & vero etiam corrigi, vel saltem minui. Eo pacto haberetur unio radiorum multo major, cum vi lentis ustoriæ multo majore.

23. Verum interea pro lentibus ustoriis ingentibus optimum factu erit, si eæ fiant e duabus laminis vitreis habentibus crassitudinem ubique eandem, & superficies sphæricas bene politas continentibus spiritum vini, vel alium aliquem liquorem bene perspicuum, qui erit eo aptior, quo habuerit majorem vim refractivam conjunctam cum vi distractiva, quam fieri poterit, exigua. Pro minoribus patet, adhibendum esse potius vitrum commune, quam flint, quod omnino debet excludi, potissimum ob tres rationes, quod id vitrum multo majoris est ponderis, quod vix potest sperari satis homogeneum, & ne vix quidem, ac in primis quod cum habeat vim distractivam multo majorem, secum trahit errorem refrangibilitatis itidem multo majorem.

OPU-

OPUSCULUM III.

DE MODO DETERMINANDI DISCRIMEN VELOCITATIS, QUAM HABET LUMEN, DUM PERCURRIT DIVERSA MEDIA, PER DUO TELESCOPIA DIOPTRICA, ALTERUM COMMUNE, ALTERUM NOVI CUJUSDAM GENERIS.

1. LUMEN momento temporis propagari ad distantias utcunque magnas, diu passim creditum est a Physicis, & id ipsum a Peripateticis explicabatur per suas *productiones de novo* factas a causis necessariis, quæ suos effectus edant eodem momento temporis, quo existunt, a Cartesianis vero per impressionem factam in altero extremo lineæ globulorum, quæ traducatur immediate per lineam totam. Eclipses satellitum Jovis, quæ observantur eo citius, quo magis in suo motu circa solem terra accedit ad eum planetam, docuerant superiore sæculo propagationem successivam, & quidem cum ejusmodi velocitate, quæ ipsum deducat a sole ad terram circiter semiquadrante horæ. Aberratio luminis, cujus leges Bradleyus determinavit, & causam invenit desumptam ab ipsa propagatione luminis successiva combinata cum motu terræ ita confirmavit propagationem ipsam successivam, ut nullus jam de ea dubitandi locus supersit, atque id potissimum, quod ex eo effectu usque adeo diverso ab illis phænomenis illarum eclipsium deducatur satis proxime idem semiquadrans horæ pro intervallo æqualis distantiæ solis a terra.

2. Theoriam impressionis factæ in primum e globulis pro luminis propagatione evertit propagatio rectilinea, ut Newtonus ipse demonstravit, qui ei substituit translationem particularum lucis emissæ a corpore luminoso progredientium motu uniformi per medium homogeneum cum celeritate, quæ videtur immanis, & incredibilis iis, qui non considerant, nos intervalla metiri per relationem ad nostrum pedem, ad quem referuntur hexapedæ, & leucæ, cujus brevitas id efficit, ut immanis habeatur hexapedarum, & ve-

& vero etiam leucarum numerus in iisdem intervallis eodem pacto, quo si aliquod e minimis illis insectis, quæ ægre per fortissima microscopia a nobis percipi possunt, intervalla metiretur, immanem in nostro cubito suarum hexapedarum, & leucarum numerum inveniret.

3. Non desunt ex Auctoribus primi etiam ordinis, qui præferant pro luminis propagatione theoriam analogam propagationi soni, ut nimirum ea fiat per undas excitatas in fluido tenuissimo, & maxime elastico, & propagationem rectilineam, reflexionem ad angulos æquales angulis incidentiæ, rationem constantem sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refracti ex eadem theoria deducant: sed in primis undarum natura meo quidem, ut & plurimorum judicio, contraria est ei propagationi rectilineæ, quam videmus in lumine transeunte per foramina, dum undæ expanduntur, & sonus etiam oblique propagatur, qua de re fusius egi in mea veteri dissertatione de Lumine. Deinde præterquamquod in Newtoniana theoria motus progressivi particularum luminis saltem multo facilius eædem illæ proprietates pertinentes ad progressionem rectilineam in medio homogeneo, reflexionem ad angulos æquales, refractionem cum constanti ratione sinuum, deducuntur ope virium, quibus particulæ corporum agunt in aliqua exigua distantia in particulas luminis, & quidem etiam diversa refrangibilitas a Newtono inventa radiorum diversæ speciei; accedit etiam pars admodum sensibilis radii cujusvis, quæ tam in reflexione, quam in refractione dispergitur irregulariter ita, ut in angulis multo minus distantibus ab angulo reflexionis, vel refractionis regularis discedant a puncto incidentiæ multo plures particulæ: accedit alia luminis proprietas, detecta itidem a Newtono ipso summâ sagacitate, illarum vicium facilioris reflexionis, & facilioris transmissus redeuntium ad intervalla æqualia, e quibus pendent phænomena plurima, & in primis ratio discriminis inter diversos colores corporum naturalium. Ego eorum omnium explicationem deductam e viribus agentibus in particulas luminis emissas e corpore luminoso, & progredientes inveni admodum simplicem, quam edidi in mea veteri dissertatione de Lumine,

& in mea Theoria Philosophiæ Naturalis, quæ quidem non ita facilem explicationem invenient in theoria undarum excitatarum in fluido elastico: ostendi autem in mea itidem veteri dissertatione de tenuitate luminis, quam parum jacturæ timeri possit in sole ab immensa lucis copia non solum, quæ huc usque emissa sit, sed etiam, quæ per immanem sæculorum numerum emitti possit.

4. Quidquid sit de luminis natura explicata per ejusmodi theorias, illud occurrit inter ipsas discrimen, quod in theoria Newtoniana de emissione particularum luminis, & earum motu progressivo invenitur augmentum celeritatis luminis ipsius transeuntis e medio tenuiore habente vim refractivam minorem ad medium densius habens vim majorem: & quidem accuratissime demonstratur in ea theoria, celeritatem eandem in medio densiore esse majorem, quam in rariore in ratione sinus anguli incidentiæ in ingressu ex hoc in illud ad sinum anguli refracti: dum e contrario ii, qui explicant propagationem luminis per undas, censent, celeritatem in medio densiore debere esse minorem.

5. Methodus determinandi, an celeritas luminis sit major in medio densiore, ut in aqua, quam in rariore, ut in aere, an minor, mihi venit in mentem pluribus annis ante meam transmigrationem ex Italia in Galliam, & eam cum amicis pluribus communicavi per litteras tam missas Parisios, quam ad celeberrimum Taurinensem Professorem Beccariam. Objectæ mihi fuerant ante litteras ad ipsum datas binæ difficultates contra ejusmodi methodum, altera petita a perceptione directionis, qua radius ad oculum advenit, altera ab ipsa immani ejus celeritate, qua redditur in immensum breve, & fere momentaneum tempusculum, quo lumen percurrit exiguum tractum longitudinis telescopii, quo motu ego utor, ut mox patebit. Earum solutionem admodum facilem dedi jam tunc: sed nihil ea de re huc usque edidi, nec vero ab aliis editum est uspiam, quod sciam. Res quidem est summi momenti ad cognoscendam naturam luminis; cum inde videatur pendere ea ipsa quæstio, an ipsius propagatio fiat per undas fluidi cujuspiam tenuissimi maxime elastici, an potius per emissionem particularum. Quin immo methodus hic adhiben-

da

da proderit etiam plurimum ad cognoscendam intimius, & confirmandam naturam, & causam aberrationis annuæ fixarum a Bradleyo propositam: nam ea ipsa aberratio adhibebitur in hac methodo, & vero ita, ut ad observandum integrum ejus effectum non debeant expectari observationes plurium mensium, sed intra admodum paucos dies, & fortasse etiam intra unicam noctem, vel ad summum intra duas, res perfici possit per paucas admodum observationes.

6. Indiget hæc methodus novo quodam telescopii dioptrici genere conjuncto cum alio communi, quæ ambo simul applicentur instrumento, quod circa axem verticalem converti possit, & determinare in positione utrâque intra pauca secunda differentiam distantiæ apparentis a zenith ejusdem fixæ, quam exhibent ea singula telescopia, quod quidem ope sectoris plurium pedum, & vero etiam ope quadrantis idonei haud difficulter præstari potest. Spero equidem non defuturum, qui ejusmodi opus suscipiat. Proponam hîc methodum ipsam in primo paragrapho, ac dissolvam difficultates mihi olim oppositas: tum in secundo evolvam uberius ea, quæ pertinent ad theoriam ejus telescopii novi, quod idoneum esse non potest, nisi ad hunc usum tantummodo: in tertio agam de fixis maxime idoneis ad eam rem, ac dissolvam difficultates oppositas, quæ post præcedentes paragraphos sponte evanescent.

§. I.

Methodus adhibenda pro solutione problematis propositi.

7. ABERRATIO fixarum oritur ex eo, quod motus progressivus luminis combinatus cum motu progressivo terræ efficit, ut objecta, saltem uti eorum locus apparens determinatur per instrumenta, nobis appareant in directione diversa a directione postrema, quam habet radius, dum incurrit in oculum, sed in alia, quæ inclinatur ad ipsam in angulo determinato a ratione, quam habet celeritas ipsius terræ ad celeritatem luminis. Ad ejusmodi theoriam evidentissime ponendam ob oculos adhibebimus metho-

dum analogam ei, quam ipse Bradleyus jam ab initio præclarissimi sui comperti proposuit. Ea est admodum simplex, & saltem, quod pertinet ad determinandum per instrumenta locum apparentem objecti collineando in ipsum ope alidadæ instructæ dioptris sive simplicibus, sive telescopicis, caret omnino difficultatibus, quibus eam involverunt alii, ut ii, qui ad ejusmodi perquisitionem censuerunt adhibendam theoriam impressionis obliquæ, quam oculus translatus subire debeat a lumine progrediente.

8. Referat (Fig. 1. Tab. VII) recta AB regulam habentem, ut moris erat in veterum instrumentis, duas laminas CDEF, GHIK cum foraminulis M, N ab ipsa æque distantibus in usum alidadæ ferentis secum dioptras, & determinantis per suam positionem locum apparentem objecti, quod transpicitur per dioptras ipsas: directio regulæ est eadem, quam habet recta tendens a centro foraminis N ad centrum foraminis M. Ea directio tribuitur positioni apparenti puncti objecti, ubi id ita transpicitur, ut appareat in recta jungente ea centra, & eam positionem indicant divisiones instrumenti, per quas alidada excurrit.

9. Jam vero si terra stet, & recta M, N transiens per centra eorum foraminulorum habeat eandem directionem, quam radius RS delatus a quopiam puncto objecti ad M; is radius perget ad centrum N secundi foraminis, & percellet oculum applicatum inferne ad id foramen post ipsam laminam, atque id quidem, sive lumen momento temporis propagetur, sive progrediatur cum velocitate quacunque. Sed si dum lumen progreditur ab M ad N, etiam regula motu terræ procedat ita, ut punctum A abeat in A' per rectam AA' jacentem vel in plano ipsius laminæ superioris, vel extra id planum, & extra directionem radii, quod accidet fere semper; foraminula M, N ita abibunt in M', N' per lineolas parallelas, & æquales ipsi AA', ut lumen transmissum per M, dum advenit ad locum, in quo prius erat N, non inveniat ibi centrum ejus foraminuli secundi jam progressi ad N', sed incurrat in partem laminæ solidam, quæ non permittet ejus progressum, & appulsum ad oculum. Ut id objecti punctum transpici possit trans centra foraminulorum, oportebit ita inclina-

re

re in fig. 2 regulam BA in plano lineolarum MM', NN', ut dum radius progreditur a prima lamina ad secundam per lineam MN', centrum foraminuli secundi a prima positione N adveniat ad novam N' jacentem in via radii, & permittat ipsius transitum, nimirum ut latus MN' trianguli MNN' ad latus NN' habeat eandem rationem, quam celeritas luminis ad celeritatem foraminis N translati cum terra in N'.

10. Cum hæc unica positio regulæ permittat transitum ejus radii; in hac sola illud punctum objecti apparebit positum in directione tendente a centro secundi foraminuli ad centrum primi, & hæc erit directio apparens positionis ejus puncti determinata ab instrumento, quæ nimirum jacebit in plano transeunte per viam radii, & viam foraminuli, & inclinabitur ad viam ipsius radii MN' in angulo MN'M' = N'MN, cujus sinus ad sinum N'NM, quem continet recta NM parallela directioni apparenti N'M' cum via foraminuli, nimirum cum directione motus terræ transferentis secum regulam ipsam cum suis dioptris.

11. Hoc est genuinum fundamentum aberrationis luminis, ex quo patet, nullum hic haberi locum perquisitioni mechanicæ, & animasticæ circa effectum impressionis obliquæ compositæ a directione motus, cum qua lumen advenit ad impellendas fibras oculi, & directione motus fibrarum ipsarum, & circa perceptionem inde resultantem, quæ determinet directionem loci apparentis objecti visi trans centra dioptrarum. Locus apparens, quem indicat alidada rite disposita respectu dioptrarum in instrumento, cui ipsa applicatur, est ille, ad quem tendit positio ejusdem alidadæ permittentis transitum radii per centra dioptrarum. Id autem, quod habet locum in ejusmodi veteribus dioptris, habet itidem in dioptris telescopicis. In his adhibetur micrometrum filare in foco objectivi, & axis telescopii tendens ad intersectionem filorum, quæ habeatur in ipso, vel linea, quam appellant fiduciæ, tendens a puncto ejusdem axis proximo mediæ crassitudini objectivi ad ipsam filorum intersectionem adductam ad punctum imaginis efformatæ in foco, in quo pingitur punctum quodvis objecti, supplet vices positionis rectæ transeuntis per centra veterum dioptrarum.

rum. Eo puncto imaginis occupato a filo micrometri, tegitur illud objecti punctum: ad hoc autem, ut id punctum appareat ibi, vel tegatur a filo ibi posito, debet axis telescopii, vel ea linea fiduciæ ita inclinari ad directionem radii transeuntis per centrum objectivi, vel per illud punctum axis proximum ejus centro, ut directio loci apparentis jaceat in plano transeunte per viam radii, & viam axis, vel ejus lineæ telescopii translati, & habeatur illa ratio sinuum eadem, ac ratio velocitatum. Id hìc probe notandum est: nam inde pendet solutio prioris ex iis binis difficultatibus, quæ objectæ mihi fuerant contra theoriam hìc proponendam, a Mathematicis, & vero etiam Astronomis primæ notæ, qui tamen hæc genuina fundamenta aberrationis luminis conformia iis, quæ primus ejus auctor Bradleyus proposuit, independentia prorsus a directione impressionis factæ a radio post egressum e telescopio, non satis intime perspexerant, vel non satis attente consideraverant.

12. Quivis motus telescopii translati manu, vel motu navis, in qua sit observator, parit aberrationem hujusmodi: sed ea est prorsus insensibilis ob excessum immensum velocitatis luminis supra eas velocitates. Sola velocitas motus terræ habet rationem exiguam quidem, sed non ita exiguam ad velocitatem luminis, ut angulus ei velocitatum rationi respondens non sit admodum sensibilis: sed ejusmodi est sola velocitas motus annui: nam aberratio orta a motu telluris diurno est itidem insensibilis. Positâ eâdem quavis ratione velocitatum, angulus NMN', qui est semper acutus, immo & ob suam exiguitatem fere accurate proportionalis suo sinui, erit eo major, quo major erit sinus anguli N'NM, quem continet directio motus telescopii cum directione apparente objecti, nimirum, quo is angulus magis accedet ad rectum, & erit maximus, eodem existente recto. Ex ejusmodi aberrationis theoria, & immenso numero observationum institutarum circa stellas fixas per instrumenta, quæ adhibentur in Astronomia, deducitur, aberrationem maximam provenientem e motu annuo terræ in omnibus fixis esse ad sensum eandem, nimirum secundorum 20, quæ si accipiantur hinc, & inde a loco medio, evadunt 40:

sed

sed velocitas motus diurni e distantia solis a terra jam inventa intra limites admodum arctos per postremum transitum Veneris sub sole est minor, quam $\frac{1}{66}$ velocitatis motus annui (*), adeoque totus effectus aberrationis provenientis a motu diurno non est, nisi quædam fractio unius secundi. Hinc non habetur ratio ab Astronomis, nisi solius aberrationis ortæ a motu annuo telluris.

13. Theoria hujus aberrationis deducta e positione, & magnitudine anguli N'NM variata pro diversa longitudine, & latitudine fixarum, ac diverso loco telluris in orbita sua determinante longitudinem solis, ostendit, variam esse pro diversis fixis eodem die, & pro eadem fixa diversis diebus tam aberrationem absolutam, quam eandem redactam ad quemvis circulum cælestem, & ex ea erutæ sunt formulæ, ac computatæ tabulæ pro calculanda aberratione in longitudinem, in latitudinem, in ascensionem rectam, in declinationem. Hæc postrema omnium facillime, & cum maxima accuratione determinatur per observationes, cum ea afficiat distantiam apparentem a zenith in appulsu fixæ ad meridianum, cujus determinatio non pendet a mensura temporis, sed a sola divisione quadrantum, & partibus micrometri vel interni, vel externi. Innotescit ex iis tabulis, & vero etiam ex ephemeridibus, calculo jam redacto ad satis magnam facilitatem, quanta esse debeat quovis momento temporis aberratio cujusvis fixæ in declinationem, unde facile deducitur, quæ fixæ, & quo anni tempore habeant aberrationem in declinationem satis magnam. Fixa, quæ sit proxima polo eclipticæ, habet ipsam bis in anno inte-

(*) Parallaxis solis horizontalis determinata est per illum transitum proxime $= 8'' \frac{1}{2}$, & radius circuli terræ maximi ad distantiam mediam solis a terra, quæ est radius orbitæ annuæ terrestris, est, ut sinus ejus anguli ad radium, nimirum ut 412 ad 10000000. Hinc celeritas motus diurni, quæ est ad celeritatem motus annui, ut circumferentia ad circumferentiam, sive radius ad radium directe, & una dies ad numerum dierum in anno $= 365\frac{1}{4}$ reciproce, erit ad ipsam, ut $\frac{412}{1}$ ad $\frac{10000000}{365,25}$, nimirum ut 1 ad $\frac{10000000}{412 \times 365,25} = 66,9$.

tegram secundorum 20 ita, ut altero ex iis binis oppositis anni temporibus ejus declinatio augeatur per hanc aberrationem 20 secundis, altero tantundem minuatur. Hinc factâ reductione, quæ pertinet ad alios duos fixarum motus, nimirum ad præcessionem æquinoctiorum, & nutationem, ipsa declinatio invenitur altero ex iis temporibus minima, tum post sex menses maxima, nimirum 40 secundis major.

14. Seligendæ erunt ad hunc usum, quem hic proponemus, fixæ, quæ habeant satis magnam aberrationem in declinationem, & anni tempora, quibus ea est satis magna. Si adhibeatur quadrans, qui converti possit circa proprium axem, poterunt haberi fixæ, quarum aberratio in declinationem æquetur integræ absolutæ secundorum 20: si potius fiat usus sectorum ingentis radii, qui adhiberi solent pro fixis parum distantibus a zenith, a quibus multo major exactitudo sperari potest, adhuc in locis non nimis proximis zonæ torridæ habebuntur fixæ, quarum aberratio in declinationem ascendat ad secunda 19, vel 18: sed ea de re agemus in paragrapho tertio, in quo etiam juxta num. 5 dissolventur difficultates propositæ.

15. Quæ diximus de magnitudine aberrationis tam absolutæ secundorum 20, quam redactæ ad augendam, vel minuendam declinationem, determinata sunt per telescopia, quæ sunt in usu, quæ nimirum habent aerem intra tubum, per quem radius procedit ab objectivo ad fila micrometri cum ea velocitate, quæ convenit progressui per aerem, quæ quidem debet esse parum admodum diversa ab ea, qua ipsum progreditur per ætherem, vel atmosphæram solarem in toto tractu a sole ad terram, quam ipsam ob causam celeritas, quæ eruitur ex illis 20 secundis aberrationis maximæ, convenit cum ea, quam prius exhibuerant eclipses satellitum Jovis. Quoniam enim ea est secundorum 20, oportet eo tempore, quo lumen devenit a sole ad terram, terra ipsa percurrat arcum suæ orbitæ ejusdem numeri secundorum: nam spatium percursum a lumine ad spatium percursum a terra debet esse, ut est radius circuli cujusvis ad sinum sui arcus secundorum 20, & sinus anguli exigui haberi potest pro æquali suo arcui.

Por-

Porro motus medius terræ diei unius, sive minutorum $24 \times 60 = 1440$ est $= 59', 8'' = 3548''$, adeoque tempus debitum arcui $= 20''$, erit $\frac{20 \times 1440'}{3548} = \frac{28800'}{3548} = 8'$.

16. Sed si per illud intervallum intra tubum loco aeris haberetur alia materia, ut aqua; velocitas luminis in ea esset major juxta theoriam Newtonianam ipsius luminis constantis particulis emissis, & progredientibus per rectas lineas intra medium uniforme, ac detortis versus perpendiculum per refractionem ortam a vi medii attractiva, quæ simul augere debet celeritatem, minor autem juxta theoriam undarum. Hinc aberratio in eadem positione terræ, & astri deberet esse minor in priore sententia, major in posteriore in ratione reciproca ipsius velocitatis. Stante enim in fig. 2 sinu anguli N'NM, & lineola NN', sinus aberrationis NMN', qui ob suam exiguitatem considerandus est, ut proportionalis suo angulo, debet esse reciproce proportionalis rectæ MN'. Cum hæc sit directe proportionalis velocitati luminis in progressu ab M ad N'; patet, aberrationem ipsam debere esse reciproce proportionalem velocitati, quam habet lumen in eo tractu. Nihil confert ad eam aberrationis magnitudinem motus luminis ante ingressum in tubum, vel post egressum ab eodem, nihil directio motus intra oculum, nihil compositio motuum oculi, & luminis in hujus appulsu ad fibras illius. Angulus N'MN, dato angulo N'NM, pendet a sola ratione linearum N'N, N'M, quæ est ratio velocitatis terræ ad velocitatem, cum qua lumen progreditur non per ætherem, non per atmosphæram terrestrem ante appulsum ad tubum, vel post egressum ex ipso, non intra oculum, sed tantummodo in illo intervallo MN'. Si velocitas luminis fuerit ibi minor, vel major; oportebit inclinare regulam, vel tubum telescopii plus, vel minus ad hoc, ut radius ingressus per foraminulum M, vel per centrum objectivi inveniat in N' foraminulum, per quod transire possit, & afficere oculum ipsi applicatum, vel incurrat ibi in filum micrometri, a quo interceptus subtrahat aspectum sui puncti objecti oculo prospicienti per ocularem.

17. Hinc si loco regulæ habentis dioptras habeatur tubus, cujus bases oppositæ habeant bina vitra, quæ possint continere aquam, & contectæ sint versus medium chartâ crassiore habente in medio foraminulum, per quod radius transire possit, & applicetur is tubus lateri quadrantis astronomici, ac per ipsum plenum aquâ transpiciatur fixa habens aberrationem positivam satis magnam in declinationem, & jacens ad boream, quæ removeat locum apparentem a zenith; debebit per ejusmodi tubum plenum aquâ inveniri distantia a zenith minor, quam per ipsum vacuum in sententia celeritatis auctæ in medio densiore cum differentiâ distantiarum æquali differentiæ aberrationum. Distantia enim apparens erit distantia vera imminuta per refractionem, & per aberrationem luminis. Manentibus binis prioribus terminis, distantia ipsa debet habere differentiam eandem, quam habet tertius. Si momento temporis, quo fixa apparet trans tubum vacuum, posset infundi aqua; dispareret utique fixa ipsa, nec transpici posset, nisi remotâ in latus chartâ tegente basim inferiorem, cum suo foraminulo, ad excipiendum radium, & permittendum ipsi transitum; quia auctâ, vel imminutâ per immissionem ejus novi medii velocitate luminis, ipsum lumen adveniret ad laminam inferiorem in N' citius, quam foraminulum N, vel ipso jam prætergresso.

18. Hæc idea tubi vacui, & momento temporis repleti aquâ inducitur hîc tantummodo ad sistendam oculis, & in evidentiore lumine collocandam totam hanc theoriam. Ejusmodi tubus, cum iis foraminulis non est idoneus ad instituendas hujusmodi observationes, ut nec veteres dioptræ sunt idoneæ ad habendas determinationes accuratas intra pauca secunda. Recurrendum est ad telescopia, quorum ope adhibendo micrometra affabre elaborata redduntur sensibilia singula secunda, quin immo, ubi augmentum telescopii sit ingens, fiunt sensibiles etiam decimæ secundorum partes. Habentur nunc quidem telescopia dioptrica acromatica, quæ augent objecta, adeoque & distantias, & motus, etiam tercentum partibus, licet sint trium, vel quatuor pedum tantummodo. Sed ad hunc effectum, de quo agimus, satis etiam sunt telescopia

pia dioptrica communia, quæ quadrantibus, vel sectoribus majoribus aptari solent. Res tota eo reducitur, ut perspiciatur, quo pacto construi possit telescopium dioptricum, quod inter objectivum, & micrometrum contineat aquam, quo applicato majori quadranti, vel sectori una cum alio communi habente aerem in eodem intervallo, determinetur satis accurate differentia distantiarum a zenith exhibitarum ab utroque ejusdem fixæ habentis satis magnam aberrationem in declinationem, quæ exhibebit differentiam aberrationum, adeoque etiam differentiam celeritatis luminis per aerem, & per aquam. Non est necessaria accurata determinatio distantiæ absolutæ: potest enim ita determinari differentia distantiarum exhibitarum ab utroque telescopio, ut error distantiæ absolutæ communis in determinatione ipsius factâ per bina telescopia, veluti is, qui oriretur ex minus exacta divisione limbi, nihil turbet differentiam.

19. Quid requiratur ad perficiendum ejusmodi telescopium, exponemus in sequenti paragrapho, ubi explicabitur ejus theoria cum præcautionibus necessariis, ne observationes per ipsum institutæ evadant erroneæ: accedet id, quod pertinet ad augendam ejus vim, & reddendum ipsum acromaticum, si libeat. Hic exhibebimus tantummodo methodum instituendi observationes per ipsum conjunctum cum altero formæ usitatæ ad habendum cum evidentia, & accuratione multo majore, & brevi tempore effectum integrum differentiæ aberrationum exhibitarum ab iis; dum ad obtinendum effectum integrum aberrationis absolutæ requiritur intervallum sex mensium, quo aberrationes evadant contrariæ, & maximæ, immo etiam annus integer, quo locus apparens fixæ correctus per alios fixarum motus cognitos redeat ad locum anni præcedentis.

20. Optimum factu erit, si adhibeatur sector longioris radii, cujusmodi adhiberi solet pro determinanda distantia a zenith fixarum, quæ exiguo graduum numero ab eo distent, ubi ejusmodi observationes instituuntur pro mensura graduum meridiani, qui sector converti possit circa proprium axem. Ego mei descriptionem exhibui in meo Opere *de Expeditione Litteraria per Pontificiam ditionem*, quod deinde Gallice redditum prodiit etiam

Parisiis sub titulo *Voyage astronomique*, *& géographique*. Qui fuerit ejus successus, patet utique ex consensu illarum mearum observationum, quarum determinationes diversæ vix uno secundo differunt a media, licet agatur de distantia a zenith absoluta, & adhibeantur binæ fixæ, ac observationes institutæ fuerint semel Arimini, bis Romæ, instrumento eodem pedum octo bis per totam Italiæ latitudinem transportato. Alterum cum majore etiam successu Liesganigius egregius mei tum Ordinis Astronomus ad ejus imitationem construxit Viennæ in Austria me præsente. Similem Taurinensis Beccaria construi curavit pro suo meridiani gradu cum successu maximo, & vero etiam alii alibi cum eodem successu constructi sunt. Multo autem major exactitudo haberi debet, ubi ope ejusmodi instrumenti non distantia absoluta fixæ cujuspiam a zenith determinari debeat, sed differentia distantiarum exhibitarum a binis telescopiis eidem instrumento simul affixis.

21. Eum sectorem exhibet utcumque figura 3. Is constabat binis regulis metallicis crassioribus connexis invicem ad angulos rectos. Regula longior ABB'A' habebat ex parte posteriore adnexum tubum solidum telescopii habentis axem parallelum rectæ CH transeunti per mediam suam longitudinem. Regula DEE'D' priori perpendicularis habebat binas laminas DEGF, D'E'G'F' sibi afferruminatas, quæ non occupabant nisi partem ejus latitudinis hinc, & inde, inter quas libere excurrebat lamina FGG'F' antrorsum, retrorsum, quæ efformabat limbum, sed mobilem, instrumenti ferentem divisiones non in arcu circulari, sed in recta linea KK'. Hæc lamina erat connexa cum cochleâ, cujus manubrium L, aptatâ regulæ DEE'D' ex parte opposita ei, quam figura exhibet: nexus fiebat per virgulas metallicas traductas trans crenas excavatas in ea ipsa regula, & sustinentes cylindros cavos, per quos transibat ipsius cochleæ axis: ipse axis cochleæ habebat sibi adnexum indicem N, qui in circulo habente diametrum EE', & divisiones in sua peripheria, indicabat partes singularum conversionum cochleæ: eo indice notante zero, & nondum revolutâ cochleâ per ullam conversionem, punctum O, quod erat initium divisionum limbi, jacebat in continuatione rectæ CH ita, ut

ut CO efficeret rectam continuam gerentem vices radii arcus circularis sectorum communium, filo CP suspenso ex acu aptata in C, & sustinente ponduscułum P.

22. Directo axe tubi ad fixam S, & filo PC transeunte per punctum quoddam I rectæ KK', ac indicante zenith Z, distantia apparens ab ipso zenith habebat pro mensura angulum ZCS = OCI, cujus tangens ad radium CO erat intervallum OI: hujus mensuram exhibebat numerus divisionum ab O usque ad divisionem M, quæ immediate præcedebat punctum I. Residuam particulam addendam ei numero exhibebat cochlea cum suo indice N, retracto nimirum ejus ope limbo mobili, donec divisio M appelleret ad punctum I. Et in meo quidem sectore primo divisiones erant factæ per lineolas rectas tantummodo: in posteriore constructo Viennæ cum Liesganigio adhibita sunt foraminula tenuia, quæ ipse per sese ita bene rotundaverat, ut per microscopium admodum forte apparerent & bene rotunda, & politissima: filum erat parum admodum minus crassum diametro foraminum, ut ipsius media crassitudine congruente cum centro foraminuli extarent hinc, & inde bina segmenta ipsius formæ circularis admodum exigua, quorum inæqualitas, si qua haberetur, insensibilis ex particula diametri extante, ita evidenter apparebat ex inæqualitate chordarum eorundem segmentorum auctâ per microscopium, & multis partibus majore illis particulis diametri procurrentis, ut minimo motu cochleæ, ac fere insensibili adducerentur chordæ ipsæ ad æqualitatem. Positio fili medii congruentis cum centro foraminuli determinari poterat sine periculo partis decimæ unius secundi. Tres particulæ admodum latæ divisionis circuli exhibebant unicum secundum, & ipsarum quadrantes per æstimationem egregie poterant determinari.

23. Siquid ambiguitatis remaneret in distantia fixæ a zenith; id unice proveniebat a collocatione fixæ sub filo micrometri interni parallelo motui diurno, qua collocatione præstitâ, debebat fixa transire accurate per axem telescopii, in quo se fila sibi invicem perpendicularia decussabant de more. Inclinabatur quidem instrumentum ope alterius cochleæ ipsum totum urgentis in latus, donec

donec fixa statim post primum suum ingressum in campum telescopii tegeretur ab ipso filo, immo potius donec ejus magnitudo apparens orta ex errore sphæricitatis, & refrangibilitatis extaret æque hinc, & inde ab ipsius fili crassitudine, quam ob causam errores illi ipsi proderant exactitudini observationis: nam si fixa apparuisset, ut unicum punctum; non ita accurate determinari potuisset positio puncti ipsius in media crassitudine fili occupantis utique plura secunda. Verum ipsa æqualitas luminis excurrentis hinc, & inde a filo ingerebat ambiguitatem, quæ impediebat consensum determinationum usque ad fractiones unius secundi. Cum mora fixæ in campo trium etiam, vel quatuor minutorum permitteret plures determinationes, retractâ fixâ a filo per motum instrumenti, & iterum adductâ, atque id mutato etiam observatore, adhuc raro admodum occurrebat discrimen trium micrometri circularis particularum, nimirum unius secundi.

24. Illud autem commendat hanc formam sectoris, quod cochlea non arcum circularem, sed rectam regulam promovet, & intersectio filorum immobilis facta in ipso telescopii axe rem omnem conficit, quod quanti intersit, norunt sane Astronomi, & unica habetur scala externa divisionum limbi relatarum ad radium CO, & revolutionum cochleæ ad ipsas, quorum omnium, ut & ipsius cochleæ verificatio quam facile, & accurate fieri possit in hoc instrumenti genere, satis patet ex illo meo Opere, in quo ea omnia fuse exponuntur. Accedit, quod conversio instrumenti a positione limbi spectantis orientem adducti ad positionem contrariam occidentem versus in suspensione ibidem exposita fit celerrime, atque ita res parari facile possunt, ut conversio simplex limbum ante primam observationem collocatum in plano verticali, & congruente cum plano meridiani restituat in positionem itidem verticalem, & meridianam.

25. Converso instrumento, filum CP, quod occurrebat lateri OK in I, occurret lateri OK' in I', & intervallum II', quod binis OM, OM' addit bina segmenta MI, M'I' determinata a micrometro externo N, exhibet, ut patet, duplam tangentem distantiæ apparentis QS a zenith, quod quidem præter duplicationem deter-

determinationis ejusdem, quæ reddit periculum erroris duplo minus, corrigit per se errorem, qui potuerit occurrere a perpendicularitate non satis exacta linearum CO, KK'. Si in ea positione haberetur aliquis exiguus error; is obesset quidem determinationi factæ per unicam tangentem OI, vel OI', non autem per dimidium intervalli II': nam perpendiculum accuratum ductum e puncto C in rectam KK' cadens prope punctum O non differt a longitudine CO nisi per differentiam ordinis secundi ita exiguam respectu radii CO, ut nullus inde error sensibilis provenire possit in angulum determinatum per hunc novum radium substitutum priori CO, ad quem radium novum referatur dimidium intervalli II' assumptum pro tangente. Conversio corrigit etiam per se errorem aliquem, si quis habeatur in parallelismo axis telescopii cum radio CO, ut norunt Astronomi.

26. Sed & ii errores, si qui adsint, & error divisionum, qui itidem officeret determinationi distantiæ absolutæ a zenith etiam post conversionem, nihil obest determinationi differentiæ distantiarum exhibitarum a binis telescopiis aptatis sectori eidem, de qua hìc agimus: ea pendet tantummodo ab indice N, adeoque a sola perfectione cochleæ rite verificatæ. Possunt ea telescopia aptari eidem regulæ ex parte AB, & A'B', & firmiter adnecti in ea distantia, in qua alterum non impediat liberam oculi applicationem ad alterum. Tum vero adducto instrumento ad positionem, in qua centrum fixæ ingressæ telescopium sit in medio filo interno alterius telescopii, & notato numero indicato ab indice N pro valore segmenti MI, quod quidem etiam fieri potest citissime per adjutorem observatoris, applicari poterit oculus ad alterum, & fieri observatio eadem. Si utraque observatio absolvatur ante appulsum fixæ ad intersectionem filorum secundi telescopii; poterit fieri conversio instrumenti motu celeri, & haberi utraque observatio in nova positione ante egressum fixæ e campo secundi telescopii, & eo pacto habebitur eâdem nocte differentia distantiæ II', quæ sola exhibet differentiam summæ binarum tangentium pertinentium ad duplum distantiæ apparentis a zenith, a qua sola pendet duplum differentiæ binarum refractionum,

num, quæ est differentia anguli ICI'. Si eâdem nocte, vel pro fixis majoribus eodem die non habeantur omnes quatuor observationes, possunt admodum facile haberi priores duæ prima nocte, & quidem repeti pluribus vicibus, tum facta conversione die sequenti obtinebuntur commodissime reliquæ duæ, & habebitur differentia quæsita uno die, vel ad summum binis consequenter diebus.

27. Melius erit differre conversionem sectoris in diem sequentem, quo fiat commodius, impendendo tempus moræ in campo telescopii ejusdem fixæ in repetenda pluribus vicibus observatione per utrumque telescopium: nihil enim timeri potest ex ullo capite mutationis, quæ accidat in distantia apparenti fixæ a zenith tam exigua tempore tam brevi. Mutatio atmosphæræ indicata a barometro, & thermometro mutat refractiones, sed mutatio est exigua respectu totius, adeoque si adhibeantur fixæ paucis gradibus remotæ a zenith, in quibus tota refractio est circiter totidem secundorum, nihil sane metui ibi potest a mutatione facta in atmosphæra. Is metus haberet locum, si adhiberetur quadrans instructus binis ejusmodi telescopiis pro fixis multo magis remotis a zenith: quanquam etiam status barometri, & thermometri observatus utroque die indicaret mutationem refractionis semper exiguam citra periculum erroris notabilis. Accedit, quod quadrans integer est minus opportunus pro hujusmodi determinatione. Si is sit radii ingentis, vel non convertitur, vel multo difficilius convertitur. Quadrantes radii minoris habent telescopium brevius, quod si non sit acromaticum, habet augmentum multo minus, unde profluit multo majus periculum erroris in collocatione fixæ sub filo micrometri interni. Majus itidem est in limbo respondente radio minori periculum erroris in æstimando appulsu fili, vel alidadæ ad divisiones limbi. Præstat adhibere potius sectorem longioris radii, ut pedum octo, vel decem, cujus telescopium utut commune habet augmentum satis magnum ad exhibendam determinationem intra unum etiam secundum.

28. Dilatio in sequentem diem nec habet periculum mutatæ distantiæ apparentis a zenith ex motibus aliis fixarum, qui præterquamquod sunt satis cogniti, ut earum loca observata diversis die-

diebus reducantur ad eandem epocham, sunt ita exigui intervallo dierum duorum tantummodo, ut omnis etiam ejusmodi reductio omitti possit sine periculo erroris. Retentâ autem positione sectoris eàdem, possunt facilius fieri plures observationes eàdem nocte, adhibitis pluribus fixis: nam plures transeuntes per meridianum satis longo temporis intervallo haberi possunt, quarum aberratio in declinationem sit satis magna, quod patebit ex iis, quæ dicturi sumus in tertio paragrapho.

29. Etiam simplex distantia a zenith habita per bina telescopia proposita exhiberet differentiam distantiarum apparentium quæsitam: sed in primis oporteret bene definire pro utroque telescopio punctum limbi respondens directioni ejus axis tendentis ad zenith; quod obtineri solet per conversionem, quamvis eo semel invento obtineantur deinde distantiæ apparentes ab ipso zenith sine novis conversionibus. Verum præstat adhibere conversionem, saltem quia per ipsam duplicatur effectus, qui idcirco remanet multo magis sensibilis, & accuratius determinatur per observationem.

30. Si loco aquæ infundantur in tubum liquores alii, quorum vires refractivæ sint majores; habebitur major differentia velocitatum respondens rationi majori sinus anguli incidentiæ in ingressu luminis ex aere in eum liquorem ad sinum anguli refracti: effectus plurium generum fluidorum diversæ naturæ multo magis confirmabit omnem hanc theoriam. Sed jam faciemus gradum ad exponendam theoriam, & constructionem telescopii novi propositi.

§. II.

Theoria, & constructio novi telescopii propositi.

31. AD habendum ejusmodi telescopium oportet ita id construere, ut infundi possit aqua, & alius liquor perspicuus quicumque, qui impleat totum spatium contentum inter objectivum, & locum micrometri. Quamobrem oportet ejus tubum efformare e lamina metallica: satis est, si fiat ex illa tenui lamina metallica, quæ appellatur in Italia *la latta*, in Gallia *fer blanc*. Ex

 parte

parte inferiori oportet applicare basim circularem vitream eo loco, in quo applicari solet diaphragma cum micrometro filari, nimirum in foco objectivi, atque id ita, ut non permittat egressum aquæ inter ipsam, & tubum. Ea basis debet esse lamina vitrea terminata binis superficiebus planis parallelis bene politis, in cujus facie superiori, quæ debet remanere interna, possunt duci binæ rectæ lineæ tenues ope cuspidis ex adamante, vel potius e silice, relinquentis signum in superficie vitrea, quæ lineæ gerent vices filorum micrometri: ex parte tubi superiore objectivum inclusum suæ thecæ affixæ tubo poterit utique retinere aquam, & impedire ejus effluxum etiam, ubi ipsa urgeatur versus ipsius superficiem inferiorem internam a pondere aquæ inclusæ in vase externo superiore communicante cum tubo telescopii per canalem exeuntem ex ejus foramine laterali. Infra hujusmodi laminam planam habebitur tubulus continens ocularem insertus continuationi tubi telescopii ita, ut pro diversa oculorum constitutione promoveri intra ipsum possit, & admovere ocularem vitro plano, vel eam ab ipso removere.

32. Eam dispositionem exprimit utcumque figura 4. Tubus telescopii est ABB'A', objectivum CC', lamina plana vitrea DD', canalis HIK exiens e foramine H tubi ipsius, & sustinens vas MLL'M', cum quo habet communicationem in K. Aqua infusa in id vas, vel alius quivis liquor, impleto tubo, elevabitur intra ipsum usque ad quandam altitudinem NN', supra quam debet extare pars ipsius vacua, nimirum habens aerem liberum. Hujus aquæ pressio tenebit semper liquorem applicatum immediate toti superficiei inferiori objectivi, pondus ejus ipsius liquoris, qui est intra tubum, applicat ipsum basi DD'. Cum liquores vi caloris dilatati condensentur vi frigoris; si is, qui continetur intra tubum, tempore caloris majoris impleret ipsum penitus occlusum, superficie liquoris ejusdem applicatâ accurate superficiei inferiori objectivi; ipsam desereret tempore frigoris, relicto vacuo inter se, & eam ipsam superficiem, quod quantum obesset, mox patebit: si autem tempore frigoris impleret penitus tubum applicatus ei superficiei; calore superveniente dilatatus inferret vim

vim tubo, & vitris, & vel disrumperet aliquid, vel mutaret nonnihil dispositionem partium, & figuram. Vas adjectum, & communicatio per tubulum HIK impedit utrumque effectum, elevatâ tantummodo superficie NN' ipsius liquoris in vase, vel depressâ, dum liquor vi caloris dilatatur, vel vi frigoris restringitur. Ipsum autem vas potest fieri apertum versus MM', si telescopium non debeat habere nisi exiguam inclinationem, ut pro hoc observationum genere: verum si libeat ipsum inclinare ita, ut habeat elevationem exiguam supra horizontem; poterit claudi superficies vasis ipsius MM', relicto tantummodo exiguo foramine versus M, per quod aqua non effluet, nisi inclinatione pertingente ad positionem fere horizontalem.

33. Necessitas implendi tubum ita, ut liquor applicetur penitus superficiei inferiori objectivi sine vacuo intermedio, patebit ex figura 5, quæ etiam exhibebit totam hujus telescopii theoriam. Sit tubus ABB'A' inclinatus, & vacuus cum suo objectivo CC', cujus axis SQ: deveniat ad centrum hujus a fixa quapiam radius *s*S in directione ejus axis, cum aliis ipsi ad sensum parallelis *c*C, *c'*C' incurrentibus in ejus superficiem in C, C'. Si tubus sit vacuus, nimirum plenus solo aere; procedet radius *s*S irrefractus per ipsum axem SQ, & radii *c*C, *c'*C' detorti per refractionem coibunt in ipso axe ad distantiam focalem SQ objectivi ipsius (hic mente secludimus utrumque errorem tam refrangibilitatis, quam sphæricitatis). Si jam is tubus impleatur liquore aliquo totus ita, ut liquor ipse applicetur superficiei objectivi sine ullo vacuo intermedio; adhuc radius *s*S procedet per axem, sed reliqui illi, qui coibant cum ipso in foco Q, coibunt in alio foco Q' remotiore utique ab objectivo ipso: nam refractio eorum radiorum in ingressu in objectivum, qui fit transeundo ex aere in vitrum, erit eadem, quæ prius ante immissionem liquoris: sed in egressu, qui fiebat transeundo e vitro in aerem, & jam fit transeundo e vitro in liquorem, erit minor ob inæqualitatem virium refractivarum vitri, & ejus liquoris minorem, quam virium vitri, & aeris, quod minuet convergentiam, & amandabit focum ad distantiam majorem.

 34. At

34. At si tubus non sit plenus eo liquore totus; terminabitur ex parte superiore per superficiem RR' horizontalem, quæ idcirco erit obliqua respectu axis inclinati. Si ejus occursus cum axe sit P, & concipiatur recta VPV' perpendicularis ad eam superficiem; ipse radius SP non progredietur per axem PQ, sed accedet ad rectam perpendicularem PV' per rectam PQ'', ad cujus punctum quoddam Q'' convergent etiam radii CQ, C'Q incidentes in superficiem liquoris in T, T', & inde detorti ad id punctum. Facile demonstratur, distantiam PQ'' fore minorem distantiâ PQ; sed primo etiam intuitu statim patet, angulum QPQ'' fore majorem, vel minorem, prout inclinatio tubi fuerit major, vel minor; quia angulus QPV' æqualis angulo incidentiæ SPV erit itidem major, vel minor. Hinc distantia puncti Q'' & ab axe, & vero etiam ab objectivo, erit diversa pro diversa inclinatione tubi, quod reddet variabilem positionem punctorum imaginis respectu micrometri aptati loco ipsius imaginis efformatæ in positione tubi verticali, & pervertet totam rationem dimetiendi per fila micrometri positiones objectorum, & nominatim distantiam quæsitam a zenith. Perturbatio autem esset adhuc major; si liquore applicato ad partem superficiei objectivi, pars alia remaneret libera ab ipso, transeunte parte radiorum immediate e vitro in liquorem, & alia parte transeunte prius e vitro in aerem, tum ex aere in liquorem.

35. Accedit, quod ipsa superficies in tubo non nimis amplo non est satis plana, nec sphærica, sed intumescens ita, ut unio radiorum refractorum debeat esse multo minus accurata, & minus regularis etiam in casu, in quo tota superficies objectivi sit libera a liquore. Ex iis omnibus satis patet, oportere, liquor sit applicatus toti superficiei objectivi sine ullo intervallo vacuo, quod obtinetur per illud vas LM' figuræ quartæ. Tum superficies dirimens liquorem a vitro remanet regularis, & sphærica, nimirum illa ipsa superficies, ad cujus formam tornatum est objectivum habens axem eundem cum axe secundæ superficiei objectivi ipsius, & formulæ, quas in Tomo I eruimus pro superficiebus, habent locum hìc etiam.

36. Con-

36. Considerari poterit transitus ex aere in liquorem, ut transitus per lentem quandam, cujus binæ superficies habeant vim refractivam diversam, adeoque diversam rationem sinuum, nimirum diversum illum valorem, quem in omnibus præcedentibus Opusculis appellavimus m. Is pro prima superficie est ille, qui obtinetur methodo exposita in Opusculo I tomi I pro illa specie vitri: pro secunda superficie facile deducitur ex eo ipso valore m pertinente ad eam speciem vitri, & valore m pertinente ad eum liquorem. Tam enim ex observationibus, quam ex ipsa theoria virium refractivarum deducitur, rationem sinus incidentiæ in transitu ex una quavis subsantia in aliam ad sinum anguli refracti componi e ratione sinus incidentiæ in egressu e prima substantia in aerem ad sinum anguli refracti, & sinus anguli incidentiæ in ingressu ex aere in illam secundam substantiam ad sinum anguli refracti; ratio autem sinus incidentiæ in egressu e vitro in aerem ad sinum anguli refracti est reciproca ejus, quæ habetur in ingressu ex aere in vitrum. Sit ratio sinuum in ingressu ex aere in vitrum m ad 1, & ex aere in eum liquorem M ad 1, & dicatur m' ratio sinuum in transitu e vitro in eum liquorem, erit $m' = \frac{1}{m} \times M = \frac{M}{m}$. Si assumatur m pro vitro $= \frac{3}{2}$, & M pro aqua $= \frac{4}{3}$, qui sunt valores proximi veris, evadit $m' = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$; quod satis indicat exiguitatem refractionis in secunda superficie, & protractionem distantiæ focalis SQ in SQ'.

37. In hac suppositione, si quæratur tantummodo distantia foci pro radiis infinite proximis axi, oportebit assumere formulam pro foco unius superficiei sphæricæ, quæ habetur in fine capitis I Opusculi II Tomi I num. 41, & eam prius applicare primæ superficiei cum suo valore m, tum secundæ cum suo m': nam formula pro lente, quæ habetur ibidem, & qua semper usi sumus huc usque, supponit egressum e lente in eandem substantiam, e qua radius in ipsam fuerat ingressus, ut in aerem, adeoque rationem sinuum in egressu $\frac{1}{m}$, posità ratione in ingressu $= m$. Ea formula est ibi $\frac{1}{g} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp}$, in qua radius sphæricita-

tis

tis est a, qui valor hic pro prima superficie erit positivus, cum ea debeat fieri convexa, p distantia puncti dirigentis radios incidentes, quæ pro eâdem superficie primâ evadit infinita, evanescente $\frac{1}{p}$ de more, q est distantia puncti dirigentis radios refractos, qui valor obveniet positivus ob a positivum. Hic valor evadet p pro secunda superficie, pro qua ponendum erit b pro a, & m' pro m: sed valor b erit negativus, si secunda superficies debeat esse convexa, quod præstabit, ne focus discedat nimis procul. Hinc fiet $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma}$, & factâ distantiâ foci post ingressum e secunda superficie vitri in aquam $= r$, fiet $\frac{1}{r} = \frac{m'-1}{m'b} + \frac{m-1}{mm'a}$. Quod si objectivum sit isoscelium, fiet $\frac{1}{b} = -\frac{1}{a}$, & formula evadet $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} \times (\frac{m-1}{mm'} - \frac{m'-1}{m'})$.

38. Positis pro m, & m' valoribus $\frac{3}{2}$, & $\frac{8}{9}$, habebitur coefficiens numericus secundi membri $= \frac{1}{2} \times \frac{2 \times 9}{3 \times 8} + \frac{1}{9} \times \frac{9}{8} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Hinc $\frac{1}{r} = \frac{1}{2a}$, & $r = 2a$. Pro lente posita in aere habetur ex eadem formula pro prima superficie itidem $\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma}$, & pro secunda in formula $\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp}$ ponendum erit $-a$ pro a ob convexitatem secundæ superficiei, & isoscelismum, $\frac{1}{m}$ pro m, adeoque $1-m$ pro $\frac{m-1}{m} = 1 - \frac{1}{m}$, nimirum $-(m-1)$, & $\frac{m-1}{a}$ pro $\frac{m-1}{ma}$, ac iterum $\frac{m-1}{a}$ pro $\frac{1}{mp}$, adeoque habebitur $\frac{1}{r} = \frac{2(m-1)}{a}$, qui est valor inventus in omnibus præcedentibus Opusculis pro lente isoscelia. Is facto $m = \frac{3}{2}$ evadit $= \frac{2}{2a} = \frac{1}{a}$, & $r = a$. Quare in eo vitri genere focus lentis isosceliæ per infusionem aquæ, quæ applicetur toti secundæ superficiei, amandatur ad duplam distantiam, & cum exi-

exiguum sit discrimen vis refractivæ in diversis vitris, erit proxime eadem productio distantiæ foci ab objectivo isoscelio inducta ab aqua, quæ nimirum ipsum amandabit ad distantiam circiter duplo majorem.

39. Ea ratio ejus distantiæ auctæ etiam facilius inveniretur considerando tenue velum aeris æque ubique crassum inter secundam superficiem vitri, & superficiem aquæ retinentis eandem formam, & quidem elongatio ejus foci ita habebitur facile pro lentibus etiam non isosceliis. Sit h distantia focalis objectivi positi in aere, b radius sphæricitatis superficiei secundæ, qui erit idem, ac superficiei aquæ, M ratio sinuum pro ingressu ex aere in aquam. Hæc superficies excipiet radios convergentes ad distantiam $= h$, qui idcirco erit valor p pro ipsa. Hinc in formula superficiei unicæ $\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp}$, ponendum erit M pro m, b pro a, h pro p, & habebitur $\frac{1}{r} = \frac{M-1}{Mb} + \frac{1}{Mh}$. In casu proposito, in quo $b = -a$, $M = \frac{4}{3}$ & h sive r pro radiis parallelis $= a$, ut invenimus numero superiore, erit $\frac{1}{r} = -\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{a} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{a} = -\frac{1}{4a} + \frac{3}{4a} = \frac{2}{4a} = \frac{1}{2a}$, & $r = 2a$, ut prius.

40. Si habeatur accuratus valor m vitri adhibendi pro efformando objectivo pertinens ad radios medios, & M liquoris, ut aquæ; habebitur accuratus coefficiens numericus, qui si dicatur n, habebitur valor $\frac{1}{r} = \frac{n}{a}$: adeoque si quæratur determinata quædam distantia r objectivi a foco Q, quæ conveniat radio sectoris; invenietur radius sphæricitatis a objectivi ipsi respondens, qui erit $= nr$. Ad eam distantiam ab objectivo adducendum erit vitrum DD'. Verum etiam sine accurata determinatione valorum m, M, & radiorum sphæricitatis poterit adhibendo aquam res confici, si ita disponantur omnia, ut sine effusione ipsius aquæ possit variari distantia vitri DD' ab objectivo: nihil enim oberit determinationi differentiæ refractionum, quæ quæritur; si distantia r obveniat paullo major, vel minor: satis est, lamina vitrea ita addu-

adducatur ad focum Q, ut imago fixæ observatæ pingatur satis proxime in ea ipsa superficie ejus laminæ, in qua ductæ sunt illæ rectæ lineæ.

41. Poterit assumi objectivum jam etiam constructum e vitro qualitatis incognitæ, quod habeat distantiam focalem proxime dimidiam valoris r propositi: distantia autem focalis saltem proxima veræ invenitur admodum facile excipiendo imaginem solis, vel objectorum remotorum, quam id objectivum exhibet in pariete cubiculi tenebricosi, vel in charta alba per radios, qui per ipsum transmittuntur. Id objectivum collocatum in tubi vertice debebit post infusionem aquæ removere focum ad distantiam saltem proxime duplam ejus distantiæ focalis; adeoque innotescet saltem proxime locus tubi, in quo collocanda sit theca DD' continens eam laminam. Tubo etiam crassius elaborato ex illa tenui lamina ferrea, poterit parari alius brevior quinque, vel sex pollicum affabre elaboratus e solidiore metallo ad tornum, & accurate poliri, politâ etiam superficie DD' thecæ continentis eam laminam, quæ superficies torno itidem elaborata habeat diametrum accurate æqualem diametro superficiei internæ ejus tubi. Immisso eo tubo brevi intra tubum longum ferreum, & affixo ipsi ita, ut aqua egredi inde non possit, immittetur theca DD' in eum tubum, intra quem ipsa poterit protrudi magis vel minus, quin aqua inde egredi possit. Immissâ aquâ, poterit transpici per telescopium ita paratum quodpiam objectum etiam terrestre elevatum, & satis remotum, ut vertex montis cujuslibet, vel etiam vertex turris campanariæ habentis crucem in vertice. Promovebitur lens ocularis, donec appareat distinctum illud objectum, & si appareant simul distinctæ lineæ illæ ductæ in superficie vitri plani, id erit indicio, focum jacere in illo eodem plano.

42. Multo autem melius id perspicietur, & si focus non sit ibi, innotescet, an protrudi debeat adhuc magis theca intra tubum, an retrahi, observando, an movendo oculum ad latus hinc, & inde linea illa laminæ vitreæ appareat semper affixa eidem puncto objecti, an excurrat per objectum ipsum, qui excursus indicat illam, quam Astronomi appellant parallaxim oculi, & ea est me-

methodus inquirendi in positionem micrometri filaris communis respectu objectivi etiam in telescopiis communibus, quæ adhibentur in Astronomia. Si filum excurrit per objectum versus eam plagam, versus quam movetur oculus; id indicat, filum ipsum respectu oculi jacere ultra imaginem, adeoque thecam retrahendam esse, & removendam ab objectivo: quod si filum in excursu oculi excurrit per objectum versus plagam oppositam; fila jacent inter oculum, & imaginem, adeoque protrudenda erit theca ipsa versus objectivum, donec demum deveniatur ad positionem, in qua motus oculi nullam inducat mutationem filorum micrometri respectu objecti. Porro dum theca vel adducitur, vel protruditur, aqua objectivi superficiem non deseret, sed tantummodo ejus superficies in vase figuræ 4 descendet, vel ascendet, aucto, vel imminuto spatio tubi, quod ipsa implere debet.

43. Verum res poterit perfici multo facilius per tubos simplices ex illa tenui lamina ferrea. Tubo ABB'A' (fig. 6) paullo longiori, qui in parte inferiore habeat, ut in fig. 4, thecam DD' etiam immobilem cum lamina vitrea, & lentem ocularem GG' inclusam suo tubulo infra ipsam, immittatur alter tubus PQQ'P', qui in parte inferiore contineat objectivum in QQ', & in parte superiore extet supra verticem AA' prioris, infra quem verticem sit vas MLL'M'. Poterit hic posterior tubus protrudi intra priorem plus, vel minus, donec focus appareat in superficie superiore laminæ vitreæ DD', destructâ parallaxi oculi. Si aqua ascendat inter binos tubos a Q versus A; id utique nihil oberit: quia ipsa non poterit ascendere supra P, & abire ad superficiem objectivi superiorem. Ille autem excessus tubi supra objectivum usque ad PP' nihil itidem oberit; immo etiam poterit prodesse ad excludendam lucem vividiorem diei, vel crepusculi, ut videri possit trans volumen aquæ fixa aliqua major ante noctem. Optimum erit ita parare duplicem thecam GG', ut exteriore immotâ, interior cum lamina habeat motum circularem circa axem telescopii, per quem facilius reducatur altera e lineis rectis referentibus fila micrometri ad positionem parallelam motui diurno: nam ea positio necessaria obtineri aliter non posset, nisi moven-

do circa proprium axem totum tubum telescopii, ante quam is firmiter adnecteretur sectori, quod esset nimis incommodum. Quoniam diversi liquores præditi diversa vi refractiva debent inducere diversam productionem distantiæ foci ab objectivo; poterit ope hujusce secundi tubi, si fiat paullo longior, adhiberi idem objectivum pro iis liquoribus omnibus, eo tubo protruso intra illum magis, vel minus. Verum si loco aquæ adhibendi sint liquores alii, determinanda erit longitudo SQ figuræ 5 pro singulis veræ proxima, & eadem operatio repetenda ad præstandam accuratam positionem laminæ vitreæ in foco producto ab eo liquore.

44. Considerari jam potest, quid accidat tam radiis digressis ab unico puncto objecti, qui debent advenire ad oculum paralleli inter se, vel parum admodum convergentes, aut divergentes ad habendam distinctionem, quid radiis digressis a diversis punctis objecti, & transeuntibus per centrum objectivi ad sensum irrefractis, a quibus pendet augmentum. Ea persequemur in fig. 7. Sit ibi CSC' idem objectivum, SQ idem axis cum eo foco Q, qui in figura 5 erat Q' posito in prima superficie DD' laminæ vitreæ planæ, cujus crassitudinem utut exiguam referat recta Qq major, ut progressus linearum reddatur sensibilis.

45. Incipiendo a radiis cC, c'C' ad sensum parallelis axi sS, qui deveniunt ab unico puncto objecti, & incidunt in totam superficiem objectivi, ii abeunt ad axem in Q. Considerabimus solum C'Q, qui progrediens recta abiret ad E, sed per refractionem deflectitur accedendo ad perpendiculum Qq per rectam Qe occurrentem secundæ superficiei in e: si concipiatur recta Heh perpendicularis ei superficiei, adeoque parallela axi; is radius in egressu e vitro in aerem refringetur recedendo a perpendiculo per rectam eX, quæ producta ex parte opposita occurret axi Qq alicubi in F. Erit autem sinus anguli incidentiæ QeH $=$ eQF ad sinum anguli refracti X$eh = e$Fq, ut 2 ad 3. Is sinus posterior est idem, ac sinus anguli eFQ sui supplementi, & cum ratio eorum sinuum sit eadem, ac ratio laterum oppositorum, erit ea ratio eF ad eQ, quæ rectæ ob exiguitatem anguli eQF minoris angulo EQF opposito ad verticem angulo SQC', vel exiguo, vel si aper-

si apertura objectivi sit ingens, non ita magno, parum omnino different a rectis qF, qQ. Quare ii radii discedent divergentes a puncto axis F distante a puncto Q per trientem crassitudinis vitri, & excepti in X ab oculari prodibunt ab ipsa paralleli; si ea ita admoveatur ipsi laminæ DD', ut ejus focus citerior sit in F. Hinc ad habendam distinctionem positio lentis ocularis erit ad sensum eadem, ac si lamina illa vitri non adesset, sed radii prodirent e massa aquæ facta sine perspicuitatis damno solida per glaciem.

46. Consideretur jam e radiis devenientibus ex alio quopiam objecti puncto is, qui egreditur ex objectivo cum eadem directione, cum qua advenit, qui hic itidem debet esse aliquis, cum ii, qui incidunt in margines objectivi circumquaque, detorqueantur introrsum ad focum: is hic etiam potest considerari, ut irrefractus, & transiens per centrum objectivi S. Is deveniens ad superficiem DD' in Q' non progredietur recta per Q'M, sed deflectetur versus perpendiculum GQ'g parallelum axi per rectam Q'I, existente sinu anguli incidentiæ SQ'G = Q'Sq ad sinum anguli refracti gQ'I, ut 9 ad 8. Cum, producta recta IQ' usque ad concursum cum axe in O, sit angulus QOQ' = gQ'I; ratio sinuum angulorum QSQ', QOQ', quæ est eadem, ac ratio laterum Q'O, Q'S, sive quamproxime QO, QS: adeoque adveniet ad superficiem DD' is radius, tanquam si discessisset a puncto O posito citra objectivum per intervallum SO æquale octanti distantiæ SQ. Is radius delatus ad secundam superficiem dd' laminæ vitreæ in I non progredietur recta per IN, sed recedet a perpendiculo LIl per rectam IR occurrentem lenti oculari alicubi in R, quæ recta producta retro occurret axi alicubi in P. Erit autem sinus anguli incidentiæ OIL = IOq ad sinum anguli refracti LIP = qPI in transitu e vitro in aerem, ut 2 ad 3, quæ erit ratio laterum IP, IO trianguli IOP, sive proxime rectarum qP, qO. Assumpta autem QO pro qO ob exiguam crassitudinem laminæ vitreæ, erit QS ad QP in ratione composita ex rationibus QS ad QO, sive 8 ad 9, & QO ad QP, sive 3 ad 2, nimirum ut 3×8 ad 2×9, sive ut 4 ad 3. Ea esset ratio sinus anguli re-

 fra-

fracti ad sinum anguli incidentiæ in egressu ex aqua in aerem, laminâ vitreâ nihil agente, tanquam si non adesset, sed fieret transitus immediatus ex aqua in aerem: nimirum omnis actio virium vitri, quæ habetur in transitu per primam superficiem, destruitur ab æquali actione directionis contrariæ in transitu per secundam parallelam.

47. Radius MR adveniens ad ocularem, tanquam si divergeret a puncto P, detorquebitur ad punctum axis V tantillo remotius, quam si advenisset divergens a puncto S. Nam adhuc distantia TP erit satis magna respectu distantiæ focalis ejusdem ocularis, ut idcirco distantia TV tam pro radiis divergentibus a puncto S, quam pro divergentibus a puncto P sit paullo major, quam pro parallelis. Si objectivum haberet distantiam focalem SQ in aere, & radii divergentes a puncto S advenirent ad eandem ocularem per rectam SN; augmentum haberetur dividendo angulum SVN per angulum VSN, sive proxime rectam SN, vel ST per VN, vel VT: in hoc autem telescopio ipsum augmentum habebitur dividendo angulum PVR per angulum VPR, sive proxime rectam PR, vel PT per VT, adeoque ea augmenta erunt, ut PT ad ST. Est autem, ut vidimus, QP ad QS, ut 3 ad 4, & QT exigua respectu PT, & ST: hinc augmentum cum eadem oculari erit majus hic, quam in eo casu in ratione 4 ad 3. In telescopio communi sine aqua habente idem objectivum, & ocularem eandem, augmentum esset duplo minus, quam cum objectivo habente pro distantia focali hanc SQ duplam nimirum distantiæ focalis hujus objectivi. Hinc hujus augmentum in aere cum hac oculari esset ad augmentum ejusdem cum aqua, ut 2 ad 3. Distantia focalis lentis ocularis, quæ præstet augmentum datum n sic invenietur. Sit distantia focalis hujus objectivi in aere $= h$, distantia focalis ocularis $= h'$. Erit SQ $= 2h$, & PQ $= \frac{3}{4} \times 2h = \frac{3}{2}h$, pro qua si accipiatur PT, erit augmentum $= \frac{PT}{VT} = \frac{3h}{2h'} = n$, & $h' = \frac{3h}{2n}$. Pro reliquis liquoribus, inventâ PQ, eadem dividenda erit per n ad habendam distantiam focalem quæsitam h'.

Sed

Sed experientia docebit, quod augmentum obtineri possit in ejusmodi telescopio cum sufficienti distinctione.

48. Videndum jam pro complemento theoriæ hujusce generis telescopii, qua ratione id possit reddi acromaticum. Acromatismus posset esse utilis ad habendum augmentum majus, non ut augeat magis diametrum apparentem fixæ, sed ut reddat magis sensibilem ejus motum, & partes cæli respondentes iisdem particulis micrometri. Fixæ non habent ullam diametrum apparentem sensibilem, sumptâ voce diametri apparentis in eo sensu, in quo ea accipitur ab Astronomis. Tota magnitudo apparens fixarum provenit a radiis aberrantibus, quam ob causam ipsæ trans telescopium apparent potius minores, quam nudo oculo, & trans telescopia meliora adhuc minores, quanquam vivaciores ob majorem quantitatem luminis collectam a tota apertura objectivi, quam a simplici apertura pupillæ. Augmentum motus, & partium superficiei cælestis respondentium filo micrometri prodest pro minuenda quantitate erroris commissi in collocando centro fixæ in media crassitudine ejusdem fili, vel hîc lineæ insculptæ in superficie prima laminæ vitreæ. Cum telescopia acromatica ferant aperturas multo majores, & hæ inducant majorem copiam luminis; prodest acromatismus vi quoque luminis, quæ reddet magis visibiles fixas etiam trans longiorem tractum per spatium densius, ut est aqua.

49. Porro, quod pertinet ad acromatismum, in primis quæri potest, an cum habeantur binæ substantiæ, per quas radius transit, ut vitrum, & aqua, possit obtineri acromatismus per unicam lentem e vitro, & aquam affusam ejus superficiei posteriori. Hîc tamen in primis notandum est illud, non posse per ejusmodi objectivum cum aqua ita affusa corrigi simul errorem utrunque, nimirum refrangibilitatis, & sphæricitatis, quia binæ solæ superficies, quæ hîc habentur, non inducunt nisi binos radios sphæricitatum determinandos, quarum determinationum altera pertinet ad distantiam foci ab objectivo, alterâ solâ relictâ pro correctione alterius tantummodo ex iis binis erroribus.

50. Ad videndum, an possit haberi hæc correctio erroris refrangibi-

gibilitatis, quæ sola dedit nomen acromatici objectivis, & telescopiis, resumenda est formula $\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp}$: ex ea juxta num. 37 eruitur pro hisce binis superficiebus (I) $\frac{1}{r} = \frac{m'-1}{m'b} + \frac{m-1}{mm'a}$. Facto variabili valore m, & m' per differentias dm, & dm' pertinentes ad radios primos rubeos comparatos cum postremis violaceis, sumenda erit differentia secundi membri, & ponenda $= 0$. Ad faciliorem differentiationem reducetur ea formula ad formam $\frac{1}{b} \times (1 - \frac{1}{m'}) + \frac{1}{a} \times (\frac{1}{m'} - \frac{1}{mm'})$. Differentia erit $\frac{1}{b} \times \frac{dm'}{m'^2} + \frac{1}{a} \times (-\frac{dm'}{m'^2} + \frac{mdm' + m'dm}{m^2 m'^2}) = 0$, adeoque $\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{m} - \frac{m'}{m^2} \times \frac{dm}{dm'} = \frac{m-1}{m} - \frac{m'}{m^2} \times \frac{dm}{dm'}$. Facto $a = 1$, fiet (II) $\frac{1}{b} = \frac{m-1}{m} - \frac{m'}{m^2} \times \frac{dm}{dm'}$, quo valore substituto pro $\frac{1}{b}$, & 1 pro a in æquatione (I), fiet $\frac{1}{r} = \frac{(m-1)(m'-1)}{mm'} - \frac{(m'-1)}{m^2} \times \frac{dm}{dm'} + \frac{m-1}{mm'}$: primus ex iis tribus terminis redactus ad duos exhibet $\frac{m-1}{m} - \frac{m-1}{mm'}$, quorum posterior elidit postremum e tribus iisdem, ac remanet (III) $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{m} - \frac{m'-1}{m^2} \times \frac{dm}{dm'}$.

51. Æquationes II, & III rem omnem conficient, si rite inveniantur valores m, m', $\frac{dm}{dm'}$: nam earum prior exhibebit relationem valoris b ad $a = 1$, & posterior valorem r redactum ad eandem unitatem, adeoque juxta methodum tam sæpe adhibitam in utroque tomo reducetur tam a, quam b, ad unitatem $= r$, dividendo $\frac{1}{r}$ per $\frac{1}{a}$, & $\frac{1}{b}$, ubi ob $\frac{1}{a} = 1$ relate ad præcedentem unitatem valor a relate ad hanc novam erit ille ipse, qui relate ad præcedentem fuerit inventus pro $\frac{1}{r}$.

52. Vi-

52. Vidimus num. 36, valorem m' esse $= \frac{M}{m}$, ubi m est illa ratio sinuum pro transitu ex aere in vitrum, M pro transitu ex aere in aquam. Hinc erit $dm' = \frac{mdM - Mdm}{m^2}$, adeoque $\frac{dm'}{dm} = \frac{1}{m} \times \frac{dM}{dm} - \frac{M}{m^2}$. Valor m pro vitro quovis invenitur methodo, quam exposuimus in Opusculo I Tomi I, & eodem pacto M pro aqua, vel pro alio liquore quovis, si in prisma vacuum habens bina latera efformata a binis laminis vitreis habentibus superficies planas parallelas bene politas infundatur is liquor: valor etiam $\frac{dm}{dm'}$, & ejus inversus $\frac{dm'}{dm}$ invenitur methodo ibidem exposita, quibus habitis obtinebuntur in æquationibus II, & III valores b, & r relati ad unitatem $= a$:

53. Ii valores in diversis vitris inveniuntur diversi, ut jam toties diximus: adhuc tamen pro vitro communi, & aqua parum abludunt ab iis, quos hic supra adhibuimus, qui idcirco assumi poterunt pro exemplis calculorum, facto $m = \frac{3}{2}$, & $M = \frac{4}{3}$. Pro vitro communi, & aqua Newtonus invenit $\frac{dM}{dm} = \frac{M-1}{m-1}$, quod itidem non est generaliter accurate verum, sed pro vitris communibus parum abludit a vero. Assumptis autem iis valoribus erit $m' = \frac{M}{m} = \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$, tum $\frac{dM}{dm} = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$, adeoque $\frac{dm'}{dm} = \frac{1}{m} \times \frac{dM}{dm} - \frac{M}{m^2} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{12}{27} - \frac{16}{27} = -\frac{4}{27}$, & proinde $\frac{dm}{dm'} = -\frac{27}{4}$. Quare $\frac{1}{b} = \frac{m-1}{m} - \frac{m'}{m^2} \times \frac{dm}{dm'} = \frac{1}{3} + \frac{8}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{27}{4} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{9}{3} = 3$: tum $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{m} - \frac{m'-1}{m^2} \times \frac{dm}{dm'} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{27}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$. Valor $\frac{1}{b}$, qui obvenit positivus $= 3$, ostendit, secundam superficiem debere

bere esse concavam cum radio triplo radii primæ. Sed valor $\frac{1}{r}$ $= 0$ ostendit r infinitum, radiis prodeuntibus parallelis absque foco, & imagine objecti, adeoque per aquam effusam superficiei secundæ objectivi simplicis e vitro communi haberi non posse acromatismum quæsitum. Id quidem non est mirum: nam itidem per duas, vel etiam plures lentes, sed e binis substantiis, in quibus $\frac{dm}{dm'}$, sit $= \frac{m-1}{m'-1}$, vidimus in primo Tomo, haberi non posse objectivum acromaticum, foco itidem abeunte in infinitum; licet ibi habeantur non duæ solæ superficies, sed quatuor, vel etiam plures: quam ipsam ob causam non potest componi objectivum acromaticum per binas lentes e vitro communi continentes aquam, e qua efformaretur lens tertia habens superficies suas congruentes cum superficiebus earundem binarum internis.

54. Cum fieri possit objectivum acromaticum e flint, & vitro communi, posset autem itidem fieri per lentes e flint, & aqua; videndum, an possit haberi hic per objectivum e flint, cui aqua sit affusa. Assumatur etiam pro flint valor $m = \frac{3}{2}$, licet sit paullo major: ejus valor dm ad eum valorem in vitro communi est saltem proxime, ut 3 ad 2, adeoque cum $\frac{dM}{dm}$ sit respectu aquæ, & vitri communis $= \frac{2}{3}$, erit idem valor pro aqua, & flint $= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. Hinc $\frac{dm'}{dm} = \frac{1}{m} \times \frac{dM}{dm} - \frac{M}{m^2} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{9} - \frac{4}{3} \times \frac{4}{9}$ $= -\frac{8}{27}$, & $\frac{dm}{dm'} = -\frac{27}{8}$: tum $\frac{1}{b} = \frac{m-1}{m} - \frac{m'}{m^2} \times \frac{dm}{dm'} = \frac{1}{3}$ $+ \frac{8}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{27}{8} = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$, & $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{m} - \frac{m'-1}{m^2} \times \frac{dm}{dm'}$ $= \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{27}{8} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$. Valor b positivus indicat itidem secundam superficiem concavam, & valor r positivus indicat focum realem. Sed reducendo valorem a, & b ad unitatem $= r$ habebitur $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{10}$. Radius sphæ-

sphæricitatis primæ superficiei esset pars sexta totius longitudinis r, & radius secundæ pars decima, cumque valor r sit duplus distantiæ focalis ejus objectivi, aquâ affusâ amandante focum ad duplam distantiam, patet, nimis exiguos fore eos radios, qui idcirco non permitterent aperturas, nisi perquam exiguas, & si paullo majores assumerentur, error sphæricitatis nimis excresceret.

55. Demum si assumeretur vitrum strass habens suum dm duplo majus, quam vitrum commune; res paullo minus male procederet; sed adhuc male. Retento etiam pro ipso $m = \frac{3}{2}$, licet pro eo is valor soleat esse adhuc major, habebitur $\frac{dM}{dm} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, adeoque $\frac{dm'}{dm} = \frac{1}{m} \times \frac{dM}{dm} - \frac{M}{m^2} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{4}{9} = -\frac{10}{27}$, & $\frac{dm}{dm'} = -\frac{27}{10}$: tum $\frac{1}{b} = \frac{m-1}{m} - \frac{m'}{m^2} \times \frac{dm}{dm'} = \frac{1}{3} + \frac{8}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{27}{10} = \frac{1}{3} + \frac{32}{30} = \frac{42}{30}$, $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{m} - \frac{m'-1}{m^2} \times \frac{dm}{dm'} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{27}{10} = \frac{1}{3} - \frac{4}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$. Valor positivus b ostendit secundam superficiem adhuc concavam, valor r positivus focum realem: sed reducendo ad unitatem $= r$ valor a remanet $= \frac{1}{5}$, & $b = \frac{1}{5} \times \frac{30}{42} = \frac{1}{7}$, ille pars quinta, hic septima valoris r, adeoque ille pars decima, hic pars quartadecima distantiæ focalis objectivi, uterque nimis exiguus.

56. Hi calculi non sunt accurati ob valorem m assumptum, & pro flint, & pro strass minorem vero: sed cum valores veri non multum differant ab assumptis, patet sane, nullam haberi spem successus per duas superficies alteram e vitro contiguo aeri, alteram e vitro contiguo aquæ. Et quidem satis patet ex ipso calculorum progressu, secundam superficiem debere semper obvenire concavam, quod effectum primæ superficiei minuit amandato foco ad majorem distantiam, quam deinde aqua reddit adhuc du-

plo majorem: hinc radii sphæricitatum evadent semper nimis exigui respectu distantiæ objectivi a micrometro, quod aperturam objectivi reddet semper nimis exiguam, cum exiguâ copiâ radiorum, & obscuritate summâ, quam auget tanta aquæ copia interjecta. Hinc recurrendum est ad duas lentes alteram e vitro communi, alteram e flint, quarum ope res confici potest haud difficulter, si agatur de corrigendo solo errore refrangibilitatis, de quo solo egimus etiam hic hucusque. En methodum hujusce perquisitionis.

57. Concipiemus binas lentes primam e vitro communi, cujus ratio sinuum m, radii sphæricitatum a, & b, distantia focalis h, valor subsidiarius $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$, secundam e flint, cujus ratio sinuum m', radii sphæricitatum a', b', distantia focalis h', valor subsidiarius $\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'}$, tum post tenue velum aeris habebimus superficiem aquæ, cujus ratio sinuum M, radius sphæricitatis b' idem, ac postremæ superficiei vitri, r distantia, ad quam convergunt radii digressi ab unico puncto objecti sito in axe telescopii, quæ ipsa, cum radiis sphæricitatum determinabitur sequenti ratione.

58. E formulis numeri 41 capitis I Opusculi II Tomi I habetur pro singulis lentibus $\frac{1}{h} = \frac{m-1}{f}$, $\frac{1}{h'} = \frac{m'-1}{f'}$, & factâ distantiâ focali lentis compositæ ab iis binis $=$ H, est ibi $\frac{1}{H} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'}$. Is valor erit assumendus pro $\frac{1}{p}$ in formula pertinente ad unicam superficiem, qua jam usi sumus in superioribus, $\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp}$, ubi pro m, q, & a ponendum erit M, r, & b'. Hinc habebitur $\frac{1}{r} = \frac{M-1}{Mb'} + \frac{m-1}{Mf} + \frac{m'-1}{Mf'}$. Ad hoc, ut valor r remaneat idem pro radiis primis rubeis, & postremis violaceis, ponenda erit differentia secundi membri $= 0$: reducemus autem hic etiam primum terminum

ejus

ejus membri ad formam $\frac{1}{b'}\times(1-\frac{1}{M})$, & fiet $\frac{dM}{M^2b'}+\frac{dm}{Mf}-\frac{(m-1)dM}{M^2f}+\frac{dm'}{Mf'}-\frac{(m'-1)dM}{M^2f'}=0$. Si fuerint inventi methodo primi Opusculi Tomi I valores M, m, m', & $\frac{dm}{dm'}$, $\frac{dM}{dm'}$, qui duo postremi $\frac{dm}{dm'}$, $\frac{dM}{dm'}$, dicantur u, u'; erunt $dm=udm'$, & $dM=u'dm'$, quibus valoribus substitutis, & multiplicando per M^2, ac dividendo per dm', habebitur $\frac{u'}{b'}+\frac{Mu}{f}-\frac{(m-1)u'}{f}+\frac{M}{f'}-\frac{(m'-1)u'}{f'}=0$.

59. In hac æquatione habentur tres valores indeterminati b', f, f', quorum binæ relationes mutuæ inducunt binas determinationes arbitrarias, tertiam pro radiis primæ lentis relinquit indeterminatam valor $\frac{1}{f}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$, nam relatio a' ad b' determinatur per valorem $\frac{1}{f'}=\frac{1}{a'}-\frac{1}{b'}$, & per relationem b' ad f'. Hinc, additâ unâ determinatione a longitudine distantiæ foci, pro qua assumetur prima unitas arbitraria, remanebunt arbitrariæ binæ. Harum altera in Opusculo II Tomi I determinabatur a correctione erroris sphæricitatis, altera remanebat arbitraria. Suppositiones fieri poterunt numero infinitæ: fiant ambæ lentes isosceliæ: erit $a=-b$, $a'=-b'$; adeoque $\frac{1}{b}=-\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b'}=-\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{f}=\frac{2}{a}$, $\frac{1}{f'}=\frac{2}{a'}$, ac æquatio $-\frac{u}{a'}+\frac{2Mu}{a}-\frac{2(m-1)u'}{a}+\frac{2M}{a'}-\frac{2(m'-1)u'}{a'}=0$, & factâ præterea $a=1$, erit (I) $\frac{1}{a'}=\frac{2Mu-2(m-1)u'}{u-2M+2(m'-1)u'}$, tum (II) $\frac{1}{r}=-\frac{M-1}{Ma'}+\frac{2(m-1)}{M}+\frac{2(m'-1)}{Ma'}$. Hæ duæ æquationes exhibebunt

bunt solutionem æquationis respondentem ei positioni arbitrariæ.

60. Applicabimus hasce formulas objectivo, in quo prima lens sit convexa e vitro communi, secunda e flint, cujus formam exhibebit calculus, & assumemus hìc etiam numeros parum abludentes a veris, quos assumpsimus numero 54, nimirum $m = m'$ $= \frac{3}{2}$, $M = \frac{4}{3}$, $\frac{dm}{dm'} = u$ pro flint, & vitro communi $= \frac{2}{3}$, $\frac{dM}{dm'}$ pro flint, & aqua $= \frac{4}{9}$. Applicatis hisce numeris ad binas formulas I, & II, habebitur $\frac{1}{a'} = \frac{2Mu - 2(m-1)u'}{u - 2M + 2(m'-1)u'}$

$$= \frac{2 \times \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{9}}{\frac{2}{3} - \frac{8}{3} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{9}} = \frac{\frac{16}{9} - \frac{4}{9}}{-\frac{18}{9} + \frac{4}{9}} = -\frac{12}{14} = -\frac{6}{7},\ \frac{1}{r} = -\frac{M-1}{Ma'}$$

$$+ \frac{2(m-1)}{M} + \frac{2(m'-1)}{Ma'} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{6}{7} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{6}{7} = \frac{3}{14}$$

$$+ \frac{3}{4} - \frac{9}{14} = \frac{3}{4} - \frac{3}{7} = \frac{9}{28}.$$

Porro cum pro reductione valorum a, & a' ad unitatem $= r$ debeat hæc fractio dividi per 1, & per $-\frac{6}{7} = -\frac{24}{28}$, erit a $= \frac{9}{28}$, sive proxime $= \frac{1}{3}$, & $a' = -\frac{9}{24} = -\frac{3}{8}$.

61. Valor r positivus ostendit, focum esse realem, valor a' negativus lentem secundam e flint debere esse concavam, dum prima e vitro communi est convexa. Ambæ sunt isosceliæ, quod est commodum artificibus: radius primæ $\frac{9}{28}$ est tantillo minor triente distantiæ focalis hujus objectivi ita compositi, & adjacentis aquæ, radius secundæ $-\frac{3}{8}$ paullo major eodem triente, qui quidem non sunt nimis exigui: sed iidem non sunt exacti, quia assumpti, sunt valores m, & m' minores, quam soleant inveniri in vitris utriusque speciei. Si retentis valoribus $M = \frac{4}{3}$, u $= \frac{2}{3}$, $u' = \frac{4}{9}$, assumantur pro m, & m' valores 1,53, & 1,60, qui magis accedunt ad eos, qui solent inveniri in pluribus vitris communibus, & pluribus flint, quos numeros adhibuimus etiam

in

in præcedenti Opusculo ; obveniunt valores $\frac{1}{a} = -0,883$, $\frac{1}{r}$ $= 0,220$, adeoque relate ad unitatem $= 1$ obtinetur $a = 0,220$, $a' = -0,242$, qui valores multo minores prioribus sunt minus idonei pro habenda apertura satis magna. Si ea fiat aliquanto major; error sphæricitatis timeri potest non ita exiguus.

62. Et quidem quod pertinet ad errorem sphæricitatis, possent aptari formulæ inventæ in illo primo capite Opusculi II Tomi I huic etiam speciei telescopii pro corrigendo simul errore sphæricitatis : habentur enim ibidem formulæ ejus erroris tam pro una, ac pluribus etiam lentibus conjunctis, quam pro unica superficie : eæ possent reduci methodo non multum absimili ab ea, quæ in eodem Opusculo est adhibita, ad casum unicæ superficiei aquæ additæ lentibus binis, vel ternis : sed calculus esset admodum complicatus. Verum adest methodus multo simplicior, & expeditissima corrigendi simul etiam in hoc genere telescopii aquei utrumque simul errorem sine ullis novis calculis, quæ mihi postrema in mentem venit, ut accidit plerumque. Satis est objectivo illi ipsi, quod adhibetur pro telescopio acromatico communi, addere ex parte interiore per modum novæ lentis vitrum etiam commune concavo-convexum habens pro radio superficiei primæ distantiam focalem ipsius objectivi, & pro radio secundæ eandem diminutam per crassitudinem ejus vitri. Hoc vitrum contiguum aquæ ipsam continebit, radii autem detorti ab objectivo versus focum suum incident ad perpendiculum in utramque superficiem, adeoque sine ulla nova refractione colligentur in eodem foco, in quo collecti fuissent, si aqua non adfuisset. Quin immo poterit etiam secunda superficies tornari ad eandem sphæricitatem, quod erit multo facilius : neglectus crassitudinis tam exiguæ respectu radii sphæricitatis nullum notabile detrimentum afferet radiorum unioni. Haberi poterit idem augmentum, & eadem apertura sine ulla alia jactura præter partem luminis interceptam ab aqua, quæ ipsa jactura erit multo minor ob brevitatem tubi, qui pro acromaticis telescopiis adhibetur, & aperturam ingentem. Qui careat ejusmodi objectivo, poterit adhibere combinationem propositam numero

supe-

superiore, & vero etiam sine ullo usu alterius vitri, quam communis, adhibere objectivum simplex isoscelium ex eo vitro habens distantiam focalem pedum quatuor, quam aqua affusa amandabit ad pedes octo, aucta nonnihil apertura, quæ compenset jacturam luminis intercepti ab ipsa aqua.

§. III.

De fixis ad hanc determinationem idoneis cum solutione objectionum propositarum contra hanc methodum.

63. FIXÆ maxime opportunæ sunt, ut superius etiam indicavimus, eæ, quæ habent satis magnam aberrationem in declinationem, & eæ, quæ habent majorem, sunt magis idoneæ, cum debeat esse major earum differentia, quæ determinanda est per duo telescopia: si adhibendus sit semicirculus, qui facile converti possit circa suum axem; possunt seligi eæ, quæ habeant ejusmodi aberrationem satis magnam, quæcumque sit earum declinatio, a qua pendet earundem distantia a zenith in appulsu ad meridianum. Quadrans cum telescopiis affixis medio limbo pertingeret ad distantiam graduum 45 habendorum ex utraque parte. Sed si debeat adhiberi sector longioris radii ejus formæ, quam exposuimus, cujus limbus contineat hinc, & inde a medio numerum graduum n, distantia vero zenith a polo, quæ est complementum latitudinis loci, dicatur a; complementum declinationis ejus fixæ debet esse inter $a+n$, & $a-n$. Ut autem possit aberratio in declinationem esse non nimis exigua, non debet esse ingens distantia ipsius fixæ a polo eclipticæ, nimirum non nimis exigua latitudo: demum pro quavis fixa, quæ adhiberi possit, oportet seligere illud anni tempus, in quo ejus aberratio in declinationem sit satis magna: nam ea pro quavis fixa ita variatur, ut quodam anni tempore evadat maxima, quodam alio penitus evanescat.

64. Ut ea omnia perspici possint, sit (fig. 8) ABCD ecliptica pertinens ad superficiem sphæræ in immensum remotæ a sole S sito in ejus centro, A initium arietis, B cancri, C libræ, D capricorni, P polus in coluro solstitiorum perpendiculari ad ipsius ecli-

eclipticæ planum transeunte per polum æquatoris P': F punctum ejus superficiei cælestis, ad quod refertur fixa quæpiam per ultimam directionem radii advenientis ad instrumentum. Id punctum appellabimus hic locum fixæ verum, ut distinguatur ab eo, ad quod ipsius locum apparentem deflectit aberratio determinata ab inclinatione tubi exposità in paragrapho primo; licet ne is quidem sit ejus locus verus ob refractionem, & ob aliquem motum, quem eadem stella, utut appellata fixa, potuerit habere eo longissimo intervallo temporis, quo devenit ab ipsa ad terram lumen, quod semiquadrantem horæ impendit in intervallo a sole usque ad nos. Sit præterea Z zenith in arcu meridiani OPO', ad quem locus verus fixæ F motu diurno adveniat ex parte P'Z in *f* inter P', & Z, vel in *f'* ultra Z, prout ipsius distantia P'F a polo æquatoris fuerit minor, vel major, quam distantia ejusdem poli P' a zenith Z, adveniente polo eclipticæ simul ad ipsum meridianum in *p*. Concipiantur demum arcus PF, P'F, quorum prior continuatus usque ad eclipticam versus F in E, versus P in E' complebit semicirculum EPE', & determinabit pro longitudine fixæ arcum AE computatum directione AB, & pro latitudine arcum EF, cujus complementum erit PF, existente P'F complemento declinationis.

65. Consideratur hic totus orbis terræ annuus circa solem, ut unicum punctum, non solum respectu distantiæ ab illa superficie sphærica posita in infinita distantia ultra ipsas fixas, sed etiam respectu distantiæ ipsarum fixarum a sole, & a terra, ad quam si ea haberet rationem sensibilem; angulus subtensus a radio orbis ipsius terminatus ad eandem fixam esset parallaxis annua, cujus effectus deberet conjungi cum effectu hujus aberrationis: sed ea invenitur insensibilis. Licet autem totus is orbis habeatur pro unico puncto; directio motus annui, quæ est eadem, ac tangentis orbitæ ipsius, variata per totum annum, mutat perpetuo directionem, secundum quam telescopium inclinatur, & locus apparens fixæ removetur a loco vero, ac fixa ipsa debet designari a telescopio ita inclinato, tanquam si moveretur in plano parallelo eclipticæ per orbem quendam, qui quidem orbis habendus erit pro circulari, cum velocitas terræ subiens variationem

per-

perquam exiguam respectu totius determinet æqualitatem omnium distantiarum loci apparentis in illo plano a loco vero. Is circulus spectatus e terrâ in immensum proximâ soli respectu immensæ illius distantiæ, debet apparere in particula superficiei ejusdem considerata ut plana itidem circulus, ubi fixa sit in axe hemisphærii tendente ad polum ipsius: in quavis alia positione fixæ is circulus debet apparere ellipsis eo magis compressa, quo magis radius tendens ad eum locum verum inclinatur ad planum eclipticæ parallelum plano ejusdem circuli; cum is evadat basis quædam coni terminati a directionibus apparentibus, recti in primo casu, obliqui in secundo, & in utroque secti perpendiculariter ad suum axem a superficie ipsa, quæ nimirum est perpendicularis omnibus suis radiis. Hinc ea ellipsis erit eo magis compressa, quo illa inclinatio recedet magis a perpendicularitate, nimirum, quo latitudo fixæ erit minor: donec pro fixis positis in ipso plano eclipticæ tota ellipsis abeat in lineam ad sensum rectam.

66. Eam ellipsim exhibet figura eadem in GLG'L', quæ quidem est perquam exigua, sed delineanda hic fuit multo major, ut quæ ad ipsam pertinent, evaderent sensibilia. Ipsi quadrans PFE occurrit in L versus P, & in L' versus partem oppositam: axis major est GFG' perpendicularis axi minori LL', ille semper æqualis duplæ aberrationi totali secundorum 20, hic ad illum in ratione sinus latitudinis EF ad radium. Arcus P'F ipsi occurrit in I versus P', in I' ad partes oppositas, diameter perpendicularis diametro II' in N, N', diameter hujus conjugata in H, H', per quæ puncta transibunt binæ tangentes parallelæ ipsi NN', quæ occurrent ad angulos rectos eidem arcui P'F in M, M'. Si Q secet bifariam semicirculum orientalem EDE', & Q' occidentalem EBE'; eo tempore, quo radius orbitæ terrestris dirigetur a sole versus E, sole viso e terra in E', adeoque habente eandem longitudinem cum fixa, motus ipsius terræ dirigetur versus Q', adeoque locus apparens fixæ erit in G' vertice orientali axis majoris ellipseos: post menses ternos sole apparente in Q, E, Q', fixa apparebit in L', G, L, eritque in primo casu aberratio in longitudinem FG' ipsam minuens, & in latitudinem nulla, in secundo aberra-

tio

tio in latitudinem erit FL' ipsam minuens, & nulla in longitudinem, in tertio FG in longitudinem ipsam augens, & in latitudinem nulla, in quarto FL in latitudinem eam augens, & in longitudinem nulla. At in ascensionem rectam maximæ, & contrariæ erunt FN, FN', loco apparenti fixæ existente in N, & N': erunt maximæ in declinationem, & oppositæ HM, H'M', loco apparenti fixæ existente in H, & H'. Loco apparenti existente in puncto quovis ellipseos, arcus perpendicularis diametro II' erit aberratio in ascensionem rectam, & ejus distantia a centro F aberratio apparens in declinationem. Nec est difficile determinare pro quovis loco solis in ecliptica punctum ellipseos, in quo tum erit locus apparens fixæ, qua de re jam satis nota astronomis fusius egi in una e veteribus meis dissertationibus methodo Geometriæ linearis, & agam hìc in uno ex Opusculis Tomi V: erutæ autem sunt & regulæ, & formulæ generales, per quas determinatur pro quovis momento temporis, ut superius affirmavi, aberratio in longitudinem, latitudinem, ascensionem rectam, declinationem fixæ habentis longitudinem, & latitudinem datam: hìc satis fuit ingerere ideam quandam ejusmodi variationum.

67. Ex iis patet, quamvis fixam habere aberrationem maximam in longitudinem bis in anno in G', & G, sole habente eandem longitudinem cum ipsa, & longitudinem oppositam habere itidem tribus mensibus post maximam in latitudinem in L, & L', & eam integram secundorum 20, si fixa sit in ipso polo eclipticæ, cujus ellipsis ibi est circulus, sed eo minorem, quo latitudo ipsius est minor, in ratione sinus ejusdem latitudinis. Aberratio autem tam in ascensionem rectam, quam in declinationem erit integra pro fixa existente in polo eclipticæ, & fere integra pro fixis proximis eidem polo: at quævis alia fixa bis habebit aberrationem maximam in ascensionem rectam in N, & N', bis maximam in declinationem in H, H', quæ erunt minores illâ integrâ secundorum 20. Sed pro hac, quæ nobis hìc venit usui, patet illud, aberrationem maximam in declinationem fore semper majorem illâ maximâ in latitudinem, quæ ad integram secundorum 20 est ut cosinus latitudinis ad radium: nam quævis semi-

 dia-

diameter FI in ellipsi est major semiaxe minore FL : & cum quævis tangens HM abeat extra ellipsim ; quævis FM erit major, quam FI , unde habetur duplex excessus aberrationis maximæ in declinationem supra ipsum semiaxem minorem. Quanta autem sit pro quavis data fixa ea aberratio maxima in declinationem , & quo anni tempore ipsa evadat maxima , id quidem facile determinatur tam per eas formulas , quam per simplicem constructionem linearem.

68. Aberratio maxima in declinationem potest evadere æqualis integræ secundorum 20 etiam in fixa distante a polo eclipticæ, dummodo ea non distet ab ipso plus, quam polus æquatoris , nimirum dummodo ejus distantia ab eo polo non sit per hæc tempora major , quam 23°. 28', sive ejus latitudo non sit minor, quam *66*°. 32': tum enim angulus PFP' poterit esse rectus , quo casu ipse axis major GFG' erit perpendicularis arcui NFN', & congruent omnia puncta G'HMI . Datâ distantiâ PF , cum detur etiam latus PP', quod tum evadit hypothenusa trianguli PFP' rectanguli ad F , habebitur angulus ad P , nimirum arcus BE, qui determinat longitudinem ejus fixæ : erit enim $cos.\,P'PF = \frac{tan.\,PF}{tan.\,PP'}$: habebitur etiam ejus distantia P'F a polo P' complementum declinationis per formulam $cos.\,P'F = \frac{cos.\,PP'}{cos.\,PF}$.

69. Datis punctis P , P', punctum F determinans angulum rectum esset ad circulum diametro PP', si ageretur de superficie plana: sed cum agatur de superficie sphærica ; id punctum erit ad curvam duplicis curvaturæ : ejus projectio perpendicularis in planum eclipticæ esset curva , cujus æquatio haud difficulter determinatur : eam invenio gradus quarti (*). Curva ipsa duplicis curvaturæ , ad quam est

(*) Sit enim (fig. *9*) ABCD eadem ecliptica , quæ in fig. 8 , conversa paullo aliter , ut facilius perspiciantur lineæ adhibendæ pro hac investigatione , cum eodem semicirculo O'P'PO transeunte per eosdem polos P', P æquatoris , & eclipticæ : sit autem punctum F in superficie sphæræ cælestis ejusmodi , ut angulus P'FP sit rectus . Concipiatur quadrans PFE idem itidem , ac in fig. 8 , cum

est in superficie sphærica punctum quæsitum F, facilius describi potest in eadem superficie, per puncta ex illa ipsa proportione, quæ exhibuit valorem enunciatum *cos*. PF : *cos*. PP' : : *rad.* : *cos*. P'F, ex qua etiam per constructionem geometricam, assumpto quovis arcu PF non majore, quam sit hypothenusa PP', invenitur arcus P'F: positâ alterâ cuspide circini prius in P cum apertura chordæ arcus assumpti PF, tum in P' cum apertura chordæ arcus inventi P'F, invenietur punctum F per intersectionem circulorum descriptorum a cuspide altera in superficie globi cælestis, in qua habetur delineatio constellationum. Ita delineatâ eâ curvâ per puncta, fixæ omnes, quæ occurrant in ejus perimetro, erunt ejusmodi, ut possint habere aberrationem integram secundorum 20 in declinationem, & facile definitur tempus anni, in quo ea habetur. Eæ fixæ præferendæ sunt, si adhibeatur ad observationem instrumentum habens arcum satis magnum.

70. Sector paucorum graduum pro ejusmodi fixis adhiberi non potest, nisi in regionibus nimis borealibus. Quoniam latus P'F non potest esse majus hypothenusâ PP'; non potest is arcus esse major, quam 23°. 28'. Non poterit igitur ea fixa acedere ad

 ze-

cum radio PS, qui erit perpendicularis plano eclipticæ, ac rectis P'M, FN perpendicularibus eidem plano, quarum prior cadet in ipsam diametrum OSO', posterior in intersectionem radii SE cum perimetro curvæ quæsitæ MNS ortæ in eodem plano a projectione perpendiculari curvæ P'FP: addatur FI perpendicularis radio SP, cum recta SN, quæ erit parallela, & æqualis IF, & rectâ NH perpendiculari rectæ SM, quæ erit ordinata curvæ ortæ e projectione ad axem SM habentem SH pro abscissa.

Fiat SH $= x$, HN $= y$, SN $= z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. Erit ex theorematis Trigonometriæ sphæricæ tangens hypothenusæ PP', quæ dicatur a, ad tangentem lateris PF adjacentis angulo sphærico P'PF, qui æquatur rectilineo O'SE, ut radius ad cosinum ejus anguli, nimirum ut SN $= z$ ad SH $= x$. Porro PF habet pro sinu ad radium SP, qui dicatur r, FI $=$ SN $= z$, & tangens est sinus ductus in radium, & divisus per cosinum, nimirum $\frac{rz}{\sqrt{(r^2 - z^2)}}$. Quare multiplicatis extremis, & mediis ejus proportionis, erit $ax = \frac{rz^2}{\sqrt{(r^2 - z^2)}}$, adeoque $a^2x^2(r^2 - z^2) = r^2z^4$, vel $a^2r^2x^2 - a^2x^4 - a^2x^2y^2 = r^2x^4 + 2r^2x^2y^2 + r^2y^4$, nimirum $y^4 + \frac{2r^2 + a^2}{r^2} \times x^2y^2 + \frac{a^2 + r^2}{r^2} \times x^4 - a^2x^2 = 0$, æquatio gradus quarti.

zenith Z in suo appulsu ad meridianum minus, quam per excessum distantiæ poli a zenith, sive complementi latitudinis loci, supra eum arcum. In observatorio Parisiensi latitudo est 48°. 50', cujus complementum 41°. 10', adeoque non potest ejusmodi fixa accedere ad zenith magis, quam per 41°. 10' — 23°. 28' = 17°. 42': ea erit distantia a zenith minima omnium ex iis, quas habere possunt fixæ capaces aberrationis integræ in declinationem, adeoque deberet haberi arcus fere 18 graduum utrinque in instrumento, nimirum arcus totus 36 graduum. Major adhuc requireretur pro fixis ejus curvæ remotioribus a polo eclipticæ, quæ cum debeant accedere magis ad polum æquatoris, existente arcu P'F eo minore, quo PF est major, minus possent accedere ad zenith. Major etiam arcus esset necessarius pro ejusmodi fixis in regionibus australioribus, ut in Italia, & Hispania, ubi distantia poli æquatoris a zenith est adhuc major. Adhiberi posset Petropoli fixa sita prope polum eclipticæ cum sectore satis commodo, cum ejus urbis latitudo sit fere = 60°, cujus distantia a polo æquatoris = 30°, demptis 23°. 28', relinquit 6°. 32': sector autem habens radium pedum 8, & limbum utrinque pedis unius exhibet arcum majorem gradibus 7.

71. Sed illud commode accidit pro regionibus etiam australioribus, quod ex iis, quæ demonstrata sunt numero 67, facile eruitur, posse adhiberi fixas satis proximas zenith in appulsu ad meridianum cum jactura aberrationis perquam exigua, potissimum in regionibus satis borealibus, ut Parisiis, & multo magis Londini, cujus latitudo adhuc major superat gradus 51. Si fiat sector, qui habeat limbum integrum tantummodo 8 graduum, qui cum radio pedum 8 parum excedit longitudinem unius pedis; poterunt adhiberi Parisiis fixæ, quæ distent a polo æquatoris per 41°. 10' — 4° = 37. 10. Polo eclipticæ existente supra polum æquatoris, eæ distabunt ab illo per 37°. 10' — 23°. 28' = 13°. 42', qui arcus habet pro cosinu 0,972. Hinc ipsa aberratio FL pro ejusmodi fixa erit 20"×0,972 = 19",44, adeoque FM adhuc major excedet $19''\frac{1}{2}$. Pro sectore habente gradus 7 utrinque distantia a polo eclipticæ poterit esse tantummodo 10°. 42', cujus cosi-

cosinus 0,984 ductus in 20" exhibet 19", 68, adeoque FM adhuc major poterit excedere $19''\frac{3}{4}$. Consideratâ tantummodo aberratione FL, ea est adhuc secundorum 18" in distantia a zenith 25°. 50', cujus cosinus est = 0,900. Pro illis prioribus non amittitur, nisi quadrans unius secundi, vel ejus dimidium, & pro hisce postremis, quæ distant ab illis per gradus 15, non amittuntur, nisi duo secunda: unde constat, quam sit ampla pars superficiei sphæræ cælestis, in qua non habeatur jactura considerabilis aberrationis in declinationem.

72. Ad videndum unico intuitu, quæ fixæ seligi possint, poterit adhiberi constructio facta ope circini in superficie globi cælestis. Aperiatur is prius ad intervallum complementi latitudinis loci imminuti per arcum exhibitum a dimidio limbo sectoris, tum aucti per eum arcum, & applicatâ alterâ cuspide ad polum æquatoris, ducantur notâ delebili in superficie ejus globi bini circuli: inter eos circulos erunt seligendæ fixæ ad rem idoneæ: eæ enim appellent ad meridianum in distantia a zenith, quæ possit exhiberi ab eo sectore. Assumi poterit quævis ex ipsis, quæ distet a polo eclipticæ per arcum non majorem gradibus 25. Nimirum si figatur cuspis circini aperti ad intervallum chordæ graduum 25, & ducatur is etiam circulus; poterit assumi quævis fixa ex iis, quæ ita habentur in illa priore fasciâ latâ tot gradibus, quot habet integer limbus sectoris, ut simul sint intra hunc circulum, sine periculo diminutionis majoris binis secundis.

73. In ea parte globi cælestis circa polos boreales non occurrunt fixæ magnitudinis primæ, & secundæ, at habentur plures magnitudinis tertiæ, & quartæ, ut β, & λ Draconis, quæ sunt magnitudinis tertiæ, & non distant a polo eclipticæ, nisi gradibus 15, cumque habeant declinationem, illa = 52° 30', hæc 51°. 32', appellunt ad meridianum Parisiis in distantia a zenith 3°. 40', ac 2°. 42', Londini autem in distantia adhuc minore. Porro licet aqua in tubo pedum 8 intercipiat multum luminis; ego quidem nullus dubito, quin satis evidenter transpici possint trans eam aquæ massam præcipue per noctem & eæ, & fixæ multo minores, potissimum si apertura objectivi fiat aliquanto major: nam

sæpe

sæpe in ipso mari tranquillo vidi admodum distincte etiam interdiu lapillos fundi, & pisces in altitudine multo majore pedibus octo, licet aqua marina sit minus pellucida, quam aqua pluvia. Nihil autem timendum est a majore apertura objectivi, quæ nonnihil augeat errorem sphæricitatis, cum, ut superius exposui, illa apparens magnitudo impedire non possit, ne ejus centrum satis accurate collocetur in media crassitudine fili, vel lineæ micrometri.

74. His ita fuse expositis, prona jam est solutio objectionum illarum, quæ mihi fuerant propositæ. Prima petita a directione perceptionis de loco objecti respondente directioni impressionis, quam radius exercet in oculum, nullam habere potest vim; cum locus apparens indicatus ab instrumento pendeat tantummodo ab inclinatione tubi necessaria ad hoc, ut radius ingressus per primum foraminulum figuræ 1 prodeat e secundo, vel transiens per centrum objectivi incurrat in intersectionem filorum, nullâ habitâ ratione ad id, quod accidat radio post egressum e secundo foramine, qui quidem in casu telescopii cum micrometro ne egreditur quidem. Adeoque differentia distantiæ apparentis a zenith determinatæ per bina illa telescopia pendet tantummodo a motu radii in solo intervallo ab objectivo ad lentem ocularem combinato cum motu terræ transferentis tubum.

75. Nec vero translatio aeris, vel aquæ, per quam radius progreditur, facta motu terræ turbat quidquam motum radii rectilineum a loco, in quo centrum objectivi erat initio ejus motus, ad locum, in quo intersectio filorum invenitur in fine, quia particulæ luminis eo motu non abripiuntur, sed cum ex una parte habeant liberrimum spatium pro transitu, quod est in immensum majus spatio occupato a materia, & in mea quidem theoria infinite majus, sentiant autem ob medii homogeneitatem circumquaque in ea exigua distantia, ad quam extenditur earum actio, vires æquales tam in casu massæ, per quam deferuntur, quiescentis, quam in casu ipsius translatæ, non mutant directionem sui itineris, quæ mutatio habetur tantummodo prope superficiem dirimentem duo media, ubi vires particularum medii novi non

sunt

sunt æquales viribus particularum præcedentis. Particulæ luminis, quæ progrediuntur, non incurrunt in particulas medii, per quas sibi pandant iter, quod si accideret, paterentur resistentiam, & egressæ e vitro, vel ex aqua possent quidem amittere minus de sua velocitate, non autem recuperare velocitatem, quam habebant in aere ante ingressum, adeoque in novo ingressu posteriore in aliud vitrum non haberent eandem refractionem, quam in primo ingressu; cum eædem vires deflectant magis mobile præditum minore celeritate, quam præditum majore.

76. Sed independenter ab hisce considerationibus, cum e theoria radii progredientis, comparando celeritatem ipsius cum celeritate terræ, deductæ sint leges aberrationis annuæ fixarum, consentientibus observationibus omnibus immenso numero institutis post id egregium Bradleyi compertum; satis constat, a differentia velocitatum debere haberi differentiam aberrationum, quæ respondeat differentiæ eidem. Quantum sit hoc discrimen, facile deducitur in theoria Newtoniana ex eo theoremate, quod, dum lumen mutat medium, velocitas in medio præcedente ad velocitatem in medio novo est reciproce, ut sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refracti. Ejus theorematis demonstratio habebitur etiam in Opusculo VII hujus Tomi, ubi agendo de refractionibus astronomicis habebitur hujus theorematis demonstratio generalis pertinens etiam ad quemcumque transitum ex uno medio in aliud. Cum in ingressu ex aere in aquam ea ratio sinuum reciproca sit, ut 3 ad 4; ea erit ratio velocitatum in aere, & in aqua, adeoque ratio aberrationum ejus reciproca, ut 4 ad 3. Hinc differentia aberrationum exhibitarum a binis telescopiis erit pars quarta aberrationis, quæ habetur per telescopium habens aerem in tubo. Si adhibeatur fixa habens integram aberrationem secundorum 20 per primum tubum, adeoque duplum aberrationis exhibitum per conversionem instrumenti = 40; differentia erit secundorum 10: si autem adhibeatur fixa habens ejusmodi aberrationem in illo eodem tubo secundorum 18, cujus duplum *36*; differentia erit adhuc secundorum *9*, amisso unico secundo effectus totalis.

77. Porro inde patet solutio secundæ objectionis. Tempusculum,

lum, quod lumen progrediens cum velocitate tam immensa impendit per longitudinem tubi tam exiguam, est omnino insensibile, immo fere imperceptibile, & pene momentaneum: sed ratio velocitatis terræ transferentis tubum ad velocitatem luminis, licet illa sit multo minor hac, non est insensibilis, cum inducat inclinationem telescopii secundorum 20, quorum effectus intervallo sex mensium duplicatur ita, ut si observationes instituantur temporibus, quibus aberrationes maximæ sint contrariæ, & æquales, duplicetur effectus, & assurgat ad secunda 40: per majora autem instrumenta evadit sensibile unum etiam secundum. In telescopio habente augmentum 300, secunda 20 apparent ejus magnitudinis, cujus apparet trans tubum simplicem nullis armatum vitris objectum habens diametrum apparentem minutorum 100, nimirum plus quam triplam diametri apparentis lunæ. Differentia aberrationum, quam exhibent duo telescopia formæ propositæ rite applicata eidem instrumento, si observationes instituantur iis temporibus, quibus aberratio in declinationem est maxima, debet in Newtoniana theoria assurgere saltem ad 9", adeoque est utique admodum sensibilis etiam ipsa, & cum haberi possit intra unam noctem, vel saltem duas, est multo minus obnoxia difficultatibus: ea differentia, si utrumque telescopium ferat id augmentum, debet esse sensibilis trans ipsa plus quam oculo inermi tota lunæ diameter: sed etiam trans ea, quæ aptari solent sectoribus pedum octo, utut multo minoris augmenti, est utique sensibile, uti diximus, etiam unum secundum.

78. Accedit, quod est multo magis sensibile discrimen inter effectus habendos in binis sententiis, quæ requirunt differentias contrarias. Eo tempore, quo aberratio in declinationem maxima auget per 18 secunda declinationem fixæ appellentis ad meridianum inter zenith, & polum, telescopium commune in sententia Newtoniana velocitatis auctæ in medio densiore debet exhibere ope conversionis instrumenti duplam distantiam a zenith majorem, quam telescopium aqueum, excessu secundorum 9: in sententia vero contraria velocitatis imminutæ in medio densiore debet ea inveniri minor: si hæc differentia contraria debet esse æqualis illi priori;

ri ; pro excessu secundorum 9 debet inveniri defectus æqualis. Differentia inter istos effectus contrarios, a qua pendet quæstionis solutio, evadit secundorum 18 duplo adhuc magis sensibilis. Hinc patet, admodum sensibilem esse effectum illum, per cujus determinationem ea lis est dirimenda.

§. IV.

De effectu aberrationis luminis respectu objectorum terrestrium (*).

80. JAM olim considerando effectum aberrationis luminis respectu objectorum terrestrium, habitâ celeritate radii constanter eâdem in toto tractu usque ad oculum, animadverti, haberi pro objectis terrestribus errores binos, qui se ita mutuo corrigant, ut directio apparens tendat semper ad eum locum, in quo objectum est eo momento temporis, quo cernitur. En eos binos errores, & mutuam ipsorum destructionem in hypothesi velocitatis nihil variatæ. Directio radii transeuntis trans duo foramina figuræ 2 producta retro non tendit ad locum occupatum ab objecto tum, cum cernitur trans ea foramina, sed ad eum, in quo erat cum radius ipse ab eo discessit, & directio foraminum non est eadem, ac directio ejus radii. Verum ista duo ita compensantur, ut directio foraminum tendat ad illum ipsum locum, in quo id objectum est tum, cum cernitur oculo applicato ad secundum foramen.

(*) Priores tres paragraphos conscripseram, impressionis tempore jam urgente, cum illud mihi in mentem venit, posse multo commodius adhiberi hoc genus telescopii habentis aquam in suo tubo ab objectivo usque ad micrometrum, dirigendo ipsum ad objecta terrestria abrepta motu terræ simul cum eodem immoto respectu superficiei terrestris, cui ejus fulcrum adhæreat, & quidem sine ullo sectore, aut alio instrumentò, præter micrometrum internum, quod multo faciliorem admittit motum, quam telescopium cum toto sectore. Retinenda censui quæcumque conscripseram potius, quam totum Opusculum de novo retexendum, quod toties mihi acciderat in investiganda distributione luminis per circellum erroris figuræ sphæricæ, ut exposui in scholio V supplementi Opusculi I hujus Tomi, & addendum potius novum paragraphum pro hoc objecto; quem hic subjungo.

81. Si enim objectum in figura 2 sit R, & recta NM' concipiatur producta usque ad rectam RR' parallelam rectæ MM'; ipsum etiam punctum R motu eodem terræ progredietur per eam rectam, cum punctis M, N translatis per rectas MM', NN', & velocitate ita parum diversa, ut discrimen sit in immensum exiguum. Discrimen directionis, & velocitatis provenit fere tantummodo a differentia directionis, & velocitatis motus diurni, qui totus respectu totius celeritatis est adeo exiguus, ut vidimus in §. 1: sed ejus differentia in punctis superficiei terrestris usque adeo parum a se invicem distantibus respectu semidiametrorum motus diurni, uti distant a se invicem observator, & objectum terrestre observatum, est adhuc in immensum minus sensibilis. Motus autem annuus tam brevi tempusculo & parallelismum, & celeritatem servat fere accuratissime, fere sine variatione ulla respectu omnium punctorum terræ, & multo magis respectu ita proximorum sibi invicem. Hinc erunt similia triangula MN'M', RN'R', & erit RR' ad MM', ut RN' ad MN', nimirum ut tempus, quod particula luminis impendit in adventu ab R ad N' in hypothesi velocitatis constanter ejusdem, ad tempus, quod eadem impendit per MN'. Cum in ea eadem ratione eorum temporum debeat esse spatium percursum motu terræ a puncto R ad spatium MM' percursum a foramine M; patet, eo momento, quo particula luminis advenit ad oculum applicatum foramini N', punctum R debere esse in R' in eadem recta N'M', quæ est directio apparens transpicienti trans ea foramina, & idem habet locum pro axe telescopii directo ad locum apparentem ejus objecti.

82. Si abscindatur R'r versus R = M'M; particula luminis percurret RM, & inveniet foramen primum M pro primo transitu, dum punctum R objecti terrestris motu terræ percurrit Rr: illa percurret MN', dum puncta R, M, N, percurrunt rectas æquales, & parallelas rR', MM', NN', & inveniet in N' foramen secundum pro secundo transitu. Regula BA indicabit directionem N'M', in cujus productione invenitur punctum R objecti allatum ad R' tum, cum particula appellit ad oculum applicatum

ad

ad N': id quidem ita se habebit; si radius adveniat ab eo puncto usque ad instrumentum per lineam rectam, & cum eâdem celeritate pergat usque ad N': nimirum ea regula indicabit locum, quem punctum objecti visum vere occupat, non eo momento, quo radius discedit ab R, sed eo, quo is advenit ad N'. Post id momentum pergent moveri æque puncta R', M', N' vel brevi tempore per rectas ad sensum parallelas, & æquales, quæ erunt continuationes rectarum rR', MM', NN', vel diu motu composito ex annuo, & diurno per arcus curvos iis motibus respondentes ita, ut foramina N, M laminarum affixarum moli terræ totius una cum puncto objecti terrestris remaneant semper in recta linea post quodvis intervallum temporis, ut erant in recta NMr, momento temporis, quo particula luminis advenit ad M, & in recta N'M'R' eo alio momento, quo eadem advenit ad N', atque id utcumque recta, quæ conjungebat bina foramina posita in M, N, vel M', N' cum puncto objecti posito in r, vel R', & quæ illo tempusculo imperceptibili, ac fere momentaneo, quo lumen a primo foramine abiit ad secundum, conservavit fere accuratissime parallelismum, translata per tempus utcumque longum motu annuo, & diurno mutet eodem longo tempore positionem, & directionem. Ii motus non turbabunt distantias, & positiones respectivas eorum trium corporum, nimirum binarum laminarum habentium sua foramina, & objecti, adhærentium massæ solidæ totius terræ.

83. Posita semel in directum ea tria puncta, nimirum centra foraminum, & punctum objecti, quod trans ipsa cernitur, remanebunt semper in directum in aliis, & aliis lineis rectis habentibus alias, & alias positiones, & directiones, sed semper rectis; nisi vel regula cum laminis dimoveatur inde alio motu diverso a motu communi globi terrestris, ut lapsu fulcri, vel amota inde impulsu aliquo, aut manu libera. Positionem autem in directum acquirent ea tria puncta, ubicunque sint, si ita semel dirigatur regula, ut id objecti punctum trans eadem foramina transpici possit, nisi radius luminis inflectatur per viam, quod accidere poterit per refractionem, quæ, si agatur de objecto satis remoto, ut de vertice montis cu-

juspiam, radium ab eo digressum incurvat in longo tractu per atmosphæram, & variata variat curvaturam ipsam, a quo refractionis effectu hic præscindimus. Idem autem accidet axi telescopii habenti aerem inter objectivum, & intersectionem filorum micrometri positam in ipso axe: si semel id telescopium dirigatur ita ad objectum terrestre, ut aliquod ejus punctum appareat in illa filorum intersectione; apparebit semper ibidem.

84. Secus res accidet, si laminæ ferentes foramina sint bases quædam tubi pleni aquâ perpendiculares ipsius axi, & habentes in centris suis ipsa foramina obtecta laminis vitreis ad continendam eam aquam, vel si telescopium habeat aquam inter objectivum, & micrometrum. Radio abeunte per rectam lineam a puncto objecti usque ad primum foramen, & progrediente rectà usque ad secundum, linea recta tendens ab hoc ad illud non dirigetur ad locum objecti, nisi in casu, in quo ejus positio habeat eam directionem, quam habet motus eorundem foraminum translatorum cum ipsa terra, vel ei directe oppositam. In quavis alia positione ea recta inclinabitur in plano transeunte per eam ipsam, & per rectas, per quas moventur foramina motu terræ, in quo ipso plano erit idem punctum objecti. Inclinatio autem fiet ad partes oppositas ei, versus quam tendunt foramina ipsa, si celeritas luminis per aquam est major celeritate per aerem, ac in eandem illam partem, si illa celeritas fuerit minor, quam hæc: quantitas inclinationis erit ea ipsa differentia aberrationum respondentium iis celeritatibus diversis pro angulo eodem inclinationis ejusdem rectæ transeuntis per foramina ad viam motus diurni.

85. Sit enim in ipsa figura 2 via radii RMN', & foramina NM habeant directionem illam eandem, quam habebant prius, tendentem ad illud punctum r, ad quod punctum R devenerat eo tempore, quod particula luminis impendebat in suo motu per aerem usque ad M. Celeritate eâdem continuatâ post transitum per id punctum, particula luminis non appellebat ad secundam basim nisi eo momento temporis, quo ipsum foramen N translatum per NN' permittebat ipsi liberum transitum: at celeritate luminis variatâ post transitum per M, foramen N illo tempore

jam

jam mutato non percurret lineolam NN', quam percurrebat prius, sed minorem in casu velocitatis auctæ, & majorem in casu ipsius imminutæ: adeoque illa particula non inveniet secundum foramen, per quod transire possit, sed incurret in lamellam solidam. Ad hoc, ut possit transire, oportebit in primo casu inclinare regulam minus, in secundo magis, quam prius: adaptabimus progressum explicationis primo casui velocitatis auctæ per aquam, quem credimus omnino verum: inde ea facile traducetur ad secundum velocitatis imminutæ.

86. Retento loco primi foraminis M, ad quod particula luminis eadem adveniet per aerem eodem tempore, quo prius, nimirum eo, quo punctum objecti abit ab R ad r, oportebit ita inclinare regulam, ut foramen secundum distet a loco N', ad quod debebit pervenire ad excipiendum radium, per intervallum N'n minus priore N'N in ratione reciproca celeritatis per aerem ad celeritatem per aquam, nimirum in sententia Newtoniana ut 3 ad 4: eodem tempore, quo secundum foramen abibit ab n ad N', particula luminis ingressa per M perveniet ad N', & ibi inveniet foramen secundum jam eo allapsum: sed tempore eodem foramen M percurret spatium Mm tantummodo æquale spatio nN', adeoque minus priore MM' in eadem illa ratione reciproca earum velocitatum, nimirum in ratione 3 ad 4. Directio nova foraminum indicata a regula parallela rectæ jungenti eorum centra inclinabitur ad rectam N'M', cujus productio tendit ad punctum objecti allapsum ad R' eo momento temporis, quo particula luminis pervenit ad N': ea inclinatio fiet per angulum M'N'm, tendentem ad partes oppositas directioni motus Mm, & erit ad angulum M'N'M, sive N'MN, quæ erat aberratio determinata a tubo habente aerem, ut 1 ad 4: nam facile perspicitur, fore angulos exiguos MN'M', M'N'm ut rectas MM', M'm: patet autem, in casu velocitatis imminutæ fore N'n, & M'm minores, quam NN', & MM', in ratione velocitatum reciproca ob tempus imminutum in eo casu, adeoque inclinationem lineæ tendentis ad locum apparentem debere fieri versus partem oppositam.

87. Ea deviatio a directione tendente ad locum, quem occupat obje-

objectum eo momento, quo particula luminis advenit ad N', erit nulla, ubi recta N'M tendens ab N' ad locum verum objecti ipsius habeat directionem eandem cum motu terræ Mm, & nN', vel oppositam. Mutatâ autem directione ejus rectæ, mutabitur aberratio $M'N'm$ in ratione sinus anguli $N'mM'$, quem directio apparens $N'm$ continet cum directione mM', quam habet motus terræ, & aberratio ipsa erit maxima, ubi is angulus erit rectus, prorsus, ut accidit aberrationi fixarum, cum hoc solo discrimine, quod ibi concipimus fixas immobiles, hic motus objecti terrestris corrigit aberrationem in casu velocitatis intra tubum æqualis velocitati extra ipsum, & auctâ hac velocitate posteriore per aquam, non penitus corrigit, sed relinquit ejus partem quartam: si autem minuatur velocitas; eam plusquam corrigit ita, ut pariat aberrationem contrariam.

87. Directio rectæ N'M' tendentis a puncto N' ad punctum R', quod punctum objecti observatum occupat eo momento temporis, quo particula luminis advenit ad ipsum punctum N', fere accuratissime constans eo imperceptibili, ac fere momentaneo tempusculo, quo particula luminis trajicit tubum, mutatur plurimum motu diurno, qui mutat & positionem ipsius respectu directionis motus MM', & NN' ad sensum paralleli tangenti orbitæ annuæ terrestris, & magnitudinem anguli $N'mM'$, a cujus positione, & magnitudine pendet positio, & magnitudo aberrationis $M'N'm$, respectu rectæ N'M', quam nos translati cum ipsa, & cum tota terra consideramus, ut immobilem. Recta NN' dirigitur versus id punctum eclipticæ, quod est occidentalius loco solis viso e terra, cum dirigatur per tangentem orbitæ terrestris perpendicularem rectæ tendenti a sole ad ipsam terram, & directam versus orientem, quod cum sit orientalius tribus signis loco, in quo terra apparet visa e sole, est tantundem occidentalius respectu puncti eclipticæ oppositi, in quo terra videt solem. Si dirigatur tubus ad id punctum eclipticæ, & ibi remaneat fixus respectu superficiei terrestris; locus visus objecti terrestris, per quod transit ea directio, erit locus ipsius verus aberratione evanescente: remanebunt per totum diem bina centra foraminum, & id punctum objecti in

in recta linea : sed semidiametro sphæræ cælestis, quæ tendit ad id punctum, recedente per motum diurnum ab ea positione, habebitur aberratio eo major, quo major erit sinus anguli, quem directio ejus semidiametri continebit cum directione ipsius rectæ N'M'.

88. Facile erit collocare tubum etiam horizontaliter in ea directione, in qua recta transiens per centra foraminum tendat ad locum verum objecti, canali HIK figuræ 4 ita directo, ut aqua per ipsum non effluat. Cognito loco solis in ecliptica pro dato die, habebitur ejus punctum ab eo distans in occidentem per tria signa, & innotescet punctum horizontis, in quo id eclipticæ punctum ascendet supra horizontem, vel descendet infra ipsum, ac momentum temporis, quo id punctum orietur, vel occidet : si dirigatur tubus versus id horizontis punctum, & notetur objectum terrestre, quod apparet in directione foraminum eo momento ; idem objectum erit tum, & perseverabit semper in recta transeunte per ea foraminum centra, quæ transferetur simul cum ipso ita, ut eadem foraminum centra, & id objecti punctum nunquam amittant positionem rectilineam : verum idem punctum objecti non apparebit in centro foraminis M', sed in puncto *m* determinato a directione, & magnitudine aberrationis. Si foramen M' sit amplius, & habeat reticulum e filis se decussantibus, habebit punctum *m* respectu ejus reticuli motum per curvam quandam apparentem, præter casum solstitiorum, in quibus illud punctum eclipticæ distans per tria signa a loco solis orietur, & occidet in punctis ortus, & occasus æquinoctialis, quo casu movebitur id punctum eclipticæ in circulo, in cujus plano erit ipsa recta N'M', adeoque locus *m* in reticulo describet rectam lineam discedens a puncto M' perpetuo, donec illud eclipticæ punctum distet ab eo puncto horizontis per gradus 90, tum regredietur, usque ad occasum puncti ejusdem, quo tempore redibit ad M' aberratione evanescente : deinde procedet abiens versus plagam oppositam, & post alium quadrantem incipiet regredi, bis intra 24 horas evanescente aberratione, bis factâ maximâ, quod maximum in sententia velocitatis per aquam auctæ in ratione 4 ad 3, quam, ut

ut dixi, credo omnino veram, erit secundorum 5, cum debeat esse pars quarta aberrationis integræ secundorum 20, quæ in tubo pleno aere, non aquâ, convenit angulo recto. Hinc summa aberrationum in partes oppositas, quæ tubo ita directo habebitur eo die, erit secundorum 10. Id accidet semper die utriuslibet solstitii, si tubus in quacumque directione congruat cum plano æquatoris. Eo eclipticæ puncto appellente ad tubum, aberratio evanescet: tum per sex horas locus visus recedet a vero orientem versus in recta, in qua planum æquatoris secat planum reticuli, illo puncto eclipticæ recedente in occidentem, atque id per sex horas usque ad distantiam secundorum 5: deinde incipiet regredi, & post alias horas sex, eodem eclipticæ puncto appellente ad punctum oppositum ei, ad quod dirigitur tubus, evanescet iterum aberratio, & locus visus congruet cum vero: inde ipse locus visus transibit ad occidentem, & per sex horas recedet a loco vero usque ad eandem distantiam secundorum 5, & per sex postremas regredietur usque ad novam congruentiam.

89. Sed si tubus collocetur in directione axis æquatoris, in qua ei occurrat aliquod punctum terrestre; recta tendens ad illud punctum eclipticæ, quod est occidentalius loco solis per tria signa, describet planum circuli, vel superficiem coni recti motu respectivo circa axem ejus tubi consideratum a nobis ut immobilem, ac per totas 24 horas angulus, quem ea continebit cum ipso axe, erit constanter idem, nimirum rectus tempore utriusvis solstitii, in quo id eclipticæ punctum erit in æquatore, & aliis anni diebus ejus mensura erit complementum declinationis ejusdem puncti eclipticæ: in æquinoctiis eodem puncto appellente ad alterum e tropicis, is angulus erit $= 66^\circ. 32'$. Hinc locus visus circa locum verum describet circulum, cujus semidiameter subtendet in solstitio utrovis angulum $= 5''$, in utrovis æquinoctio $= 5'' \times sin. 66^\circ. 32'$ $= 5'' \times 0,917 = 4'', 58$: summa aberrationum in partes oppositas in intervallo quovis horarum 12 erit $= 10''$ in solstitiis, & $= 9'', 16$ in æquinoctiis.

90. In quavis alia positione axis tubi, locus apparens in reticulo, & ejus continuatio in superficie cælesti describet curvam quandam,

dam, quæ facile construi poterit: ac eadem, considerando exiguam particulam superficiei cælestis, quæ non excedit 10 secunda, ut planam, erit, ut mox demonstrabitur, ellipsis, cujus axis major erit perpendicularis arcui circuli transeuntis per polos æquatoris, & per punctum, ad quod dirigitur axis tubi, & in solstitiis quidem secundorum 10, quovis autem alio tempore æqualis arcui 10 secundorum ducto in cosinum declinationis, ejusdem illius eclipticæ puncti occidentalioris loco solis per tria signa, adeoque in æquinoctiis erit $= 5'' \times 0{,}917 = 4'', 58$: axis minor erit ad majorem, ut cosinus distantiæ ejus puncti, ad quod dirigitur axis tubi, a polo æquatoris ad radium.

91. Pro explicatione uberiore, & demonstratione horum omnium adhibebimus eandem figuram 9: sed in ea retinebimus solum punctum P' pro polo æquatoris: assumemus autem punctum P pro eo puncto, ad quod dirigitur axis, E pro illo puncto eclipticæ, ad quod dirigitur tangens motus annui terræ, quod est occidentalius loco solis per tria signa, ABCD pro circulo, quem motu diurno describit id eclipticæ punctum circa polum P', qui polus æque distabit ab omnibus punctis ejus circuli, nimirum per complementum declinationis puncti E, quanquam eam æqualitatem non bene exhibet figura designata pro determinatione illius alterius curvæ P'FP, sed ita, ut hæc etiam æqualitas hic facile mente suppleri possit pro hoc alio usu, in quo determinabimus constructionem, & naturam curvæ descriptæ a loco viso in superficie cælesti illa, quam consideramus ut immobilem, & in qua concipimus horizontem nostrum, ac meridianum. Dimidium ejus curvæ exprimet QKR, puncta autem O'O intersectionem circuli horarii ducti per puncta P', P cum eodem illo circulo parallelo ABCD, in quo arcus P'P erit complementum declinationis ejusdem puncti P, ad quod axis tubi dirigitur, & O determinabit distantiam ejus horarii a meridiano loci, in quo fit observatio, computatam in eo parallelo. Concipiantur demum arcus circuli maximi EP', & EP, qui posterior productus occurrat curvæ quæsitæ in K, ex quo puncto cadat lineola KL perpendicularis ad axem QR curvæ ipsius.

92. Arcus P'P, & angulus, quem circulus horarius P'PO continet

tinet cum meridiano loci, invenietur facile; si determinetur plaga horizontis, ad quam dirigitur axis tubi, & ejus elevatio supra horizontem, quod facile fit ope quadrantis mobilis collocati in plano verticali parallelo ipsi axi tubi: latere ipsius quadrantis adducto ad parallelismum cum axe tubi, filum penduli pendentis ab ejus centro de more exhibebit elevationem ejusdem axis supra horizontem, & recta ducta in plano horizontali parallela plano quadrantis ipsius exhibebit eam horizontis plagam, nimirum azimuthum circuli verticalis transeuntis per eundem axem: & quidem satis est habere hæc duo elementa crassiore etiam modo, quamvis non nimis remoto ab exactitudine, cum agatur de determinatione curvæ non complectentis arcum cælestem majorem secundis 10. Si concipiatur triangulum sphæricum terminatum ad zenith, ad polum, & ad punctum P, ad quod dirigitur axis tubi; habebitur in eo distantia poli, & puncti P a zenith, complementum altitudinis poli, & altitudinis observatæ puncti ipsius, quæ sunt duo latera ejus trianguli circa angulum ad zenith, qui itidem dabitur ex azimutho observato. Quamobrem habebitur etiam latus tertium, quod erit arcus P'P, & angulus in polo, quem horarius ductus per P continet in ipso polo P' cum meridiano.

93. His semel determinatis, prona erit determinatio curvæ quæsitæ per constructionem, quæ quidem fieri poterit, ut libuerit magna, assumptis in scala quacunque numeris pro arcu secundorum 10, & loci visi in eadem curva pro quavis hora diei cujusvis. In primis innotescet pro quovis die differentia ascensionis rectæ loci solis, & puncti eclipticæ occidentalioris sole per gradus 90, ex quo habebitur hora appulsus ejusdem puncti ad meridianum: tum ex angulo horario puncti P, ejus nimirum, quem arcus PO continet cum meridiano loci, innotescet, quanto tempore prius, vel posterius ille locus eclipticæ adveniet ad eum horarium. Differentia horæ ejus appulsus ab hora data exhibebit angulum OP'E, sive PP'E. Tum in triangulo PP'E innotescet latus inventum P'P constans cum latere P'E complemento declinationis puncti eclipticæ E, & angulo invento EP'P: quare habebitur arcus EP, & angulus P'PE, qui determinat ejus positionem.

nem. In eo arcu producto jacebit PK, cujus valor erit arcus secundorum 5 ductus in cosinum arcus inventi PE. Arcus PQ, PR pertinentes ad axem curvæ hinc, & inde pro appulsu puncti P ad horarium P'PO, & P'O' erunt æquales secundis 5 ductis in sinus arcuum PO, PO', qui sinus tempore utriuslibet solstitii erunt æquales inter se, quia tunc punctum E erit in æquatore, & arcus O'PO erit semicirculus: reliquis anni diebus ii arcus erunt æquales complemento declinationis puncti E imminuto, vel aucto per arcum PP'. Hoc pacto pro quibusvis horis habebitur punctum K ad curvam, qui erit locus visus puncti terrestris respondentis puncto P pro iis horis singulis.

94. Si ex illa scala assumatur valor inventus pro rectis PR, PQ, habebitur axis RQ: tum pro singulis horis ductâ PK in angulo invento RPK = O'PE, habebitur curva delineata per puncta, & punctum loci visi pro quavis hora. Et quidem pro delineanda curva satis est tantummodo nosse distantiam PP' puncti, ad quod tendit axis tubi in cælo, a polo æquatoris P', & complementum P'E declinationis puncti E, ac pro quovis angulo O'P E assumpto ad arbitrium invenire in triangulo sphærico P'P E arcum PE ex datis lateribus P'P, P'E, & angulo assumpto ad P.

95. Pro casu solstitiorum, in quo circulus est æquator, invenitur facilius arcus PE, qui evadit hypothenusa trianguli rectanguli P O'E. Ea facile invenitur ex eadem illa proportione, qua usi sumus pro curva præcedente: ex ea eruitur $tan.\text{PE} = \frac{tan.\text{PO}'}{cos.\text{O'PE}}$ $= \frac{tan.\text{PO}}{cos.\text{RPK}}$. Ex ejusmodi valore invenitur etiam facile æquatio ad curvam quæsitam pro eo casu. Fiat enim $tan.\text{PO}' = t$, arcus secundorum $5 = a$, $\text{PL} = x$, $\text{LK} = y$, $\text{PK} = z$: erit arcus $a = 5''$ ad $\text{PK} = z$, ut radius $= 1$ ad sinum $\text{PE} = \frac{z}{a}$. Tangens æqualis sinui diviso per cosinum erit $\frac{z}{a\sqrt{(1-\frac{z^2}{a^2})}} =$ $\frac{z}{\sqrt{(a^2-z^2)}}$. Cum hic valor debeat esse $= \frac{tan.\text{PO}'}{cos.\text{RPK}}$, & sit $tan.\text{PO}'$

 $= t$,

$= t$, *cos.* RPK $= \frac{PL}{PK} = \frac{x}{z}$, erit $\frac{z}{\sqrt{(a^2 - z^2)}} = \frac{tz}{x}$, sive $x^2 = a^2t^2 - t^2x^2 - t^2y^2$, ac demum $y^2 + \frac{(1+t^2)x^2}{t^2} = a^2$. Ea est æquatio ad ellipsim, cujus centrum P, ubi facto $x = 0$, fit $y = \pm a$, nimirum semiaxis major perpendicularis axi minori QR, & æqualis arcui secundorum 5: semiaxis autem minor PQ = PR, facto $y = 0$, evadit $x = \pm \frac{at}{\sqrt{(1+t^2)}}$, ubi coefficiens $\frac{1}{\sqrt{(1+t^2)}}$ est sinus arcus PO, qui nimirum est quartus geometrice proportionalis post secantem $\sqrt{(1+t^2)}$, tangentem t, & radium $= 1$. Hinc semiaxis minor est ad majorem, ut sinus arcus PO', vel PO ad radium, uti affirmavimus numero 90, qui quidem sinus est cosinus arcus PP', nimirum distantiæ puncti P, ad quod tendit axis tubi, a polo æquatoris P': eo puncto abeunte in ipsum polum, is cosinus evadit $= 1$, & ellipsis abit in circulum, ut debebat.

96. Extra tempora solstitiorum æquatio ad curvam quæsitam invenitur quidem, sed calculo multo complicatiore, cum P'O, P'O', PE non sint quadrantes, nec O'E arcus circuli maximi, ut PO'E possit haberi pro angulo sphærico. Oportet desumere valorem arcus PE e lateribus P'P, P'E datis constantibus, & quovis angulo assumpto P'PE, qui cum debeat esse multo magis complicatus (*), æquatio debet assurgere multo altius, & curva esse subli-

(*) En methodum, quæ mihi prima in mentem venit, pro habendo eo valore, & eruendâ inde æquatione ad hanc curvam. Habentur bina latera data P'P, P'E, cum angulo variabili EPP', = KPL, cujus cosinus est $\frac{PL}{PK} = \frac{x}{z}$: sit P'F perpendiculum ductum in basim PE, quæ ita habebit duo segmenta PF, EF. Si tangens P'P fiat $= c$, erit ex illa ipsa proportione jam bis adhibita pro nexu inter angulum trianguli rectanguli, hypothenusam, & latus adjacens *tan.* PF $=$ *tan.* P'P $\times$ *cos.* P'PF $= \frac{cx}{z}$. Ex eo valore tangentis habetur valor cosinus, qui cum æquetur quadrato radii diviso per secantem, est $= \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{c^2x^2}{z^2})}} = \frac{z}{\sqrt{(z^2 + c^2x^2)}}$. In mea Trigonometria sphærica habetur ne-

xus

blimior, cujus constructio petita ab æquatione nunquam reduceretur ad constructionem ita simplicem, uti est ea, quam proposuimus, petita ab inventione arcus PE per Trigonometriam, assumpto PK in eo angulo æquali *asin*.PE. Verum sine æquatione invenitur facile tam longitudo, quam latitudo ejus curvæ ex hac ipsa constructione, ut etiam progressus ordinatarum KL ab una evanescentia in R ad aliam in Q. Longitudo curvæ erit dupla ordinata maxima KL, cum id duplum, ut videbimus, inveniatur majus axe RQ, qui idcirco erit ejus latitudo, ut in illa ellipsi, & ratio longitudinis ad latitudinem invenitur hìc itidem ea ipsa, quæ in eadem ellipsi.

97. Fiat enim arcus $P'O = P'O' = P'E = m$, $PP' = n$, existente $a = 5''$, ut prius: erit $PO' = m + n$, $PO = m - n$, $PR = a\sin.PO' = a\sin.m\cos.n + a\sin.n\cos.m$, & $PQ = a\sin.PO = a\sin.m\cos.n - a\sin.n\cos.m$: hinc axis RQ summa eorum terminorum erit $= 2a\sin.m\cos.n$, quorum semisumma $= a\sin.m\cos.n$ erit dimidius axis, & semidifferentia $= a\sin.n\cos.m$, erit distantia puncti P a medio axe, quæ poterit considerari tanquam quædam eccentricitas, habito eo medio pro centro. Valor ordinatæ KL invenitur simplex, & simplicissimus ibi, ubi evadit maximus. Is valor est $= PK \times \sin.LPK = a\sin.PE \times \sin.P'PE$. Porro in triangulo PP'E est $\sin.PE : \sin.P'E :: \sin.PP'E : \sin.P'PE = \frac{\sin.P'E \times \sin.PP'E}{\sin.PE}$, adeoque $KL =$

asin.

---

xus inter latera, & segmenta basis per hoc theorema, quod ibi est canon 3 triangulorum obliquangulorum: *cosinus segmentorum basis sunt, ut cosinus laterum adjacentium*, adeoque si cosinus laterum datorum P'P, P'E dicantur c, c', erit $\cos.FE = \frac{c'z}{c\sqrt{(z^2 + c^2x^2)}}$. E valore cosinuum binorum segmentorum eruitur valor cosinus totius PE; & ex hoc ejus sinus, qui ductus in a exhibet aberrationem PK, & hæc ducta in sinum anguli $RPK = \frac{KL}{PK} = \frac{y}{z}$ exhibet valorem $KL = y$: ille valor positus $= y$ exhibebit æquationem, quæ factâ divisione per y, reducetur ad solas indeterminatas x, & z, & substituto pro z valore $\sqrt{(x^2 + y^2)}$ obtinebitur æquatio quæsita continens solas indeterminatas x, & y. Sed satis patet, quam alte ea debeat assurgere.

$asin.P'E \times sin.PP'E$. Cum a sit constans, & P'E complementum declinationis puncti eclipticæ E distantis per tria signa a loco solis possit haberi pro constanti intra unum diem, potissimum ubi agitur de ordinatis ad curvam ita exiguam, ut tota ipsius amplitudo non excedat decem secunda; erit ordinata KL, ut sinus anguli PP'E, qui evanescit, puncto E abeunte in O', vel O, & evadit maximus æqualis radio 1, puncto eodem distante ab iis punctis per quadrantem ipsius illius paralleli: tum enim angulus PP'E evadit rectus: adeoque ibi ordinata maxima evadet $= asin.P'E = asin.m$, & longitudo curvæ ejus dupla $= 2asin.m$, ad quam latitudo inventa $2asin.mcos.n$ erit, ut $cos.n = cos.PP'$ ad radium, prorsus ut num. 95 invenimus pro illa ellipsi.

98. Valor ejus ordinatæ proportionalis sinui anguli PP'E exhibet progressum ipsius ab una evanescentia in O ad aliam in O', post quam ea transit ad partem oppositam, & augetur per eosdem gradus, evadit maxima, decrescit, donec iterum evanescat, puncto E regresso ad O. Angulus OP'E metitur horas ab appulsu puncti E ad O, nimirum ad circulum horarium transeuntem per P, qui est quædam conjunctio diurna cum axe tubi, in qua conjunctione aberratio fit in arcu ejusdem circuli, tum per horas sex recedit ab eo semper magis, qui recessus usque ad maximum, habitum eo tempore æqualem valori $asin.m$ est, ut sinus arcus metientis tempus, elapsum ab eodem appulsu, ad radium: decrescit iterum per sex horas sequentes per eosdem gradus, per quos creverat, ac evanescit, transit ad partem oppositam, & crescit eodem modo per horas sex sequentes, ac decrescit per sex postremas.

99. In solstitiis pro quacunque positione tubi habebitur ellipsis, & aliis anni diebus ea curva, præter eam positionem, in qua ejus directio sit perpendicularis axi æquatoris: in eo casu evanescet latitudo ejus ellipseos, vel curvæ, & succedet recta linea: tum enim arcus P'P erit quadrans, & cum latitudo curvæ ad longitudinem debeat esse, ut cosinus ejus arcus evanescentis ad radium, evanescente in ea positione eo cosinu, debet evanescere etiam ea latitudo. Axis major perpendicularis arcui P'P erit in sol-

stitiis

stitiis $= 10''$, & reliquis anni diebus idem numerus $10''$ multiplicatus per cosinum declinationis ejus puncti eclipticæ, cujus producti mensura minima erit in æquinoctiis valor $10'' \times sin. 66^\circ. 32'$ $= 10'' \times 0,917 = 9'', 17$. Latitudo erit tam in solstitiis, quam extra ad longitudinem, ut cosinus arcus PP' ad radium, adeoque æqualis longitudini, si tubus collocetur in directione axis æquatoris, quo tempore locus visus describit circulum, in aliis tubi positionibus minor: sed quotidie in intervallo horarum 12 ab hora sexta post conjunctionem diurnam ejus puncti eclipticæ cum positione axis tubi ad horam decimam octavam, & viceversa, habebitur tota longitudo, adeoque motus decem secundorum, vel ad minimum novem, utique admodum sensibilis.

100. Ita habentur omnia, quæ pertinent ad hunc motum loci apparentis evoluta, & singillatim exposita. Adhibuimus hic etiam ideam instrumenti habentis dioptras, quæ est simplicior: sed ut fiat sensibilis motus tam exiguus, oportet omnino adhibere telescopium, quod habeat augmentum satis magnum. Major apertura objectivi etiam adjuvabit visionem ob majorem copiam radiorum collectorum in foco. Pro objecto terrestri potest adhiberi circellus albus in superficie nigra, qui illuminari etiam potest per radios reflexos a speculo concavo superficiei satis magnæ, vel a lente ingenti, uti fit ad reddenda magis clara objecta videnda trans microscopium. Id objectum poterit utique videri trans octo pedes aquæ puræ, multo autem melius trans tres, vel quatuor telescopii acromatici, quorum habentur ea, quæ ferant aperturam totidem linearum, quot pollicum est focus, & augmentum admodum ingens, quod adhuc reddat conspicua secunda, & vero etiam fractiones secundorum. Si quis velit vim luminis majorem, potest adhibere tabellam tenuem habentem foramen exiguum illuminatum a flamma ardente prope ipsum in aere inflammabili, & per multas alias methodos potest augeri vis luminis in objecto. Si id sit superficies quæpiam plana bene illuminata; poterunt ipsi applicari bina fila nigra se intersecantia ad angulos rectos. Patet autem, nec esse necessaria duo telescopia, alterum formæ usitatæ, alterum novæ hic expositæ. Hoc secundum rem perficiet

per

per sese. Cum possit seligi objectum parum remotum; in tam exiguo intervallo timeri non potest variatio refractionis. Et quidem potest adhiberi objectum satis proximum, ut etiam tantummodo vicecuplo remotius longitudine tubi. Proximitas objecti amandabit focum ad distantiam paullo majorem: verum longitudo aucta non solum non nocet, sed potius prodest, ob incrementum imaginis efformandæ in foco. Facile obtinetur forma lentis vitreæ, quæ habeat distantiam focalem idoneam longitudini tubi, quam sibi quis proposuerit: sed hæc potest variari sine detrimento, adhibitis etiam variis ocularibus ad seligendas eas, quæ præbeant satis magnum augmentum conjunctum cum sufficienti claritate, & methodus tubi ferentis objectivum inserti in fig. 6 tubo ferenti laminam vitream, & lentem ocularem adducet semper admodum facile focum objectivi ad laminam vitream supplentem vices micrometri, vel ipsi adhærentem. In exiguo intervallo non poterit, uti diximus, timeri refractio, & multo minus ejus variatio. Adhuc tamen ad majorem præcautionem potest collocari prope hoc telescopium aqueum aliud aereum directum in idem objectum, quod cum non habeat, ut vidimus, ullam aberrationem ortam ex hoc capite, deprehendet omnes mutationes, si quæ accidant radio in transitu ab objecto ad telescopium, quæ erunt communes utrique telescopio, & excessus motuum apparentium exhibitorum ab hoc telescopii genere supra omnes illos exhibitos ab illo altero, erit is, qui debebit tribui aberrationi ortæ a comparatione celeritatis luminis cum celeritate terræ. Inter motus apparentes, qui induci possunt in objectum sive cæleste, sive terrestre observatum, habentur etiam ii, qui possunt induci a motu aliquo murorum domus ipsius, in qua fit observatio, & cujus pavimento, vel parieti affigitur telescopium hoc novum, sæpe enim inducuntur ii motus ab ipso discrimine caloris. Telescopium commune applicatum prope hoc novum ostendet hos itidem motus, qui erunt communes utrique telescopio, ut ratio eorum haberi possit.

101. Illud autem accidit commodissimum, quod nullo sectore est opus pro determinanda quantitate motus loci apparentis, præter telescopium hujus generis, quod habeat micrometrum internum.

num. Id efformari potest per laminam vitream ferentem duas rectas lineas se decussantes ad angulos rectos: potest ea lamina ita aptari thecæ cuipiam, ut ope binarum cochlearum cum suis indicibus notantibus partes revolutionis cujusvis, possit habere duos motus sibi invicem perpendiculares, per quos adducatur ipsa intersectio ad punctum objecti, determinato ab iis singulis motu secundum singulas ex iis binis directionibus: potest autem ita comparari theca, ut excursus laminæ mobilis bene politæ per crenas itidem bene politas nullum permittat effluxum aquæ. Potest etiam aptari lamina vitrea immobilis, & adhiberi post ipsam micrometrum filare, cujus fila radant secundam superficiem ejusdem laminæ, quæ itidem metientur motum loci apparentis. Illud autem hic accidit iterum perquam commodum, quod objectum respective immotum non effugit celeriter e campo telescopii, ut fixa: variatio fit tam lente, ut observatio fieri possit cum summa attentione, & vero etiam repeti per plures vices, ante quam mutatio adveniat sensibilis. Accedit & illud, quod nihil timendum sit a nubibus, nihil ab aeris intemperie, nec certæ seligendæ sint stellæ. Objecta terrestria ubique prostant in positionibus admodum commodis liberrime seligendis.

102. Omnium aptissima erit collocatio axis telescopii firmiter adnexi forti fulcro metallico in directione proxima ei, quam habet axis æquatoris, cui occurrat aliquod objectum terrestre, quod possit discerni. Nam habebitur quovis intervallo horarum 12 mutatio loci apparentis secundorum 10 in solstitiis, & 9 in æquinoctiis, & quo major est is motus, eo melius discerni poterit, & accuratius determinari.

103. Verum etiam in alia tubi positione quavis haberi possunt tempore solstitiorum secunda 10, & paullo minor summa habebitur etiam quovis alio anni tempore, si observatio instituatur ad intervallum horarum 12 tempore idoneo: positio autem horizontalis est multo commodior: occurrunt in ea facilius objecta idonea, & quæ multo facilius illuminentur. Liquor, qui habeat vim refractivam majorem, si sit bene pellucidus, erit magis idoneus, quia majore excessu velocitatis luminis per ipsum induc-

cet deviationem majorem. Si haberi posset medium pellucidum sive fluidum, sive solidum longitudinis paris longitudini tubi necessariæ ad habendum satis magnum augmentum objecti, habens vim æqualem ei, quam habet adamas; haberetur motus secundorum 24: est enim ratio sinuum in ingressu ex aere in adamantem 5 ad 2, adeoque differentia aberrationum in binis tubis, pro stellis fixis, quæ est eadem, ac aberratio in telescopio novæ hujusce formæ $= \frac{3}{5} \times 20'' = 12''$, quæ duplicata esset $= 24''$: sed non habentur ejusmodi fluida, nec adamantes ejus magnitudinis, qui ne exigui quidem ad eos usus adhiberi possent ob pretium enorme.

104. Aberratio hujus generis, quam exposuimus hic, debet haberi etiam in oculo, per cujus humores utique densiores aere lumen progreditur cum velocitate diversa a præcedenti per aerem, sed in primis ea est ita exigua, ut potissimum oculo inermi percipi omnino non possit: ceterum cum perpetuo defigamus oculos in objecta, quæ habent positiones admodum diversas respectu rectæ parallelæ motui annuo, debent haberi ibi aberrationes admodum diversæ in diversis horis ejusdem diei. Fortasse etiam idcirco sapientissimus naturæ auctor tam immanem lumini celeritatem tribuit, quæ si esset multo minor, confusionem induceret per majorem mutationem perpetuam inductam ab aberratione tanto majore, mutante tam directionem, quam magnitudinem ejusdem aberrationis.

105. Hoc pacto evolvimus, quæcunque pertinent ad hoc argumentum, quod quidem est maximi momenti pro bene noscenda natura, & proprietatibus luminis, ac ipsâ naturâ, & causâ genuinâ aberrationis annuæ fixarum. Deberet sane in Astronomicis speculis inter præcipua instrumenta haberi etiam telescopium hujus generis, cui aqua infundi possit, vel applicatum sectori ad eas observationes destinato una cum telescopio aereo habente satis magnum augmentum, vel saltem solitarium, & armatum micrometro, cujus ope directi ad solum etiam unicum terrestre objectum haberetur mensura quotidiana discriminis, quod habetur in velocitate particularum luminis progredientis per media admodum diversa.

OPU-

OPUSCULUM IV.

De novo genere micrometri objectivi.

1. MICROMETRUM appellatur ab Astronomis instrumentum, quod exhibet mensuram accuratam exiguarum distantiarum, & magnitudinum observatarum per telescopia. Diu nullum aliud fuit in usu, nisi internum illud, quod applicatur in foco objectivi, ubi efformatur imago objecti, qui locus est satis proximus lenti oculari. Constat variis tenuibus filis, quæ disponuntur variis modis: alia sunt ibi fixa, & vel disposita in modum reticuli cujusdam divisi in numerum ingentem exiguorum quadratulorum, vel se decussantia ad angulos semirectos in axe tubi, nimirum in centro campi apparentis, vel disposita in formam rhombi cujusdam, pro quo etiam filis substituuntur lamellæ metallicæ, ac de eo micrometrico rhombo aget unum ex Opusculis pertinentibus ad Astronomiam in quarto ex hisce quinque Tomis: alia ex hisce micrometris fixis habent unum filum fixum transiens per centrum campi ipsius, cum altero, vel aliis pluribus inter se parallelis, & perpendicularibus illi priori, cum uno itidem perpendiculari eidem illi primo, sed mobili passu lento ope cochleæ, cujus integræ revolutiones ipsum promovent per spatiola exigua æqualia latitudinibus singularum spirarum, & partes singularum revolutionum notatæ ab indice in circumferentia circuli divisa in particulas plurimas exhibent subdivisiones spatiolorum eorundem ingenti numero.

2. Sero, me jam Professore Matheseos, & exercente Astronomiam, ex illo, quod ejus inventor Bouguerius appellavit heliometrum, duxit ortum aliud micrometri genus, quod appellatur micrometrum objectivum. Id constat binis partibus lentis habentis distantiam focalem ingentem, quæ adhiberi posset pro objectivo telescopii dioptrici admodum longi. Secatur autem ea lens

in duas partes æquales sectione transeunte per ejus centrum : ita vero aptata sunt ea duo dimidia ejus lentis ita sectæ instrumento ad id idoneo, ut possint promoveri secundum longitudinem sectionis, & remanentibus singulorum semicirculorum partibus in directum, bina centra tam adduci ad congruentiam, quam removeri a se invicem magis, vel minus. Radii digressi e quovis unico objecti puncto, & transeuntes primum per utrumvis ex iis semicirculis, tum per objectivum telescopii, habent suum focum: ii duo foci in casu congruentiæ centrorum coeunt simul, sed in distantia quavis alterius centri ab altero distant a se invicem in directione eadem, in qua jacent eadem centra, plus, vel minus pro majore, vel minore distantia centrorum eorundem. Fiunt eo pacto binæ imagines ejusdem objecti, quarum altera distat ab altera magis, vel minus, prout evadit major, vel minor distantia centrorum eorundem a se invicem: eæ duæ imagines congruunt accurate, ubi motus instrumenti adducit centra eorundem semicirculorum ad se invicem. Recedentibus a se invicem his, recedit imago altera ab altera, & recessus imaginum determinatur ab illo recessu centrorum, cui est proportionalis. Centrorum distantiam ostendunt divisiones insculptæ laminis connexis cum semicirculis ipsis, ex quibus innotescit, quanta sit angularis distantia optica, quam habet imago altera ab altera, pro quavis illarum regularum positione, & quidem in particulis angularibus perquam exiguis.

3. Plurimi sunt egregii usus ejus instrumenti in Astronomia: en duos præcipuos. Adductâ prima imagine cujuspiam stellæ fixæ ad congruentiam cum imagine secunda cujuspiam planetæ existentis simul cum ipsa in eodem telescopii campo, innotescit e divisionibus instrumenti ipsius, quot minutis, aut secundis idem planeta distet ab ea fixa. Cum imago circularis prima solis, vel lunæ est in contactu apparenti cum imagine secunda, innotescit magnitudo ejus diametri apparentis, quia ea debet esse æqualis recessui primi limbi primæ imaginis a primo secundæ congruente cum illius limbo secundo. Dicitur autem id micrometrum objectivum, quia in telescopiis dioptricis collocatur ante objectivum prope ipsum.

psum. Aptatur etiam telescopiis catoptricis, & quidem ante inventionem dioptricorum acromaticorum, quæ cum brevi tubo habent itidem ingens augmentum, ut catoptrica, aptabatur solis catoptricis in summo tubo remoto a speculo majore gerente vices objectivi dioptricorum: sed cum constet objectivo vitreo longioris foci secto bifariam, & in ipsum incidant radii, ante quam adveniant ad speculum ipsum gerens vices objectivi dioptricorum, dum micrometra filaria apponuntur in loco imaginis efformatæ ab objectivo ipso prope lentem ocularem, jam ab initio nomen micrometri objectivi adeptum est.

4. Tota vis ejus instrumenti, & commoditas pro usu pendet ab ortu binarum imaginum ejusdem objecti, quarum altera possit removeri ab altera, quantum libeat observatori, & in quacumque directione sit opus, atque id ita, ut exigua distantiarum apparentium mutatio respondeat satis magno motui linearum insculptarum in instrumento, cui id adnectitur, indicantium eas mutationes exiguas. Anno 1777 Rochonus Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis socius excogitavit aliud genus instrumenti præstantis eundem effectum binarum imaginum, quæ possint removeri a se invicem, vel admoveri, cum satis magna eorum motuum scala. Notum erat Physicis, crystallum montanam habere binas refractiones: eæ, detortis per prisma radiis solis, exhibent binas ejus imagines, nimirum bina colorata spectra, quæ pro quovis individuo prismate distant a se invicem ad angulum habentem certum numerum graduum, dum vitra, saltem fere omnia, unicam habent refractionem cum unica imagine efformata per radios trans ipsorum prismata traductos. Rochonus ea proprietate usus est admodum ingeniose ad habendum eundem effectum binarum imaginum, quæ a se invicem removeri possint, & admoveri cum scala satis magna pro exiguis distantiæ mutationibus.

5. Ex ea materia confecit bina, quæ appellari possunt, prismata circularia, licet ejusmodi figuram veteres Geometræ appellarint ungulam: basim alteram habent circularem planam, cui altera respondet plana itidem, sed ad ipsam inclinata in angulo exiguo. Cum illa superficierum inclinatio mutua eundem effectum

præ-

præstet, quem prisma habens facies binas in eodem angulo ad se invicem inclinatas, & sint tanquam quoddam prisma ita abrasum, ut una ex iis binis faciebus evadat circularis; non immerito prismatis circularis nomen habere possunt. Sic ob similem rationem in Tomo primo appellavi prisma variabile illud meum compositum e binis frustis, altero plano-convexo, altero plano-concavo, aptatis instrumento descripto in Opusculo I. Cum alterum ex iis prismatis circularibus alteri imponitur ita, ut limbus alterius maxime crassus respondeat limbo alterius maxime tenui; si angulus inclinationis planorum in utroque prismate sit idem; binæ superficies externæ remanent parallelæ ita, ut nullus ibi habeatur prismaticus angulus, sed radii libere transire possint sine ulla refractione. Verum altero prismate gyrante circa alterum immotum, enascitur superficierum oppositarum inclinatio exhibens angulum, qui evadit duplus anguli singulorum, ubi post dimidiam conversionem limbus maxime tenuis appellit ad locum maxime crassi. Enascuntur duplæ singulorum imagines, quæ duplicatio non corrigitur, ut in præcedenti positione: eæ recedunt a se invicem magis, vel minus, prout in ea conversione inclinatio oppositarum superficierum planarum crescit magis, vel minus usque ad maximam inclinationem illam, quæ habetur post conversionem dimidiam. Divisiones motus circularis frusti mobilis, qui determinat magnitudinem anguli prismatis compositi, exhibent mensuram distantiæ imaginum, quæ pro re astronomica habere potest usum eundem, quem habet dupla imago ejus alterius micrometri objectivi.

6. Nunciatum mihi fuit, adhibitam esse a Rochono duplam refractionem crystalli montanæ ad usum micrometri objectivi per motum circularem duplicis prismatis ex ea materia: perspexi statim, res enim erat prona post auditum consilium, quod Rochono feliciter sane in mentem venerat, adhibendi id prismatis genus ex ea materia, cum eo circulari motu, theoriam omnem, & effectum, qui inde oriri deberet, & exposui illi ipsi, qui mihi id compertum nunciaverat: adjeci, multo meliorem fore applicationem unici prismatis ejus naturæ collocati intra tubum, quod

posset

posset moveri per totam ipsius longitudinem, & radiis per duplicem refractionem detortis ad efformandam duplicem imaginem, discedente axe radiorum egressorum ex eodem objecti puncto per duas rectas ad se invicem inclinatas in angulo dato: eo motu fieri debere, ut pro diversa distantia ejus prismatis, in quo habetur caput anguli earum rectarum, a foco objectivi, in quo pinguntur imagines, hæ discedant a se invicem magis, vel minus auctâ, vel imminutâ distantiâ laterum anguli ejusdem a se invicem pro diversa eorum longitudine: eo pacto haberi scalam multo majorem, nimirum totam tubi longitudinem pro exiguo illo angulo divergentiæ a prismate binarum rectarum, per quas axis radiorum detorquetur ad efformandam duplicem imaginem. Accedebat illud, quod per unicum prisma non habetur nisi duplex imago, dum singula e binis prismatis binas progignunt. Simul ipsi communicavi methodum aliam a me excogitatam obtinendi eundem effectum duplicis imaginis per prismata e vitro communi, quod erit totum hujus Opusculi argumentum.

7. Paucis diebus post ejusmodi colloquium idem ad me retulit, nunciatum sibi ab amico & suo, & Rochoni, tanquam ingens novum compertum ipsius, illum eundem motum rectilineum prismatis per longitudinem tubi, quod Academiæ communicaturus esset in primo proximo consessu. Interrogavi, an amico suo dixisset, se idem additamentum præclari ejus comperti a me audivisse: retulit, id quidem noluisse, ne videretur velle favere mihi plus æquo, & ob amicitiam attribuere mihi potius, quam Rochono ejusmodi inventum.

8. Suspicabar ego quidem, consilium additionis illius ab ipso per amicum communem ipsius, & Rochoni ad hunc delatum fuisse: erat, cur saltem crederem omnino, idem consilium prius mihi, quam Rochono ipsi venisse in mentem. Adhuc tamen, omisso eo, quod ad me pertinere posset de ejusmodi additamento circa usum prismatis e crystallo montana (quæcumque jam tum per tot annos impresseram, quæ hisce quinque voluminibus continentur, habeo autem alia plura adhuc edenda in alia collectione, quæ non pertinent ad Astronomiam & Opticam, quas solas hic amplector, satis

tis ostendunt, an ego indigeam exiguo hoc additamento ad augendum mearum meditationum catalogum) reservandum mihi censui tantummodo aliud illud genus micrometri objectivi, quod crystallo montana non indigeret, & brevi schediasmate indicavi tantummodo ejus naturam. Cum autem censerem, posse methodum eandem transferri etiam ad mensuram angulorum multo majorum, id ipsum adjeci cum titulo megametri ab iisdem principiis deducendi. Censui, posse eorum instrumentorum ope institui etiam observationes, quæ prosint determinationi accuratiori & latitudinis, & longitudinis geographicæ etiam in mari. Quamobrem id ipsum schediasma misi ad Regium Rei Maritimæ tum Administrum de Sartine: nam per Regium diploma habeo titulum Directoris Opticæ pro ipsa Regia Re Maritima, cum annuo reditu non mediocri attributo, in quo diplomate illud mihi injungitur, ut in primis ad eam Mathematicarum disciplinarum partem animum adjungam, & nominatim ad perficiendam theoriam telescopiorum acromaticorum, quibus ipsa Res Maritima indiget pro suis observatoriis, & navibus. Ut meo muneri facerem satis, jam ea, quæ in hisce primis horum Operum Tomis continentur pertinentia ad theoriam telescopiorum acromaticorum, paraveram, ut etiam plura alia ex iis, quæ habentur in hoc secundo Tomo pertinentia ad Opticam. Cum ad eam pertineret hoc etiam argumentum, & Rei Maritimæ, cui eram addictus, prodesse posset; censui, offerendum esse ante omnes alios id compertum ei Administro Regio, ad quem idcirco direxi schediasma ipsum, & eidem obtuli.

9. Transmisi idem schediasma ad Scheperdum Regiæ Londinensis Societatis socium, ac Regium Cantabrigiensem eo tempore Astronomum, mihi amicissimum, qui ipsum in ejus Academiæ congressu legit anglice redditum, & tradidit Magistratui, qui procurandis iis, quæ pertinent ad determinationem longitudinis geographicæ, est institutus in Anglia (*bureau des longitudes*), ac ad plures amicos transmisi inserendum in litterariis diariis, quos inter ad celeberrimum Regiæ Parisiensis Academiæ Astronomum La-Landium mihi amicissimum. A Regio Versaliensi Administro

ſtro honestissimum accepi responsum, humanissimas Londino litteras cum gratiarum actione, & ab ipsa Londinensi Societate, cujus & ipse sum socius, idem schediasma typis destinatum fuit inter publica ejus Academiæ monumenta imprimendum. Exitus Parisiis fuit admodum diversus. La-Landius ipsum in hebdomadario Academiæ consessu legit: clamores illico enormes excitati me accusantium, ut plagiarium, qui Rochoni comperta sibi tribueret: commissarii destinati ad inquirendum in id suppositum crimen meum, & me plagii damnandum. Quæ in illis tumultibus dicta, acta, tentata tum fuerint, malo hìc ego silentio prætetire. Quanquam multa sane habeo, quæ proferre possem, & quæ meæ consulerent, sed nonnullorum aliorum famæ plurimum obessent.

10. Ego quidem non solum nihil mihi tribueram, quod meum non esset, sed etiam plus æquo ob quietis & pacis amorem de meo jure remiseram: nec vero ea nunc hìc persequerer, nisi post eadem sine ulla ejusmodi altercationum suspicione tam publice in tot locis proposita acerrimam contra omne fas aggressionem perpessus essem. Duo sunt, de quibus agebatur: primum de additione illa ad primam Rochoni ideam de micrometro objectivo efformando per motum circularem binorum prismatum e crystallo montana mutatum in motum rectilineum unici prismatis intra tubum, quod id instrumentum reddebat multo perfectius: secundum autem de alio micrometri objectivi genere efformando per prismata e vitro simplici communi.

11. Quod pertinet ad primum caput, habebam ego quidem jam tum satis firmo innixam fundamento suspicionem de eo, quod, ut superius innui, id ipsi Rochono significatum fuisset ejus additamenti consilium a me amici sul amico communicatum: adhuc tamen in eo schediasmate affirmabam diserte, ut patebit hìc paullo inferius, ubi id ipsum proferam, id inventum ipsi deberi, qui, nullâ habitâ mearum ea de re meditationum notitiâ, id invenerit vel eodem tempore, vel fortasse etiam ante, primus autem id publice proposuerit in Academiæ consessu, primus instrumentum ipsum perficiendum curaverit, ac ejus ope observationes

etiam instituerit primus. Quamobrem profitebar diserte, me mihi nihil de eo comperto tribuere, ipsi uni Astronomiam debere instrumentum sane præclarum. Quid ulterius præstari poterat, ad præripiendam occasionem omnem ejusmodi altercationibus, & literariis rixis, quas odi semper, & quantum per me fieri potuit, præverti, vel suffocavi?

12. Agebatur secundo loco de illo alio micrometri, & megametri genere, quod perfici poterat per prismata vitrea sine crystallo montana, quæ rarior est, & rarissime excindi possunt ejus laminæ ampliores ita puræ, ut ad opticos telescopiorum usus adhiberi possint: sunt autem multo duriores, ut idcirco difficilius ad debitam formam reducantur, & multo majore pretio constant Rei summa ad id reducitur, ut fiant e vitro communi duo circularia prismata diametri minoris diametro aperturæ objectivi, quæ sibi invicem superposita unicum efficiant prisma habens angulum variabilem per motum circularem methodo superius expositâ, sed applicata superficiei ipsius non tegant, nisi ejus dimidium. Radii, qui transeunt per ejus partem liberam, debent efformare unam objecti imaginem in illo eodem loco, in quo ea efformaretur a toto objectivo detecto: aliam efformare debent radii incidentes in prisma, & ab eo detorti, ante quam incidant in partem objectivi residuam ab ipso contectam. Variatio anguli prismatis compositi mutationem inducit in distantiam imaginum earundem. Quo autem pacto applicari debeant ea prismata, & moveri, id vero patebit in dissertatione, quam post illud ipsum schediasma hìc adnectam.

13. Hoc ego quidem inventum mihi tribuebam, sed nihil de eo habebatur in iis, quæ tum Rochonus Academiæ obtulerat: in omnibus ejus schediasmatis, quæ protulit alia post alia, non agebatur, nisi de prismatis e crystallo montana habente in angulis prismaticis fere utcunque exsectis duplicem refractionem per se ipsam (habetur positio facierum, utut in ingenti etiam angulo ad se invicem inclinatarum, quæ unicam exhibeat). Significatum mihi fuerat, posse haberi aliquid eo in genere in alio opere Optico, quod is ante aliquot annos vulgaverat: ejus exemplar mihi

hi oblatum fuit, in quo itidem nihil inveni, quod meo illi consilio esset ne analogum quidem. Quamobrem illi clamores omnes nulli fundamento innitebantur.

14. Aliquanto post exposui omnem hujusce micrometri theoriam in Opusculo, quod indicaveram me scripturum ea de re, cum per tempus liceret, & pluribus amicis ostendi: unum ejus exemplar manuscriptum tradidi Vilnensi Astronomo Parisios advecto, qui ipsum in Poloniam transtulit: ignoro, an alicubi sit editum. In una e Londinensibus litteris vidi, schediasma illud meum in Philosophicis Transactionibus prodiisse; sed Maskelynium celeberrimum Greenvicensem Astronomum reclamare compertum idem, ignoro, an illud Rochoni e crystallo montana, an meum e vitro simplici, ut multo ante ab ipso compertum, quamvis non typis editum, ac ea de re ipsius Opusculum etiam in Anglicanis Transactionibus ab ipso editum: sed dum hæc scriberem ne illud quidem Transactionum volumen vidi, in quo meum schediasma insertum est. Dum jam horum meorum voluminum urget impressio, audio, prodiisse Rochoni opus, in quo is & meum schediasma impresserit, ut Maskelynii Opusculum; sed id prodiit Parisiis multo post meum discessum inde ad hæc imprimenda Bassani, quo nullum ejus exemplar advectum est. Hinc prorsus ignoro, quid Maskelynius, quid Rochonus scripserit ad totam hanc controversiam pertinens. Nec vero quidquam ad bonum publicum, quod ego unice respicio, conferre potest controversia de rei inventore: potest res ipsa plurimum. Idcirco ego hic illi meo schediasmati adjungam illud meum Opusculum, quo & theoria continetur ejus prismatis duplicis, & forma instrumenti, quæ mihi commodissima est visa, utramque Gallico idiomate, uti jam tum conscriptum fuit in Gallia, paucis admodum ad uberiorem perspicuitatem mutatis. Si quid occurrat in iis, quæ Maskelynius, ac Rochonus protulerunt, nondum mihi nota, quod explicationem ulteriorem requirat, eam alibi, ubi ea ad me pervenerint, evolvam: a puris recriminationibus, quæ me solum respiciant, abstinebo meo more.

MÉMOIRE

Sur un nouveau micromètre & mégamètre présenté à M. de Sartine Ministre de la Marine le 7 Mai 1777

PAR L'ABBÉ BOSCOVICH DIRECTEUR D'OPTIQUE POUR LA MARINE.

15. QUAND j'ai su que M. l'abbé Rochon avoit fait voir une espèce de micromètre, qui par le moyen d'un prisme de cristal de roche à angles variables donnoit deux images du même objet, & en changeoit les distances par un mouvement circulaire d'une des deux parties qui le composoient, je dis à quelqu'un de mes amis, & entre autres au célèbre M. l'abbé Fontana, que je voyois bien comment cela se faisoit, mais qu'il y auroit beaucoup plus à gagner, si l'on rendoit variable la distance du prisme au foyer de la lunette. J'ai ajouté que l'on pouvoit avoir le même effet sans la double réfraction du cristal de roche, en faisant un prisme à verre simple, mais plus petit que l'ouverture de l'objectif. Les rayons qui passent par le prisme formeront une image déplacée de la position naturelle, & les autres, qui passeront dehors, donneront l'autre image à la même place qu'elle auroit, si ce prisme n'y étoit pas.

16. Quelques jours après on a annoncé à M. Fontana que M. l'abbé Rochon avoit imaginé un autre micromètre à prisme de cristal de roche, qui s'approchant plus ou moins du foyer de l'objectif, avoit l'avantage de produire un effet très-grand, & de pouvoir être acromatique; qu'ayant fait exécuter son instrument, & fait avec lui plusieurs observations il avoit préparé un mémoire sur cet objet pour lire à la prochaine séance de l'Académie. M. l'abbé Fontana eut la bonté de m'en avertir immédiatement; ce fut pour lors, que je lui répétai ce, que j'avois eu l'honneur de lui dire la première fois sur l'effet de ce micromètre, en y ajoutant la mesure précise de l'échelle pour la mesu-

mesure du même effet, & la facilité d'obtenir la même chose sans le cristal de roche avec d'autres avantages que l'on pouvoit tirer des prismes à verre simple ne couvrant pas toute l'ouverture de l'objectif, & entre autres celui de pouvoir mesurer par ce moyen des angles beaucoup plus grands que par la double réfraction du cristal de roche.

17. M. l'abbé Rochon a réellement lu à l'Académie son mémoire, & on en a fait mention dans les gazettes : ainsi il a le mérite d'avoir imaginé la même chose dans le même tems, & peut-être avant moi, & absolument sans avoir aucune connoissance de mes idées, sur le même objet, de l'avoir annoncé le premier au public, de l'avoir exécuté, & de s'en être servi le premier : ainsi je n'ai rien à prétendre de ce côté-là : il a le mérite d'une belle découverte, & l'Astronomie lui en aura toute l'obligation.

18. Mais M. l'abbé Rochon n'a employé pour son micromètre que la double réfraction du cristal de roche, & on m'a assuré qu'il a dit que son prisme ne pouvoit lui donner, que jusqu'à six minutes. On sait bien que les pièces assez grandes de cette matière, & assez pures sont très-rares, outre la difficulté de la travailler, étant plus dure que le verre, & quelle attention il faut avoir pour la bien couper afin d'avoir la différence des deux réfractions que l'on veut. Ainsi je crois rendre un service encore plus considérable, en proposant cette autre espèce de micromètre à verre simple en développant sa théorie, & en l'étendant aux angles beaucoup plus grands, ce qui donne le moyen de l'appliquer aussi aux instrumens d'optique que la marine doit employer pour observer les latitudes & les longitudes géographiques. J'avois déjà fait faire un prisme de cette espèce, en faisant voir au même abbé Fontana son effet pour la double image du soleil sur son excellente petite lunette acromatique : on avoit les deux images, en l'appliquant à la main sur l'objectif, de manière qu'il n'en couvroit que la moitié. En le poussant plus ou moins avant, on changeoit la vivacité de la lumière des deux images, où l'on voyoit qu'on pouvoit les réduire à une clarté

égale :

égale : en variant l'inclinaison de cette pièce on varioit la distance des deux images qui n'avoit aucune variation, en changeant hors de la lunette sa distance à l'objectif. Cette pièce étoit un seul prisme simple qui donnoit une réfraction un peu plus grande que le diamètre apparent du soleil. J'y ai fait ajouter après un autre semblable & égal, l'un & l'autre ayant les bases circulaires : en tournant sur son axe l'une des deux parties, on varie l'angle depuis zero jusqu'au double de chacun en particulier, ce qui fait approcher & éloigner les deux images entre elles : on obtient une variation beaucoup plus lente par l'éloignement plus grand ou plus petit du prisme à l'objectif ; mais il y a une raison particulière pour laquelle on ne peut pas lui en donner un trop grand ; car le rétrécissement du pinceau des rayons appartenants à chaque point de l'objet ne permet pas de l'en éloigner trop, ce que affoibliroit trop l'image directe vers le milieu du champ, en interceptant une trop grande partie du même pinceau, & à la fin la feroit perdre totalement.

19. Je fais faire actuellement une machine grossière dans laquelle on peut tourner une des deux pièces à la main sur son axe, pour réduire la distance des deux images un peu plus grande que celle que l'on veut mesurer comme du diamètre du soleil, & à l'aide d'une vis de rappel on peut éloigner le prisme ainsi composé de l'objectif par un mouvement semblable à celui du petit miroir des télescopes. Je l'ai fait adapter à une lunette ordinaire de quatre pieds, où son effet pour le diamètre du soleil doit être de beaucoup plus d'un pouce de mouvement par minute, & pour les autres planètes on peut avoir 10 ou 15 lignes par seconde, & plus encore. Généralement l'échelle est toute la longueur de la lunette pour la réfraction totale du prisme, ce qui est le même pour la différence des deux réfractions dans le prisme de M. l'abbé Rochon. Mais on peut varier l'angle en appliquant le prisme hors de la lunette à côté de l'objectif, & faisant tourner une des deux parties sur son axe. Alors l'échelle de l'excès que la somme des réfractions des deux parties

ties du prisme a sur la différence n' aura pour la longueur que la demi-circonférence d'un cercle, quoiqu'on puisse faire ce cercle aussi grand que l' on veut : mais la différence de la distance des images ne sera pas proportionelle à la différence des arcs parcourus par l' index. Pour déterminer la rélation du mouvement de l'index avec la variation de la distance des deux images, il faut résoudre un problême de géométrie, & j'en ai la solution bien simple par la trigonométrie sphérique : mais il vaudra toujours beaucoup mieux déterminer ce rapport par une observation actuelle terrestre d'une règle divisée, & observée à une distance donnée.

20. Quand il s'agit d'un grand angle, on auroit des couleurs qui déformeroient beaucoup une des deux images de l' objet, c' est-à-dire celle qui est donnée par les rayons passés au travers du prisme : on les évite aisément, au moins en grande partie, en composant chaque prisme de deux pièces une de verre commun, & l'autre de flint-glass. On peut multiplier les prismes composés acromatiques & à angles variables, en faisant que l'un donne les degrés de 5 en 5, ou de deux en deux, & l'autre les minutes. On peut en mettre deux dehors près de l'objectif, qui changeront la distance des images par le mouvement circulaire, & donneront l' angle cherché un peu plus grand que le véritable, & un autre dedans qui donnera avec toute la précision possible les secondes. J'ai déjà imaginé les instrumens nécessaires pour avoir avec exactitude tous ces objets, comme aussi pour l'application d'un prisme variable à l' octant de marine ordinaire, ayant aussi la solution des problêmes nécessaires. Tout cela sera l' objet d' un ouvrage que je prépare sur cette matière. En attendant je publierai dans les différents journaux ce prospectus pour donner plus tôt à tout le monde le moyen d' imaginer sur la forme mécanique des instrumens quelque chose de mieux que ce qui m' est venu dans l'esprit sur ce sujet nouveau, & bien intéressant.

MÉ-

MEMOIRE

Sur le micromètre & mégamètre objectif à prisme de verre simple

PAR M. L'ABBÉ BOSCOVICH.

21. L'ANNÉE dernière 1777 j'ai eu l'honneur de présenter au Ministre de la Marine un mémoire sur une nouvelle espèce de micromètre & mégamètre objectif, qui doit paroître dans les transactions philosophiques de cette année & qui a été imprimé dans quelques journaux. J'y parlois de l'idée que M. l'abbé Rochon avoit eu d'employer à cet effet la double réfraction du cristal de roche par un mouvement circulaire de deux prismes de cette espèce : j'y contois que j'avois fait voir à M. l'abbé Fontana, combien il y auroit plus d'avantage à employer un seul prisme de cette matière, en y donnant un mouvement rectiligne dans l'intérieur du tube le long de son axe : que quelque tems après le même abbé Fontana m'avoit dit qu'on venoit de lui annoncer comme une nouvelle intéressante, que M. l'abbé Rochon avoit exécuté la même idée du mouvement rectiligne, & qu'il alloit en donner tout de suite un mémoire à la prochaine séance de l'Académie. Quoique j'eusse déjà quelque soupçon que mon idée étoit passée par les amis de M. l'abbé Fontana à M. l'abbé Rochon, néanmoins j'avois mis dans mon mémoire en parlant de celui-ci, *ainsi il a le mérite d'avoir imaginé la même chose dans le même tems, & peut-être avant moi*. J'y avois dit de plus, *qu'il avoit le mérite de l'avoir exécuté, & de l'avoir publié le premier, & sans aucune communication de mes idées : que l'Astronomie lui en avoit toute l'obligation : que je n'y prétendois rien*. J'y ajoutois seulement que lui avoit employé à cet usage le cristal de roche, & que je trouvois qu'on pouvoit obtenir le même effet par le moyen du simple verre, en employant des prismes qui couvriroient une partie de l'objectif, en en laissant découverte une autre ; puisqu'

on

on y auroit aussi deux images de l'objet, une formée par les rayons qui passeroient hors de ces prismes, & l'autre par les rayons détournés par leur angle, & on en varieroit la distance ou par le mouvement circulaire d'un des deux prismes sur l'autre, ou par le mouvement intérieur rectiligne d'un seul prisme.

22. M. de la Lande ayant lu mon mémoire à l'Académie des Sciences, on y a excité une espèce de tumulte avec des grandes contestations, comme si j'avois voulu ravir à M. l'abbé Rochon la gloire de son invention. Après l'examen de tout ce que M. l'abbé Rochon avoit donné à l'Académie en différens tems, de plusieurs lettres & billets que je conserve, & de toutes les circonstances de cette affaire, je suis bien persuadé, que lui n'avoit pas eu la moindre idée d'employer le verre simple, en couvrant seulement une partie de l'objectif par une espèce de prisme, ce que j'avois imaginé sans profiter en rien de ses découvertes, & qui par plusieurs raisons est plus avantageux; que pour le mouvement rectiligne dans l'intérieur du tube, j'avois parlé avec trop de réserve en disant qu'il avoit imaginé *peut-être avant moi*, *& sans aucune communication de mes idées*, puisque j'avois alors, & j'ai eu beaucoup plus après, tout le fondament de croire, qu'il a trouvé cela postérieurement, avec des raisons pour soupçonner, que mon idée lui a été communiquée par M. l'abbé Fontana, ou par ses amis. Pourtant je ne forme aucune prétension sur cet objet n'ayant aucune preuve positive & assez authentique de ces deux articles. Je conte seulement les choses, comme je crois qu'elles se sont passées: on croira ce que l'on voudra: il me semble bien évident que tout le bruit excité à cette occasion-là a été très-déplacé; puisque j'avois parlé dans ce mémoire avec une réserve & un ménagement plutôt excessif.

23. Mais beaucoup moins il y a des raisons pour suivre cette contestation à présent, que M. Maskelyne, comme on m'a fait voir dans une lettre de Londres, a annoncé à la Société Royale, que déjà lui, & M. Short avoient eu depuis long-tems l'idée de cette espèce de micromètre, & qu'il a fait un ouvrage

sur cela, qui va paroître bientôt. Je ne sais pas encore, si cela se rapporte à l'usage du cristal de roche, ou aussi à l'autre du verre commun couvrant une partie de l'objectif. A' tout événement je suis bien content d'avoir au moins excité de nouveau cette idée qui avoit été négligée, & qui par la facilité de se procurer des prismes de verre simple doit être beaucoup plus utile à l'Astronomie que l'autre du cristal de roche : je ne cherche dans tous mes travaux que l'utilité publique. Le grand nombre d'ouvrages que j'ai publiés, & qui ont été assez généralement bien reçus, me mettra parmi les personnes équitables à l'abri de tout soupçon d'avoir cherché à me parer des découvertes d'autrui. Dans la même vue d'être utile je mettrai ici une figure que j'avois préparée dès ce tems-là pour mettre sous les yeux la nature de ce nouvel instrument, & j'y ajouterai la solution d'un problême que j'ai seulement indiqué dans ce premier mémoire, comme aussi quelque idée que j'ai conçue de la manière d'adapter ces prismes aux lunettes & aux télescopes.

24. La ligne DEF (fig. 1. Tab. VIII) représente l'objectif perpendiculaire à son axe LEH, la ligne GHI perpendiculaire au même axe le lieu de l'image des objets éloignés, H étant le foyer des rayons qui arrivent à l'objectif avec la direction de l'axe LE, & K de ceux qui arrivent avec la direction de la ligne L'EK inclinée au même axe : BAC est la section d'un verre, qui a deux surfaces inclinées l'une sur l'autre, faite perpendiculairement à leur intersection : nous appellerons ce verre *prisme*, quoiqu'on lui donne la base AB circulaire, de manière que sa figure soit de cette espèce que les géomètres ont appellée *ongle*. Cette base circulaire a un diamètre plus petit que l'ouverture DF de l'objectif, & est placée perpendiculairement à l'axe LE. La partie des rayons, qui passera hors du prisme, formera l'image des points L, L' à la même place en H, & K, comme si le prisme n'y étoit pas, quoique moins lumineuse, & les autres, qui passeront au travers du même prisme, détournés vers la partie opposée à l'angle A, iront en faire un autre à côté, qui tombera sur la même ligne GI, si l'angle du prisme n'est

pas

pas trop grand ; & ces images y seront aussi bien distinctes ; parceque les rayons qui arrivent parallèles entre eux à une surface réfringente plane, en sortent aussi parallèles : ainsi après le passage par les deux surfaces du prisme ils arriveront à l'objectif aussi parallèles entre eux, & auront le foyer à la même distance que ceux qui sont passés librement.

25. Il y aura seulement un peu de couleurs, qui seront sensibles, si l'angle du prisme n'est pas bien petit, à cause de la différente réfraction que les différens rayons colorés y auront souffert dans le passage par les deux surfaces : mais on pourra rendre insensibles ces couleurs même dans les angles de plusieurs degrés, & les diminuer beaucoup dans les plus grands, en employant un verre chargé de plomb, comme le flint-glass, avec le verre commun, pour rendre le prisme acromatique de la manière qu'on le fait pour les objectifs des lunettes appellées acromatiques.

26. Il y aura dans le même point H une autre image d'un point d'objet placé hors de l'axe ; parcequ'il y aura des rayons obliques qui en passant par le prisme acquéreront la direction de l'axe. Si les points M, N sont les rencontres du même axe avec les surfaces AB, AC, & que l'on conçoive un rayon qui arrive au prisme par EN, & après deux réfractions en N, & Q, en sorte par QP ; le rayon PQ *vice-versa* après deux réfractions en Q, & N sortira par NE, & tous les autres qui arriveront à la surface BA avec la même direction, en sortiront parallélement au même axe, & iront se réunir au foyer H, en y formant l'image du point éloigné P.

27. Si la ligne PQ prolongée rencontre l'axe en R ; l'angle LRP sera la mesure de la distance optique des deux points éloignés L, P, qui auront les images réunies en H : cet angle dépend de la qualité réfractive du verre, & de la grandeur de l'angle du prisme. On démontre aisément dans la théorie des prismes, que quand les prismes de verre ont des angles de peu de degrés, la réfraction est à peu-près égale à la moitié de chaque angle, & la différence entre les réfractions des rayons extrêmes

 pre-

premier rouge, & dernier violet dans le verre commun à peu-près $\frac{1}{27}$ du total, & dans le flint $\frac{1}{18}$, c'est-à-dire que dans le premier pour chaque degré de réfraction il y a à peu-près deux minutes de séparation des couleurs extrêmes, & dans le second trois, mais dans de différentes espèces de flint il y a de la variété considérable : dans celui qu' on appelle strass, cette différence va jusqu'à 4 minutes par degrés, & dans d' autres verres plus encore chargés de plomb, cela va encore beaucoup plus loin. On a des formules qui expriment la liaison entre l' angle du prisme, la qualité réfractive & dispersive de la substance, l' inclinaison du rayon, en entrant dans la première surface, & la quantité de la réfraction & séparation des couleurs ; mais pour avoir une idée de l'effet des prismes à petits angles, on peut rétenir les valeurs que nous avons données de la réfraction égale à peu-près à la moitié de l' angle & de la séparation de deux minutes par degrés dans le verre commun, de trois dans le flint que l' on tire le plus ordinairement d' Angleterre : & si le rayon au lieu d' arriver perpendiculairement à la première surface, y arrive avec une petite obliquité ; il y a bien peu de variation dans l'une & dans l'autre de ces deux quantités.

28. Ainsi dans tout l'espace de l'image en GI, c' est-à-dire dans tout le champ de la lunette, il y aura la réunion des deux images de deux points d' objets qui sont éloignés entre eux d' un angle visuel égal à peu-près à la moitié de l' angle du prisme, & la séparation des rayons extrêmes, qui fera une augmentation d'une image bien lumineuse, sera dans le verre commun de deux minutes par degré, & de deux secondes par minute de cette distance, & de trois dans le flint. Que si l'on forme un prisme composé de deux, un de verre commun, & l'autre de flint, qui ayent leurs angles dans la proportion de 3 à 2, on corrigera la distraction des couleurs, & on aura la distance visuelle des deux points d'objet réunis égale à peu-près à la sixième partie du premier, quatrième du second, l' angle composé de ces deux contraires réunis étant un tiers de celui-là, & la moitié de celui-ci. Mais on devra déterminer exactement cette distan-

stance par une mesure terrestre, qui donnera l'effet de ce micromètre, comme on le trouve par ce moyen aussi dans les micromètres d'autres espèces.

29. Dans une de mes dissertations sur les nouvelles découvertes de dioptrique imprimées à Vienne en Autriche l'année 1767 j'ai fait voir que par la réunion des deux substances on ne peut réunir que deux seules couleurs, de manière qu'ayant réuni les rayons rouges, & les violets, les rayons verds déborderont, & que pour une réunion de trois il faut employer trois substances, après laquelle réunion le débordement des autres seroit insensible: mais nous n'avons encore, que je sache, des matières propres à donner cette réunion, & laisser assez de réfraction pour rendre toute cette théorie utile dans la pratique à obtenir un plus grand acromatisme des objectifs, & des prismes. Quand on voudra former des prismes à grands angles composés même de deux seules substances capables de réunir deux seules couleurs, & déterminer la quantité de couleurs qui doivent y rester, on a aussi besoin d'une théorie assez compliquée: j'ai déjà développé en partie tout cela, & en partie je le développe actuellement dans des ouvrages à part destinés à la perfection de cette partie de dioptrique, qui est bien intéressante & nouvelle.

30. En attendant pour avoir un assez bon acromatisme dans les petits angles, on peut employer les valeurs que nous avons données ci-dessus, & dans les plus grands il y a un moyen aisé de l'obtenir, si l'on y ajoute un prisme de plus de verre commun. On peut en faire trois à bases circulaires, un de flint, & deux de verre commun, tous les trois à angles à peu-près égaux: en posant un de ces deux sur l'autre, & en le tournant sur son axe, on changera l'angle qui résulte de leur réunion, & en plaçant le premier sur le composé de ces deux ou entre eux, de manière que son angle soit opposé à l'angle formé par les deux autres réunis, on parviendra à trouver par tâtonnement la position dans laquelle l'union des couleurs sera la plus grande possible. Ayant la qualité réfractive & dispersive des deux substances, on peut parvenir par la théorie au même but avec deux

seuls

seuls prismes ; mais par la substitution d' un troisième on peut suppléer à la théorie, en employant la méthode indiquée.

31. Si l'on éloigne le prisme BAC, ou qu' on l' approche, mais toujours au de-là de l' objectif ; on voit bien que l' angle LRP sera toujours le même, & les rayons de la même direction PR arriveront toujours à l'objectif avec la même direction NE : ainsi on aura toujours la réunion en H des deux mêmes points de l' objet L, & P. Le rayon qui sera arrivé par l'axe LM, passera par la première surface sans réfraction en N ; mais en sortant aura une réfraction ENO, qui sera à très-peu-près égale aux deux du rayon PQ, dont la somme est l'angle LRP ; puisqu'un très-petit changement d'inclinaison du prisme à un rayon, qui arrive presque perpendiculairement à sa première surface, ne change pas sensiblement la quantité de la réfraction, surtout quand l'angle du prisme est petit, comme on peut s'en assurer aisément aussi par l'expérience. Si la ligne L'E parallèle à NO rencontre la GI en K, & la seconde surface du prisme en *n*, & que l'on conçoive la droite *lmn* parallèle à LMN ; le rayon qui sera arrivé par cette droite sortira par la *n*E, & ira au point K foyer commun de tous les rayons, qui tombant sur le prisme avec la direction parallèle à l'axe, arriveront à l'objectif parallélement à la droite L'*n*E, & de tous ceux, qui venant avec la direction parallèle à la même ligne, & passant hors du prisme tomberont directement sur l'objectif. Ainsi on aura en K la réunion des images des deux points de l'objet L, & L' éloignés entre eux d'un angle visuel LEL' égal sensiblement à l'angle LRP ; & la distance du prisme au de-là de l'objectif augmentée ou diminuée ne changera pas la réunion de ces deux images, comme aussi n' en changera aucune autre dans tout l'espace GI de tout le champ de la lunette.

32. Mais cela n' arrivera pas de même, quand le prisme sera placé entre l' objectif & son foyer en B'A'C'. Les rayons, qui seront arrivés parallélement à l'axe, & auront passé hors du prisme, iront se réunir de même en H : mais le rayon EM'N' sortant du prisme par la direction N'K' toujours parallèle à la mê-

même ligne EK à cause de la quantité de réfraction toujours constante, ira à un point K' variable de manière que la distance HK' sera proportionelle à la distance N'H du prisme au foyer de l'objectif. Les autres rayons qui appartiennent à un point éloigné placé sur l'axe, & qui sans le prisme auroient eu la réunion en H, iront se réunir en K', où ils formeront la seconde image de ce point. L'inclinaison des deux surfaces du prisme conforme à l'inclinaison des surfaces de l'objectif, qui se trouve à l'extrémité F de son ouverture du côté de l'angle A', & contraire à celle du côté opposé, augmentera un peu la confusion de l'image déjà un peu troublée par l'erreur de la figure sphérique, qui ne peut jamais réunir avec toute l'exactitude dans un seul point tous les rayons partis d'un seul point de l'objet. Cette augmentation doit être considérable, quand l'angle du prisme est assez grand. Dans tous les cas on peut en déterminer exactement la quantité par la théorie : mais l'expérience même fera voir que quand l'angle du prisme est bien petit, cette augmentation de confusion n'est pas considérable. Il n'y a pas cet effet dans les prismes appliquées au de-là de l'objectif en BAC ; & c'est une des raisons pour lesquelles on ne doit pas se servir des grands angles appliqués intérieurement entre l'objectif, & son foyer.

33. Les prismes à petits angles pourront bien être employés intérieurement, & y former un micromètre très-sensible. Toute la longueur de la lunette est l'échelle qui mesure le mouvement de la seconde image formée par le prisme. Quand ce prisme touchera l'objectif en E, la seconde image d'un point L de l'objet détournée par le prisme sera réunie dans un point K' très-près du point K avec la première que nous appellerons directe, d'un autre point qui sera très-peu éloigné du point L', & qui aura la distance visuelle du point L presque égale à l'angle entier HN'K' de la réfraction du prisme. Comme en diminuant la distance du même prisme au foyer de l'objectif, on diminuera l'intervalle entre les deux images du même point en raison de cette distance, on diminuera aussi la distance apparente de ces deux images, & de même celle des deux points de l'objet, qui seront réu-

réunis ensemble dans l'image sur le foyer de l'objectif, sera diminuée dans la même raison.

34. Si l'on a un angle du prisme un peu plus grand que d'un degré, pour avoir la réfraction un peu plus grande que le diamètre apparent du soleil & de la lune, qui vont un peu au delà d'un demi-degré; la lunette étant de trois pieds, on aura presque un pied de mouvement pour une minute de changement de distance dans les deux images, qui donnera $\frac{1}{5}$ de ligne par seconde; mais si l'on employe un angle de deux minutes, qui donne la réfraction d'une minute plus grande que tous les diamètres apparens des autres planètes; on aura un pied pour 20 secondes, qui donne 7 lignes par seconde, & on en auroit 14 dans une lunette de 6 pieds. Un angle plus petit employé pour les planètes qui ont un diamètre apparent plus petit, donneroit un mouvement plus grand en proportion pour chaque seconde.

35. On ne peut pas profiter de cette grande sensibilité de cette espèce de micromètre, si la réfraction totale n'est pas très-peu plus grande que l'angle visuel de deux points de l'objet que l'on veut mesurer, parcequ'on ne peut pas trop éloigner le prisme de l'objectif. Si l'on a un prisme qui donne une réfraction d'une minute, & qu'on veuille mesurer le diamètre apparent de Vénus périgée, qui en est un peu plus petit, en montant ce prisme dans le tube de la lunette, comme on monte le petit miroir dans les télescopes, & en approchant très-près de l'objectif, on verra deux disques apparents de Vénus un peu détachés l'un de l'autre; & en l'éloignant peu-à-peu, on arrivera à l'attouchement des deux images avant d'épuiser tout l'éloignement donné par l'instrument: mais si l'on vouloit mesurer par le même prisme son diamètre quand il est de 40"; il faudroit l'éloigner d'un tiers de toute la longueur du foyer de l'objectif, & cet éloignement devroit être beaucoup plus grand pour les diamètres beaucoup plus petits. Or il y a un inconvénient qui empêche de l'éloigner au de-là de certaine limite. Ce n'est pas la raison, que j'ai indiquée au num. 12. Un angle si petit ne feroit aucune augmentation sensible de confusion. Mais il y en a une autre qui vient

vient de la diminution qu'on auroit de la lumière de la première image, & de l'augmentation de celle de la seconde.

36. Pour avoir une clarté égale des deux images dans le cas, où le prisme est contigu à l'objectif, s'il n'y avoit aucune perte de lumière causée par la rencontre du prisme, il faudroit faire son diamètre au diamètre de l'ouverture de ce même objectif en raison de 1 à $\sqrt{2}$, qui est celle à-peu-près de 10 à 14; parcequ'alors la surface du prisme seroit égale à celle de l'anneau de l'objectif qui reste à découvert, ce qui rendroit la quantité des rayons libres qui forment la première image égale à celle des rayons détournés qui font la seconde : mais comme il y a toujours une partie non indifférente qui se perd par les réflexions dans les surfaces du prisme, par ce qui est dispersé irrégulièrement, par le défaut de transparence qui n'est jamais totale dans aucune substance diaphane, il faut faire ce diamètre encore plus grand, comme en raison de 10 à 12, ou de 5 à 6. Or en éloignant le prisme de l'objectif la raison de la première quantité de lumière à la seconde doit diminuer continuellement, en arrivant à la distance d'un sixième de la longueur totale du foyer de l'objectif, celle-ci s'évanouiroit totalement.

37. Si l'on conçoit la ligne A'B' prolongée jusqu'aux lignes DH, FH en S, V, le pinceau conique des rayons passés par l'objectif qui vont se réunir en H se rétrécit continuellement, & le diamètre de sa section dans le lieu du prisme devient SV qui est plus petit que le diamètre DF en raison de la ligne EH à M'H. Quand EM' sera un sixième de la distance focale EH, cette raison sera de 6 à 5 : ainsi B'A' devenant égale à SV, le prisme interceptera tout-à-fait tous ces rayons, & la première image disparoîtra tout-à-fait, la seconde ayant le double de la clarté primitive. En s'approchant trop de cette limite, il y aura déjà une inégalité de lumière trop grande. Pour conserver une égalité sensible on pourra faire le diamètre A'B' un peu plus petit que de $\frac{5}{6}$ de l'ouverture totale de l'objectif & préparer plusieurs diaphragmes de gros papier que l'on appliquera extérieurement sur le même objectif : des essais qu'on aura faits une fois ser-

 viront

viront pour savoir quel est celui qu' on doit y appliquer pour obtenir une égalité sensible de clarté quand on devra se servir d'une distance que l'on saura sachant à-peu-près la grandeur de l' objet que l'on doit mesurer, ou en prennant cette grandeur avec l'inégalité non encore corrigée.

38. On pourra bien employer cette méthode en éloignant bien peu le prisme de l' objectif, si l'on réduit ce prisme à avoir son angle variable, ce qui est très-aisé de la manière suivante. Au lieu d'un seul prisme on en fera deux à bases circulaires égales, qui auront les angles au moins à-peu-près égaux, chacun à-peu-près de la moitié de l' angle total qu' on vouloit employer, c'est-à-dire chacun d' un angle à-peu-près égal à la plus grande des mesures que l' on veut déterminer. En plaçant les deux prismes l' un sur l' autre de manière que la partie la plus mince de l'un réponde à la plus épaisse de l'autre, on aura l'angle au moins à-peu-près égal à zero : mais en tournant l'un des deux sur son axe, on augmentera l' angle jusqu' à ce qu' il devienne égal à la somme des deux, c'est-à-dire à-peu-près double de celui d' un seul prisme, quand les parties les plus minces se trouveront l'une sur l'autre.

39. On pourra savoir, quel est l' angle du prisme composé, & de quel côté il est tourné par la solution du problême que j'ai indiqué ci-dessus, & que je donnerai plus bas : mais comme dans un cercle si petit on pourroit facilement commettre une erreur considérable, en déterminant cet angle par cette méthode ; on pourra avoir ce que l'on cherche avec la dernière exactitude de la manière suivante. On enfermera les deux prismes dans deux anneaux des figures 2, & 3. Dans le premier il y aura des petits trous coniques creusés dans des parties diamétralement opposées que l' on pourra encore indiquer par des nombres mis à côté : dans l'autre on aura deux pointes de la même épaisseur coniques de même. En faisant entrer les pointes du second adapté à la machine de la lunette dans deux des trous du premier posé par-dessus, on aura une position déterminée de manière que toutes les fois que ces pointes entreront dans les mêmes trous,

trous, on aura toujours la position respective des deux prismes exactement la même. En ôtant l'objectif pour changer la position, & le remettant après on déterminera l'angle de la réfraction qui répond à chacune de ces positions par la mesure terrestre d'une base bien longue & d'une planche, sur laquelle il y aura une échelle à lignes transversales. La réunion des images de deux points de l'échelle faite dans chaque position donnera la valeur de la réfraction qui lui répond, quand l'index extérieur de la machine corrélatif à celui du petit miroir des télescopes sera au zero de sa division. On fera jouer alors la machine qui porte les prismes, & ayant porté le même index à la division la plus éloignée du zéro, on verra dans cette position des prismes le changement arrivé à la distance angulaire des points réunis, c'est-à-dire à l'angle déterminé, ce qui donnera la valeur des parties de cette échelle dans cette position, & de-là on tirera leur valeur pour toutes les autres positions, parce qu'elle sera proportionelle à la valeur totale que chaque position aura eue, quand l'index étoit au zero.

40. Ayant fait une fois cette vérification de son micromètre, on pourra s'en servir pour tous les angles depuis le zero jusqu'au plus grand, double à-peu-près de l'angle de chaque prisme séparé, sans avoir besoin d'un grand mouvement le long de l'axe de la lunette. On posera le prisme de la fig. 2 sur celui de la fig. 3 dans la position que l'on croira un peu plus grande, que la mesure que l'on veut prendre. On remettra l'objectif, & en approchant le plus que la machine le permet les prismes de l'objectif, on regardera l'objet. Si l'on voit que la division choisie donne une mesure qui soit plus petite que celle, dont on doit prendre la mesure ou qui l'excède trop, on la changera: ainsi on trouvera la division qui donne un peu plus. Alors en éloignant la machine de l'objectif, on diminuera la distance, & en réunissant les deux images des deux points de l'objet, comme en portant les deux disques d'une planète à l'attouchement extérieur, on aura la mesure exacte.

41. Par ce mouvement circulaire d'un prisme sur l'autre, qui

en forme un à angle variable, on aura un double avantage. Premièrement on évitera un long mouvement le long de l'axe. Si l'on pouvoit faire aller un prisme d'un angle déterminé & invariable par toute la longueur de la lunette sans l'affoiblissement & la disparition totale de l'image directe après un sixième de la longueur de la lunette; on auroit besoin d'une division très-longue & d'une ouverture latérale du tube presque par toute la longueur. On évite cet inconvénient par le changement de l'angle variable, par lequel on peut faire qu'on n'ait jamais besoin d'un mouvement de deux ou trois pouces, & si l'on veut même d'un seul. En second lieu on a par ce moyen une sensibilité beaucoup plus grande pour les petits angles, que l'on se propose de mesurer, qui est proportionelle à leur petitesse. Si l'on devoit mesurer une distance angulaire d'une minute par un prisme qui auroit son effet total de 8; non seulement il faudroit éloigner le prisme de l'objectif jusqu'à la distance de $\frac{7}{8}$ de la longueur totale, mais cette longueur toute entière seroit une échelle pour le total de 8 minutes: ainsi la lunette étant de 4 pieds, on auroit six pouces par minute de sensibilité: mais en réduisant l'angle variable à donner l'effet total à une seule minute, on aura une sensibilité 8 fois plus grande, d'un pied pour 7 secondes & demi.

42. Au lieu des trous que j'ai proposés dans la fig. 2 avec des pointes de la fig. 3 on pourra bien donner le mouvement circulaire & l'arrêter à des positions immuablement déterminées par le moyen de dents & d'un ressort de pression que l'ouvrier bien adroit imaginera aisément. Cela sera beaucoup plus commode pour la pratique de l'observateur: mais j'ai mis seulement la manière la plus aisée à conçevoir & la plus facile à exécuter. Quand il s'agira d'un prisme composé qui puisse servir seulement pour les diamètres apparents des planètes, on peut faire chacun des deux composants simple de verre commun: les couleurs n'y seront pas sensibles; mais pour la mesure des diamètres apparents du soleil & de la lune qui demandent l'effet total plus grand que d'une demi-minute, on fera bien pour éviter

ter

ter les couleurs de former chacun des deux acromatique, c'est-à-dire chacun composé de deux un de flint, & l'autre de verre commun de la manière que nous avons dit ci-dessus ; & cela sera beaucoup plus nécessaire, quand il s'agira d'un micromètre d'un effet total plus grand.

43. On peut faire avec toute la facilité & à peu de frais des prismes de cette espèce, ou de verre simple, ou aussi composés de verre, & de flint, surtout n'ayant besoin que d'un à-peu-près dans la mesure des angles, parce qu'on en aura l'effet beaucoup mieux par le moyen de la vérification que nous avons proposée pour déterminer cet effet : on fera bien d'avoir trois prismes composés & emboîtés de manière que l'on puisse adapter chacun à la même machine de la même lunette : le premier aura les deux prismes composants simples chacun d'un angle un peu plus grand que de deux minutes, pour avoir un effet d'un peu plus que d'une minute de réfraction totale : celui-ci servira seulement pour les petits diamètres apparents des planètes, mais il ne pourra servir que pour les lunettes acromatiques d'une grande force, qui puissent rendre bien sensible la grandeur de ces diamètres. Le second aura les deux composants acromatiques chacun d'un effet total un peu plus grand que de 17 minutes, c'est-à-dire d'un angle de verre commun à-peu-près de 51 minutes, & d'un autre de flint de 34. Celui-ci servira pour les diamètres apparents du soleil & de la lune & on peut l'adapter à cette première lunette : mais si l'on veut, celui-ci peut servir aussi étant adapté à une bonne lunette d'une force médiocre. On peut faire le troisième composé de deux acromatiques de manière que son effet total soit de deux ou trois degrés pour mesurer des distances un peu plus grandes, comme celle de la lune, ou des autres planètes aux étoiles fixes.

44. On peut donner beaucoup plus de sensibilité au second destiné à la seule mesure des diamètres apparents du soleil & de la lune. On fera le premier prisme fixe de 31 minutes d'effet total, & le second mobile de 3. Dans la demi-révolution celui-ci donnera tous les angles depuis 28 jusqu'à 34, tout ce grand

mou-

mouvement n' ayant que 6 minutes de variation dans l' angle mesuré.

45. On aura bien besoin d'un prisme composé à angle variable pour une autre espèce de micromètre objectif formé par des prismes placés en dehors au de-là de l' objectif de la lunette qu' on pourra employer beaucoup plus aisément & qui pourtant aura assez de sensibilité : de l'autre côté il y aura dans celui-ci un autre grand avantage, c'est qu' il pourra être employé à la mesure d' angles beaucoup plus grands ayant aussi l' usage d' un mégamètre. Pour le former on pourra faire cette machine semblable à celle du micromètre objectif ordinaire qui s' adaptera au bout du tube d' une lunette acromatique. Cette machine aura un anneau, qu' à l'aide d'une baguette on pourra faire tourner autour de l' axe de la même lunette, comme celui qui porte les deux demi-lentilles du micromètre objectif. On attachera à celui-ci un cercle beaucoup plus grand, comme d' un demi-pied de rayon, qui aura son plan perpendiculaire au même axe : celui-ci par deux règles de métal dirigées vers son centre soutiendra un des deux prismes composants fixé dans un petit tuyau. Un autre tuyau égal à celui-là portera l' autre prisme composant, & sera lié avec deux autres règles à un second anneau, qui pourra tourner autour du premier à l' aide d' une seconde baguette. Une des deux règles qui porteront ce second prisme, ou chacune des deux prolongée jusqu' au cercle portera un autre arc, qui avec les divisions de ce premier cercle formera un nonius. Ce nonius marquera les positions des deux prismes qui par la variation de l'angle donneront la variation de la distance des deux images de l' objet.

46. Si l' on place de cette manière un prisme composé, qui donne l'angle total d' une minute ; on aura une demi-circonférence entière pour la mesure d'une minute, qui formera une sensibilité beaucoup plus grande qu' elle n' est necessaire ayant plusieurs degrés pour une seconde : il y aura même pour cette mesure le double, c'est-à-dire le cercle entier, parceque quand on aura formé l' attouchement extérieur de deux disques apparents,

& qu'

& qu'on les aura séparés, on continuera le mouvement circulaire jusqu'à un nouvel attouchement. Ainsi dans ce cas-là on n'aura besoin ni d'un cercle d'un demi-pied, ni d'un nonius. On aura assez d'un seul cercle d'un diamètre égal à celui du tube de la lunette avec une simple alidade. Le cercle plus grand & le nonius seront très-utiles si l'on employe des prismes dont l'effet total soit de plusieurs degrés.

47. Dans la fig. 4 je ne fais qu'indiquer seulement ces anneaux, règles, petits tuyaux par des lignes simples. ABCD est le premier anneau qui peut tourner autour du tube de la lunette en portant avec lui le cercle FGHE : IKLM est le second anneau qui peut tourner autour du premier : AN, OC sont les deux règles attachées au premier anneau qui soutiennent en N, O le premier petit tuyau avec le prisme fixe : EP, QG sont les deux règles attachées au second anneau & au second petit tuyau mobile PQ qui porteront en E, & G les deux arcs dont chacun pourra avoir son nonius. Le premier anneau, le cercle, & le premier petit tuyau avec son prisme seront toujours liés entre eux de manière à pouvoir bien tourner ensemble autour du tube de la lunette, mais ils ne pourront avoir aucun mouvement respectif l'un par rapport à l'autre. Quand on aura fixé cet ensemble dans une position quelconque par rapport au tube de la lunette, on pourra faire tourner le second anneau autour du premier & le second petit tuyau avec son prisme mobile & ces arcs portants le nonius : le mouvement de ce second prisme variera l'angle du prisme composé & le nonius marquera dans le cercle extérieur les positions respectives des deux prismes qui donneront la quantité précise de cet angle. Un ouvrier habile en aura assez pour imaginer le mécanisme le plus simple & exécuter cet instrument. On déterminera une fois pour toujours la valeur de ses divisions par des observations terrestres semblables à celles que nous avons indiquées ci-dessus.

48. Par le mouvement d'un prisme sur l'autre on pourra avoir la mesure des angles les plus grands, si l'on trouve des matières capables de leur donner un acromatisme assez grand qui les

les empêche de déformer & rendre confus les objets. On peut employer à côté de l' objectif deux prismes qui puissent donner chacun un angle d' un ou-de deux degrés : la demi-révolution d'un sur l'autre donnera à l'aide du nonius de la fig. 4 la mesure de 2 ou 4 degrés, qui sera bien sensible même pour avoir les secondes. On pourra ajouter au de-là de ces deux une seconde machine fixée sur la première, qui les porte avec deux prismes qui auront l' effet total chacun de 25 degrés : on aura par les différentes positions du second sur le premier fixées immobilement à l' aide des trous ou du ressort la mesure exacte des angles depuis zero jusqu' à 50, qui auront des différences entre eux, moindres que de deux ou de quatre degrés : une troisième machine ajoutée avec deux autres prismes semblables donnera aussi une autre mesure depuis zero jusqu' à 50 : à l'aide des deux binaires ensemble on ira depuis zero jusqu' à 100. La vérification des différentes positions donnera certains nombres de degrés, minutes & secondes justes : les prismes de la première machine acheveront l'affaire, donnant le reste avec une très-grande précision.

49. Pourtant si l'on veut une précision plus grande, on peut faire que les deux prismes, qui ont le mouvement corrélatif au nonius, donnent seulement un degré ou un demi-degré : un second binaire de prismes par des positions rendues aussi immobiles après les changements peut donner des angles depuis zero jusqu' à 10 avec des différences moindres que d' un degré ou d' un demi-degré : un troisième binaire peut en donner depuis zero jusqu' à 80 à des intervalles moindres que de 10 degrés. On auroit alors un effet semblable à celui des montres, qui ont trois index, le premier pour les heures, le second pour les minutes, & le troisième pour les secondes.

50. Mais il faudra prendre des précautions pour bien placer ces prismes. La meilleure disposition est celle, dans laquelle le rayon traverse chaque binaire de manière qu' il soit incliné à-peu-près également à sa première, & dernière surface : il est vrai qu'alors on a le minimum de réfraction de chaque binaire : mais

un

un changement bien considérable d'inclinaison vers ce minimum ne donne aucun changement sensible dans la quantité de réfraction, ce qui est un grand avantage pour conserver dans tous les cas & dans tous les points du champ de la lunette le même effet trouvé dans la vérification pour chaque position respective des prismes de chaque binaire. Comme à la fin l'axe des pinceaux des rayons, qui font la réunion des images des deux objets, doit aller le long du tube dans une direction peu éloignée de celle de l'axe de la lunette; sachant l'effet total de chaque binaire dans son minimum, il est aisé de déterminer la position nécessaire pour avoir cette égalité d'inclinaison à l'entrée & à la sortie, & on peut bien imaginer un mécanisme qui pour chaque position respective des deux prismes donnera la position du total qui convient à l'effet proposé.

51. En employant plusieurs binaires à la fois il faut avoir égard aussi à la direction dans laquelle un binaire reste par rapport à l'autre: cette position variée change l'effet des deux réunis. On peut déterminer par la solution du problême, que nous donnerons ci-après, la direction dans laquelle restera l'angle que sa première surface fait avec la troisième, pour en tenir compte, ou pour trouver un mécanisme qui donnera à tous ces angles de tous les binaires la même direction, dans le quel cas la quantité de la réfraction totale, c'est-à-dire l'angle que la direction de l'axe des pinceaux lumineux antérieure à toute réfraction fait avec la dernière dans le tube prolongé en dehors, est la somme des réfractions particulières de chaque binaire. Mais on peut se passer de toutes ces considérations & attentions particulières par une bonne vérification faite une fois pour toutes les combinaisons. Ce travail est bien long, mais on en sera bien dédommagé par la très-grande utilité d'un instrument de cette espèce une fois bien vérifié.

52. Si parmi les substances que nous connoissons on en trouve des capables à donner à un assemblage de prismes un acromatisme réuni avec la réfraction totale de 90, ou de 80 degrés capable de laisser à l'image une bonne distinction; on pourra bien s'en

servir pour déterminer la hauteur du soleil sur l'horizon, & une assez grande distance de la lune au soleil & aux étoiles, ce qui formera un excellent mégamètre pour avoir la latitude, & la longitude sur mer. Il n'y aura rien à craindre du côté de la multiplication des prismes, & des tuyaux & règles nécessaires pour les soutenir, à l'egard de l'affoiblissement de la lumière de la seconde image détournée. Pour la hauteur du soleil on dirigera la lunette à l'horizon, & on en aura la première image claire: la seule seconde du soleil sera affoiblie, ce qui plutôt est un avantage, parceque il faut déjà l'affoiblir par des verres enfumés, & on aura le même avantage, en réunissant la première image de la lune avec la seconde du soleil. Quand on devra prendre la distance de la lune à une étoile, on regardera celle-ci directement, & l'affoiblissement tombera seulement sur l'image de la lune qui pendant la nuit a trop de lumière, & il y a de l'avantage à l'affoiblir dans son image, quand on l'approche à celle d'une étoile fixe.

53. Si l'on n'a encore des substances de cette espèce, on pourra bien en avoir avec le tems à l'aide de la Chymie, qui donnera peut-être des procédés sûrs pour obtenir des substances transparentes, pures, & uniformes dans tout l'intérieur des plaques, & d'un effet toujours constant pour ce qui appartient au degré précis de qualité réfractive & dispersive, tandis qu'à présent on n'a des bonnes plaques que par hazard, & avec de la variété dans la quantité de leur force. Alors on tirera de cette méthode tous les avantages en construisant des mégamètres capables de mesurer des angles de toute grandeur. Leur usage pour la marine seroit encore plus commode que celui de l'octant de réflexion, parcequ'il s'agiroit de diriger à l'horizon ou à une étoile fixe une lunette entourée dans son extremité d'une bande circulaire d'un petit rayon, & donner un mouvement à un alidade de la même longueur, qui changeroit la position d'un seul des prismes, & par le nonius donneroit la mesure des angles. Dans les octants on ne peut employer que de très-petites lunettes, qui ne peuvent avoir un grossissement nécessaire pour rendre

dre

dre sensible un petit nombre des secondes, tandis que dans cet instrument on pourroit employer une lunette acromatique de 2 pieds, qui peut se tenir à la main très-aisément, & être dirigée à l'horizon, quand il s'agira de déterminer la hauteur du soleil, pour les latitudes, à une étoile fixe pour avoir les longitudes par sa distance à cette étoile, même sur un vaisseau.

54. En attendant je suis bien persuadé, que par des prismes de cet acromatisme, que nous pouvons obtenir du flint réuni au verre commun, on peut obtenir d'assez bons mégamètres pour la mesure au moins de 20 degrés, & c'est à l'experience à faire voir jusqu'où l'on peut pousser leurs forces sans avoir une confusion nuisible d'image & de couleurs trop sensibles. L'usage des prismes de verre, qui couvrent une seule partie de l'objectif, outre l'avantage d'employer une matière moins coûteuse, incomparablement plus facile à trouver assez pure, & plus aisée à travailler que le cristal de roche, a cet autre de pouvoir servir à la mesure d'angles beaucoup plus grands formant non seulement des micromètres, mais aussi des mégamètres. Le cristal de roche ne peut donner que la mesure des angles qui n'excédent pas la différence de ces deux réfractions, qui est de peu de minutes. M. l'abbé Rochon n'ayant pu obtenir la mesure des diamètres apparents du soleil & de la lune par le moyen du cristal de roche, a proposé depuis l'usage du cristal d'Islande, qui forme aussi deux réfractions avec une plus grande distance angulaire de deux rayons refractés, mais celui-là est incomparablement encore plus rare & très-rarement assez pur, & d'ailleurs ne peut pas donner de grands angles, sa différence de réfraction aussi n'allant pas bien loin.

55. Du reste la théorie du prisme de cristal de roche glissé dans l'intérieur du tube le long de son axe est tout-à-fait semblable à celle du verre simple de la fig. 1. Si l'on employe un prisme simple de cette substance, le rayon M'N' par la double réfraction se divisera en deux N'K', N'K", & il y formera deux images du même point L placé dans l'axe de la lunette: chacune des deux sera réunie avec une image d'un autre point. Quand le

 pris-

prisme sera à côté de l' objectif, la distance optique des deux points qui ont les images réunies, sera sensiblement égale à l' angle K'N'K", qui est la différence des deux réfractions : mais quand le prisme s'approchera du lieu de l'image en GHI, la distance KK', qui sera toujours proportionelle à la distance optique des deux images d'un même point égale à la distance optique des deux qui ont les images réunies, ira en diminuant sensiblement en raison de la distance N'H à cause de la grandeur constante de l'angle K'N'K". Si l'on rend acromatique ce prisme par l'union d'un autre de verre simple, ce second prisme donnera une réfraction sensiblement égale aux deux parties du rayon séparées par le premier, en conservant ainsi la même divergence qu' ils avoient, & le même effet pour la distance apparente des deux images du même point, & pour celle des deux points qui ont les images réunies. C'est la figure, sur la quelle j'ai fait voir a M. l' abbé Fontana le grand effet que le mouvement rectiligne devoit avoir pour la sensibilité de cette espèce de micromètre.

56. Le seul avantage que le prisme de cristal de roche ou d' Islande a sur le verre simple employé de la manière que j' ai proposée, est que le premier couvrant toute l'ouverture de l'objectif peut aller par toute la longueur du tube sans avoir aucun changement dans la proportion de la quantité de lumière des deux images, tandis qu'à cause de la figure conique du pinceau des rayons-appartenants à un point de l'objet on ne peut pas trop éloigner de l'objectif l'autre de verre commun : mais cet avantage est bien compensé par la réduction aisée de l'angle à être très-peu plus grand que celui qui doit donner l' effet total égal à la mesure que l' on veut prendre, ce qui borne la longueur nécessaire de l'ouverture latérale du tube à peu de chose, & donne pour les petits angles une sensibilité beaucoup plus grande, comme j'ai fait voir au num. 41 : de l'autre côté mes prismes appliqués en dehors, qui n' ont pas ce désavantage, peuvent avoir par le cercle & le nonius de la fig. 4 une sensibilité beaucoup plus grande qu' il n' est nécessaire pour la mesure la plus exacte,

ête, tandis qu'ils la donnent assez grande aussi pour celle des grands angles (*).

57. Pour ce qui appartient à la manière de rendre acromatique un prisme de cristal de roche, il faut bien lui ajouter un prisme de verre : mais ce n'est pas toujours un angle égal, qui fait l'acromatisme. Dans les dissertations que j'ai publiées à Vienne en Autriche j'ai donné des observations faites avec mon vitromètre d'eau en y employant différentes substances, & j'y ai trouvé qu'en parité de réfraction le cristal de roche fait moins de séparation de couleurs qu'aucune autre de ces substances : mais sa qualité distractive est peu différente de celle des verres communs : ainsi quand on employe le verre commun, l'angle qui réunira deux couleurs sera peu différent de celui du même cristal : mais si l'on y unissoit un prisme de flint, il faudroit faire son angle beaucoup plus petit. Généralement pour avoir l'effet total de la plus grande réunion il faut avoir par des expériences les qualités réfractive & distractive des deux substances que l'on se propose d'employer, soit du cristal de roche & du verre, soit de deux verres selon quelque méthode propre à cela, comme celle que j'ai exposée dans la première de ces cinq dissertations, & que j'ai développée encore mieux dans un Opuscule que je n'ai pas encore imprimé (**), où si l'on n'a pas déterminé ces qualités, il faut employer la méthode que j'ai proposée ici au num. 30.

58. On pourroit aussi employer un prisme à angle variable pour l'usage de la marine en l'adaptant aux octants de réflexion, pour avoir une détermination beaucoup plus exacte, surtout quand on y ajoute une lunette pour avoir un grossissement & un peu plus de distinction. On peut placer un prisme à angle variable derrière la petite plaque de verre à demi-étamée. On peut faire

de

(*) Il est aisé de s'apercevoir qu'on peut appliquer cette dernière espéce de micromètre, & mégamètre extérieur aussi au bout du tube d'un télescope, ayant égard à ce que l'excès du prisme sur le petit miroir soit à peu-près égal à l'excès de l'ouverture du tube sur le prisme.

(**) C'est le premier du volume précédent à celui-ci.

de manière que l' alidade, qui porte le miroir mobile, puisse à chaque demi-degré être fixée immobilement, & que l'effet total du prisme variable soit d'un demi-degré. Ayant vérifié les angles qui sont donnés par l'alidade dans chacune de ses positions, on aura pour les parties de ce demi-degré, qu'il faut ajouter à ce qui est donné par l'alidade, une demi-circonférence entière qui pourra bien donner les secondes, puisqu'un degré y répondra à 10 secondes. Mais cela n'a rien à faire avec la méthode que je me suis proposé de développer dans cet Opuscule de l' usage d' un prisme de verre qui couvre seulement la moitié de l' ouverture de l' objectif.

59. On tirera bien de l'avantage & pour l'un & pour l'autre objet de la solution du problême dont j'ai fait mention au num. 3. Si l'on veut faire une perte de lumière qui soit la moindre possible, il faut mettre les deux prismes en attouchement, & alors il y aura trois surfaces à considérer, les deux extérieures appartenantes une par prisme, & une intérieure appartenante à tous les deux. Nous les appellerons première, seconde, troisième, selon l'ordre dans lequel elles reçoivent les rayons: ainsi la commune sera la seconde. La première avec la seconde fait le premier des deux angles composants, la seconde avec la troisième le second, & la première avec la troisième fait l'angle composé. L' angle du prisme est celui qu' on a en continuant ses deux surfaces jusqu'à leur intersection mutuelle, & faisant une section du même prisme perpendiculaire à cette intersection: je suppose qu'on sait la grandeur des deux angles composants & leur position, & qu'on cherche la grandeur & la position du troisième.

60. Que (fig. 5.) le cercle AI''BK'' soit la base du second prisme, qui est la dernière à recevoir les rayons: nous l'appellons sa seconde surface. Que l'on conçoive une sphère avec le centre C, dont cette base sera un grand cercle. Nous imaginerons cette sphère coupée par deux sections parallèles aux deux autres surfaces, dont une soit celle du milieu commune aux deux prismes, première du second, seconde du prèmier. Cette section for-

formera un second grand cercle AI'BK': la seconde section sera parallèle à la première surface du premier prisme, & formera un troisième grand cercle DIEK. Nous appellons cette dernière surface, qui est la première à recevoir les rayons, la première de ces trois, & son cercle DIEK le premier : le second cercle, qui répond à la seconde surface, sera AI'BK', & la base AI"BK" sera le troisième. On y aura trois diamètres, GCF intersection du plan du premier cercle avec le plan du second, BCA intersection du plan du second cercle avec celui du troisième, ECD intersection du plan du premier avec celui du troisième. Dans les deux bords de chacun de ces trois diamètres il y aura l'angle sphérique, qui mesure l'inclinaison des deux plans, dont il est l'intersection. Le premier de ces trois binaires répond au premier prisme simple, le second au second, le dernier au prisme composé. Ainsi l'angle sphérique AGD = BGE sera égal à celui du premier prisme, GBE = GAE à celui du second, AEG supplément de l'angle BEG à celui du prisme composé.

61. Il faut considérer le second prisme immobile tandis que le premier tourne autour du centre de la surface intermédiaire AI'BK' qui appartient à tous les deux prismes simples. Les cercles AI"BK", AI'BK' ayant les plans toujours parallèles aux surfaces du second prisme immobile resteront sans mouvement avec leur angle B, qui est égal à celui de ce prisme. Le premier cercle DIEF toujours parallèle à la première surface du premier prisme aura un mouvement sur la surface de la sphère, & ses intersections avec les deux autres changeront de place : les points G & F parcoureront les demi-cercles AI'B, AK'B, & les points E, D les demi-cercles AI"B, AK"B. L'angle, que le premier demi-cercle fait avec le second en G, & F, restera toujours de la même grandeur égal à celui du premier prisme : mais l'inclinaison de son plan à celui du troisième changera avec l'angle en E & D. Quand le point E sera en A, le point G y sera aussi, & les points D, F se trouveront en B : la figure 5 se changera en la fig. *6*, où l'on voit l'union des trois points A, G, E en haut, & des trois B, D, F en bas, & quand le point E se trouvera

vera en B, le point G y sera aussi, & les points D, F seront en A : la figure 5 se changera en la fig. 7, où l'on voit l'union des trois points B, G, E en bas, & des trois A, F, D en haut. Dans le premier cas l'angle du premier cercle avec le troisième, qui est égal à celui du prisme composé, sera (fig. 6) l'angle IBI'' différence des angles IBI' du premier prisme, & I'BI'' du second, & dans le second cas cet angle devient (fig. 7) leur somme IBI''. Ainsi quand les angles des deux prismes seront égaux, l'angle du prisme composé dans le premier cas s'évanouira, la première surface du premier prisme devenant parallèle à la seconde du second, & dans le second cas il sera double de celui d'un seul des deux composants. Dans toute autre position du premier prisme par rapport au second l'angle AEG du prisme composé sera moindre que la somme des deux des prismes composants, & plus grand que leur différence. On le prouve par la proprieté de tout triangle sphérique dont tous les trois angles ensemble font plus que deux droits, & par conséquent l'angle externe, qui avec son interne fait une somme égale à deux angles droits, doit être moindre que les deux internes & opposés. D'après ce principe l'angle AEG externe qui est celui du prisme composé doit être moindre que les deux internes & opposés EGB, EBG qui sont les angles des prismes composants : comme aussi dans le triangle AEG les deux angles internes AEG, EAG ensemble surpassent l'externe AGD, l'angle AEG doit être plus grand que AGD — EAG, c'est-à-dire que BGE — EBG, qui en est la différence. Ainsi le maximum de cet angle variable est la somme des deux angles des prismes composants, & le minimum leur différence, & on a ces deux termes extrêmes quand l'intersection des deux surfaces du premier prisme composant devient parallèle à l'intersection des deux de l'autre.

62. On trouvera aisément cet angle pour chaque position donnée du premier prisme par rapport au second. Si le nonius marque zero, quand il y a la position du minimum, le nombre marqué par le même index dans toute autre position donnera l'arc AG du cercle commun : ainsi on aura son supplément BG, qui est

la

la base du triangle BEG. Comme on y a aussi les angles en B & G, on trouvera le troisième BEG supplément du cherché AEG. Ainsi ou aura la grandeur de l'angle du prisme composé: mais aussi on trouvera aisément sa position. Si l'on conçoit l'arc EH perpendiculaire au demi-cercle BGA, sur lequel se fait le mouvement de la seconde surface du premier prisme mobile autour du second immobile, le point H marquera la position du point E, qui est le sommet de l'angle du prisme composé, par rapport à ce cercle, & l'ouverture du même angle répondra à un point du même cercle éloigné du point H de 90 degrés. On trouvera le lieu du point H sur le même cercle très-aisément de la manière suivante. Par les theorêmes élémentaires de la trigonométrie sphérique on a les valeurs suivantes, $sin.BH = \frac{tan.EH}{tan.EBH}$ & $sin.GH = \frac{tan.EH}{tan.EGH}$, d'où l'on tire cette proportion $tan.EGH : tan.EBH :: sin.BH : sin.GH$: par conséquent la somme des tangentes des deux angles donnés B & G est à leur différence comme la somme des sinus des deux segments BH, GH de la base BG, est à leur différence, c'est-à-dire comme la tangente de la moitié de la base BG, qui est la demi-somme de ces segments, à la tangente de leur demi-différence. Les trois premiers termes étant donnés on aura le quatrième, qui fera trouver cette demi-différence: on l'ajoutera à la demi-somme, & on l'en ôtera, pour avoir les deux segments BH, GH. Celui qui est à côté du plus petit des deux angles B, & G sera le plus grand, qui provient de la somme, parceque le segment plus grand répond au plus grand des côtés EB, EG, & le côté plus grand est opposé au plus grand des deux angles.

63. Ayant le segment BH, on aura la direction de l'angle composé, qui est fait par la première, & la troisième surface, & qui répondra à un point de ce cercle éloigné du point H de 90 degrés. On peut trouver aussi l'angle composé, en trouvant les compléments des deux angles BEH, GEH, parceque la somme de ces deux compléments sera égale à l'angle AEG, comme

 la

la somme de ces deux angles l'est à l'angle BEG. Or on trouvera ces deux compléments chacun par son angle, & par le segment qui lui répond dans les triangles BHE, GHE, dans lesquels on a par les formules élémentaires $cos.\,BEH = cos.\,BH \times sin.\,EBH$, & $cos.\,GEH = cos.\,GH \times sin.\,EGH$.

64. Si les deux angles des deux prismes composants sont égaux, le triangle BEG sera isoscèle, & les segments BH, GH égaux, l'intersection de la première surface avec le troisième restera au milieu de l'arc BG, & l'angle même répondra au milieu de l'arc AG. On aura alors le sinus de la moitié de l'angle composé, en multipliant le cosinus de la moitié de la base BG, c'est-à-dire le sinus de la moitié de AG, par le sinus d'un des deux angles égaux des deux prismes. Si les angles sont inégaux, mais petits, au lieu de la somme & différence des tangentes des deux angles B, & G des deux prismes, on pourra employer dans la proportion du num. *62* la somme & la différence des angles mêmes réduits en minutes & leurs dixièmes, parceque les petits angles sont sensiblement proportionels à leur sinus, & tangentes.

65. On voit bien que l'angle composé n'aura pas un changement proportionel au mouvement circulaire du premier prisme mobile sur le second fixe. Dans le cas de l'égalité des deux angles composants, qui est le plus simple, quand on aura amené les deux prismes à la position dans laquelle le point G va en A, l'angle composé sera $= 0$: en tournant le premier prisme, cet angle s'augmentera de manière que le sinus de sa moitié soit toujours proportionel au sinus de la moitié du mouvement donné jusqu'à ce qu'après une demi-révolution il devienne égal au double de l'angle d'un des deux prismes: quand les deux angles seront petits, l'angle composé lui même sera comme le sinus de la moitié de ce mouvement circulaire. Au commencement l'augmentation sera sensiblement proportionelle au même mouvement, le sinus de sa moitié étant sensiblement proportionel à cette moitié; & pour cela au total aussi. En allant en avant, l'augmentation de cet angle en parité de mouvement sera continuellement plus petite, & très-petite vers la fin de la demi-révolution, où le

le changement du sinus de sa moitié ne change qu'insensiblement. Ainsi la sensibilité du micromètre sera très-grande, quand on sera près de la position, qui donne l'angle composé le plus grand possible, c'est-à-dire égal à la somme.

66. Si l'on veut tirer de cette théorie la quantité de l'effet du prisme à angle variable corrélativement au mouvement circulaire, il faudra avoir bien exacte la mesure des deux angles composants & leur position sur le cercle commun dans chaque prisme, de laquelle dépend la position, qui donne l'angle composé = zero : d'après la grandeur de ces deux angles il faut calculer une table, qui donnera la grandeur précise de l'angle composé corrélativement au mouvement circulaire de 10 en 10 degrés ou encore de 5 en 5. Il faudra aussi avoir la qualité réfractive du verre, pour tirer la quantité de l'effet pour chaque angle.

67. Pour la position de l'angle dans un prisme réduit à avoir une base circulaire, on pourra la trouver de la manière suivante. On posera la surface qui est inclinée à la circulaire sur un plan, & on glissera le long de la circulaire un autre plan terminé par une ligne droite, qui à la fin s'adaptera sur le premier plan. On marquera sa position sur ce plan, & ayant ôté le second plan on tirera par le centre de la base circulaire une ligne droite perpendiculaire à cette ligne marquée : sa rencontre avec la circonférence marquera la position de l'angle du prisme éloigné de 90 degrés de la position de l' intersection GF ou AB que nous avons employée dans la fig. 5. Pour la quantité de l'angle on ne pourra jamais l'avoir qu'à quelques minutes près, & il sera très-difficile de la trouver, quand il est très-petit, surtout le verre ayant de l'épaisseur nécessaire pour une suffisante solidité. Quand il sera un peu-plus grand, on pourra faire entrer le prisme dans le sens du diamètre, qui marque la direction de l'angle, entre les deux règles qui forment le compas de proportion & l' approcher de l' union de ces règles ou l' en éloigner jusqu'à ce que les deux surfaces en soient touchées exactement dans toute la longueur de ce diamètre, ce qui pourra se faire, si

dans le lieu de la position trouvée de l'angle il y a quelque épaisseur médiocre du verre : en ôtant le prisme , & en retenant l' ouverture du compas , on pourra en déterminer l' angle un peu plus exactement à cause de la longueur de ces mêmes règles . Mais il n'y aura jamais par ce moyen une exactitude suffisante à l'usage du micromètre .

68. Ainsi le meilleur parti sera celui de déterminer l' effet du prisme composé dans des positions différentes par la mesure terrestre, que nous avons proposé ci-dessus. Si l'on rencontre deux positions avec la même quantité de leur effet, on connoîtra les deux positions diamétralement opposées , qui doivent donner le maximum & le minimum, qui seront au milieu de ces deux d'un côté & de l' autre, & on saura quel est le minimum par une troisième intermédiaire : si celle-ci fait un effet moindre que les deux autres , le minimum tombe dans le même arc avec elle: si son effet est plus grand, le minimum tombera dans l'arc opposé. Si tous les trois effets sont inégaux , le point de la position du plus petit de tous tombera sur un des deux arcs du cercle entier terminé par les points des deux autres positions , & le minimum tombera sur le même de ces deux arcs avec lui.

69. Si les plus grands effets des deux prismes sont égaux , ce minimum sera = zero , & si leurs angles sont petits de manière à être sensiblement proportionels à leurs sinus & à leurs effets, on pourra abréger le travail de la vérification & à l' aide de deux seuls effets par la théorie que nous avons développée former une table pour l'effet de toutes les autres positions , ce qui pourra être bien utile pour avoir les effets du prisme variable, qui marque dans le cercle divisé ses différentes positions par l' index ou l'alidade . Soient G , G' (fig.4) deux points marqués dans le cercle pour les deux positions , R le point qui doit être marqué dans le minimum : on saura de la manière que nous avons dit par un troisième effet , si ce point tombe sur le plus grand ou sur le plus petit des deux arcs terminés par les points G, G'. Si les deux effets en G, G' ne sont pas égaux, on trouvera le point R de la manière suivante.

70. Que

70. Que l'on conçoive les arcs RG, RG' coupés par le milieu en S, S': les sinus des arcs RS, RS' seront comme les deux effets, & par-là on aura cette proportion, comme la somme de ces deux effets est à la différence, ainsi la tangente de la demi-somme des deux arcs SR, S'R est à leur demi-différence, c'est-à-dire la tangente de leur demi-somme à la tangente de leur demi-différence. Or si le point R tombe hors de l'arc GG', c'est-à-dire du plus petit des deux terminés par les points G, G', comme on le voit dans la figure, il tombera aussi hors de l'arc SS' qui sera la différence des deux arcs SR, S'R, autrement il en sera la somme : sa moitié, qui est le quart de l'arc GG' connu, sera toujours un des deux derniers termes de cette proportion, dans laquelle connoissant les deux premiers, qui sont la somme & la différence des deux effets, on connoîtra l'autre des mêmes derniers. Ainsi on aura & la demi-somme & la demi-différence des deux arcs SR, S'R. La somme de ces deux donnera le plus grand, la différence le plus petit, & le plus grand sera celui qui appartient à l'effet plus grand, ce qui déterminera le point R du minimum sur le cercle. Alors pour toute autre position on dira comme le sinus de la moitié de l'arc GR est au sinus de la moitié de la distance de cette position au point R, ainsi l'effet connu de la position G est à l'effet cherché de cette position.

71. Ayant calculé de cette manière l'effet de deux ou trois autres positions, on verra si l'effet trouvé par le calcul est d'accord avec celui qu'on aura trouvé par la vérification terrestre, ce qui doit arriver, si les surfaces de deux prismes sont assez bien planes. Alors on pourra compter sur le résultat du calcul pour les autres positions. Mais comme une fois que l'on aura arrangé ce qu'il faut pour déterminer l'effet de deux positions, il sera bien aisé de le déterminer pour toutes les autres ; on fera mieux de déterminer par la même méthode l'effet d'un grand nombre d'autres pour en tirer par interpolation la table entière destinée pour l'usage.

72. On peut considérer aussi la marche du rayon qui passe par plusieurs prismes placés avec des positions différentes inclinées

nées les uns sur les autres d'une manière quelconque, où il y a une quantité de cas, & une théorie très-compliquée, pour déterminer l'angle que sa dernière direction contient avec la première, & la position du plan qui passe par ces deux directions : mais le meilleur parti est celui de bien déterminer par un très-grand nombre d'observations terrestres les effets d'un très-grand nombre de différentes combinaisons, pour en former des tables, & trouver par l'interpolation les effets de toutes les positions que l'on pourroit employer. On mesurera une base assez longue, & on placera à une de ses extrémités une ligne verticale marquée sur une planche. On en placera successivement une autre dans la direction perpendiculaire à la même base partie de la même extrémité, à des distances bien mesurées : la base sera le rayon & celles-ci seront des tangentes des angles formés par les lignes droites, qui de l'autre extrémité de la base iront à ces deux lignes verticales. On placera son instrument au commencement de la base de manière, que son bout réponde au premier point de la même base : on faira réunir par le mouvement du prisme mobile la seconde image de la seconde verticale avec la première de la première en marquant ce que le nonius aura déterminé sur la circonférence du cercle extérieur pour chaque observation. On aura alors un bon nombre de divisions de ce cercle avec les angles correspondants. De-là par interpolation on tirera ceux-ci correlatifs à des divisions prises à des intervalles égaux qu'on rédigera en ordre de tables régulières. Si tous les prismes sont placés de manière que les intersections des deux surfaces réfringentes de chaque prisme soient parallèles entre elles & tournées perpendiculairement à la première direction du rayon, toute la route que ce rayon aura dans les prismes, & entre eux avec la premiére & dernière direction, tout cela restera toujours dans un même plan perpendiculaire à ces intersections, & l'angle de la première direction avec la dernière sera la somme de tous les effets particuliers de tous les prismes, quand on aura tourné tous les angles du même côté, ce qu'il faudra tâcher de faire, quand on veut employer plusieurs prismes détachés entre eux.

OPU-

OPUSCULUM V.

De Telescopio exhibente simul binas imagines ejusdem objecti, alteram directam, alteram inversam, cum earum motibus contrariis, et æqualibus.

1. Propositum mihi fuerat Parisiis consilium de quærenda constructione telescopii dioptrici, quod exhiberet binas imagines ejusdem objecti, alteram directam, alteram inversam, ac si id objectum esset mobile, præberet duplicem earum motum æqualem, & contrarium: aliquanto post accepi, id ipsum elaboratum fuisse, & exhibitum Regiæ Scientiarum Academiæ tanquam instrumentum admodum utile Astronomiæ. Ipsum ego quidem nequaquam vidi, nec aliud de ejus constructione accepi, nisi ipsum constare pluribus objectivis vitris, quorum aliquod esset perforatum. Præcipua autem ejus utilitas in eo sita esse dicebatur, quod per ejusmodi binos motus contrarios, & æquales posset observari transitus ejusdem astri per meridianum sine ullo usu filorum micrometri, & cum velocitate respectiva accessus mutui duplo majore.

2. Perquisitionem de eo argumento instituendam mihi esse censui, cum potissimum litteris ex Italia ad me datis ea de re interrogarer: eâ autem institutâ, facile perspexi, obtineri quidem posse duplicem ejusmodi imaginem cum eo duplici contrario motu per conjunctionem duplicis telescopii, quorum alterum exhibeat imaginem directam per duo objectiva, & unicam ocularem, alterum inversam per unicum objectivum perforatum, per cujus foramen transeant radii alterius, & ad unicam deferantur ocularem communem utrique: sed simul animadverti, debere omnino ejusmodi telescopium esse admodum imperfectum, nec ullam ex eo utilitatem percipi posse pro astronomicis usibus, quæ multo melius per communia telescopia haberi non possit.

3. Con-

3. Conscripsi ea de re Gallico sermone Opusculum, & celeberrimo Astronomorum Principi La-Landio mihi amicissimo exhibui, ne sumptus, qui ad id uberius perficiendum destinati dicebantur, frustra, ut ego quidem censebam, consumerentur. Id ipsum hîc exhibeo ita, ut tum conscriptum fuit, paucissimis mutatiunculis perpolitum nonnullis in locis. Videor autem mihi satis dilucide demonstrare, æqualitatem magnitudinis, claritatis, distinctionis binarum contrariarum imaginum obtineri non posse, nisi per instrumentum admodum imperfectum, quod multo majore tubi longitudine multo minorem effectum edat cum augmento admodum exiguo: multo minorem obtineri posse celeritatem respectivam mutui accessus binarum imaginum per ejusmodi telescopium, quam accessum unicæ imaginis exhibitæ a telescopio communi longitudinis ejusdem ad filum micrometri ob multo majus augmentum ab ipso exhibitum: nec vero sine ope unius fili, vel etiam duplicis, obtineri posse occursum mutuum directum earundem imaginum, quod omnem illam impedit instrumenti utilitatem propositam.

4. An ibi ego scopum attigerim, videbit facile, qui Opusculum ipsum diligentius perpenderit: plura saltem inveniet, quæ ad telescopiorum dioptricorum naturam, atque indolem intimius percipiendam conducant, quæ muneri mihi imposito cum titulo Directoris Opticæ respondeant, ac pertineant ad argumenta, quæ in hisce prioribus binis hujus collectionis voluminibus pertractanda suscepi.

MÉMOIRE

Sur une lunette qui donne deux images du même objet l'une directe, l'autre inverse, avec deux mouvements contraires des objets mobiles.

1. Il y a deux ans, que M. Jeaurrat a proposé à M. Navarre l'idée de chercher le moyen de faire une lunette capable de remplir ce double objet. Celui-ci m'en parla un jour; mais persuadé qu'une lunette seule ne pourroit pas bien satisfaire au pro-

problême, & ne croyant pas ce double effet d'aucune utilité réelle pour l'Astronomie, je n'y avois plus songé. M. Navarre en a exécute une depuis : on l'a annoncé à l'Académie, on l'a fait voir à plusieurs personnes, & on en a imprimé la découverte dans le Journal de Physique; mais sans aucun détail sur sa construction, ni aucune indication de sa théorie. Je ne l'ai pas vu : mais on m'a dit qu'il y avoit plusieurs objectifs placés à des distances différentes, dont un percé. Ayant reçu une lettre d'un Opticien d'Italie qui par des combinaisons différentes n'avoit rien obtenu, & il m'en demandoit la construction, j'en ai fait la recherche : je me suis aperçu que ce ne devoit être une lunette simple, mais deux lunettes l'une fourrée dans l'autre avec le passage des rayons de la première à travers le trou de l'objectif de la seconde, & avec un seul oculaire pour tous les deux, mais qu'un pareil instrument devoit avoir un effet incomparablement inférieur à celui d'une lunette ordinaire de la même longueur.

2. On sait bien qu'on peut faire une lunette à trois verres convexes, qui donne une image directe de l'objet, tandis que la lunette astronomique formée de deux la donne inverse. On peut former la première avec deux objectifs & un oculaire, & on forme la seconde avec un seul objectif & un oculaire. Pour rendre cet oculaire commun il faut faire former les deux images dans un même plan perpendiculaire à l'axe, & pour laisser la liberté au passage des rayons de la première il faut percer l'objectif de la seconde, qui sera réduit à un anneau. Mais cette réduction rend cette seconde bien défectueuse en exigeant le cercle extérieur de cet anneau beaucoup plus grand que dans les objectifs entiers des lunettes ordinaires, tandis que l'erreur de réfrangibilité qui est le plus essentiel s'augmente en raison de son diamètre. L'autre espèce de lunette n'est pas en usage, parcequ'elle ne peut faire qu'un effet bien inférieur à celui des lunettes ordinaires à un objectif, & trois oculaires pour l'image directe, & celle d'un objectif avec un seul oculaire pour l'inverse. La position nécessaire pour la réunion des images dans le mê-

me plan la rend mauvaise d'avantage en exigeant un éloignement de son image trop grand par rapport aux petits rayons de sphéricité dont il faut se contenter, comm' on verra dans la théorie que je m'en vais développer dans ce Mémoire.

3. Voici les conditions qu' il faudroit remplir pour avoir un bon effet dans la double image de cette double lunette : 1°. que le grossissement de toutes les deux lunettes soit le même, pour avoir l'égalité des images : 2°. que les deux images formées par toutes les deux se trouvent dans le même lieu, qui doit être celui du foyer de l'oculaire commun, pour avoir la distinction de l'image : 3°. que la quantité des rayons appartenants à un même point d' objet qui arrive aux deux images soit la même, pour y avoir la même clarté : 4°. que l'aberration de réfrangibilité y soit égale, pour avoir l'égalité de distinction.

4. Voici l'analyse corrélative à ces points, qui donnera la construction de l' instrument & fera voir l' origine inévitable de sa foiblesse. Dans la fig. 1 (Tab. IX) A, B, C, D sont les centres de trois objectifs & de l' oculaire placés dans le même axe EH: je le représente par des lignes droites, en négligeant l'épaisseur, comme aussi j'y néglige l'erreur de sphéricité qui est petit par rapport à celui de la différence de réfrangibilité, & je considère d' abord une seule espèce de rayons. Les diamètres de leurs ouvertures sont *aa'*, *bb'*, *cc'*, *dd'*, mais le troisième objectif a un trou, dont le diamètre est *ee'*: ainsi la lumière n' y passe que par l' anneau *ce*, *c'e'*, tandis que les rayons du système des deux premiers objectifs passent par le trou *ee'*: F est le foyer de l'anneau du troisième objectif *cc'*, & du système des deux premiers A, & B, qui doit être aussi le foyer de l'oculaire *dd'*, condition nécessaire pour en faire sortir parallèles entr'eux les rayons partis d' un point d' objet éloigné & rassemblés par chaque lunette dans son foyer.

5. On voit bien que le troisième objectif *cc'* devra rassembler les rayons *mc*, *pe*, appartenants à un point de l'axe EH bien éloigné, dans son foyer F, & l'oculaire les ayant reçus en *n'*, *n''*, les fera sortir par les directions *n'h'*, *n''h''* parallèles à l' axe DH. Les ra-

rayons $m'a'$ partis du même point doivent être rassemblés par le premier objectif dans son foyer R, & arrivant au second en b ils devront être détournés vers le même point F. Pour cela si BL est la distance focale de cet objectif, il faut que BR en soit plus grande, & cela dans un rapport qui donnera une des déterminations du problême.

6. Les rayons IC, qui étant partis d'un point d'objet placé hors de l'axe arriveroient au centre C du troisième objectif sans l'interposition des deux précédents, devroient passer sans réfraction jusqu'au point d de l'oculaire qui les renvoyeroit au point G de l'axe, foyer de cette lentille pour les rayons divergents du point C, comme dans les lunettes ordinaires, & l'œil pour les recevoir devroit être placé en G : tous les autres rayons qui étant partis du même point d'objet arriveront à l'anneau formé par cet objectif percé en seront détournés vers un point f de la ligne Cd placé vis-à-vis le point F, qui sera le lieu de ce point d'objet dans son image inverse, en continuant leur route jusqu'à l'oculaire ils en sortiront par des directions parallèles à dG.

7. Les rayons I'A partis du même point de l'objet après avoir passé sans réfraction par le centre A du premier objectif jusqu'à un point o du second devront aller à un point d' de l'oculaire opposé au point d, & également éloigné du point D, pour en être envoyés au même point G de l'axe, & entrer dans l'œil, ce qui exige leur passage par C. Les autres rayons partis du même point de l'objet & arrivés au premier objectif auront une première union en un point r de la ligne Ao placé vis-à-vis le point R, & la seconde en un point f' de la ligne oCd', qui répondra dans l'image directe au même point de l'objet, & sortiront de l'oculaire par des directions parallèles à la ligne d'G.

8. L'œil G verra le même point de l'objet par les deux directions opposées GdK, Gd'K'. Ces deux lieux dans les deux images en f, & f' seront diamétralement opposés, & l'égalité des images & des mouvements opposés exige l'égalité des angles DGK, DGK', qui rapportés aux angles visuels primitifs ECI,

 EAI'

EAI' égaux déterminent les deux grossissements : cette égalité exige celle des distances Dd, Dd', & Ff, Ff'.

9. Comme les angles BAo, BCo sont égaux aux angles DCd, DCd' qui sont égaux entr' eux, ceux-là le seront aussi, & la ligne BA sera égale à la ligne BC : pour avoir cette égalité il faut par les principes élémentaires de la Dioptrique, que nous démontrerons au num. 17, que chacune soit double de la distance focale de la lentille B : ainsi on a le théorême suivant : *la distance totale du premier objectif au foyer commun est égale à la distance focale du troisième objectif augmentée du quadruple de celle du second*. Si l'on appelle a, b, c, d les distances focales des lentilles A, B, C, D, on aura pour la première des quatre conditions du num. 3 $AB = BC = 2b$, & $AC = 4b$, $BF = c + 2b$, $AF = c + 4b$.

10. Pour la longueur totale de la lunette depuis le premier objectif jusqu'à l'œil il faut ajouter comme dans les lunettes communes le double de FG, qui est à peu-près le double de la distance focale de l'oculaire.

11. On a par les mêmes principes élémentaires la proportion suivante pour les rayons divergents d'un point R, & réunis au point F par une lentille qui a en L son foyer antérieur : RL : RB : : LB : BF : ici on a $AR = a$, $AL = LB = b$, $AB = BC = 2b$, $CF = c$, & par conséquent $RL = b - a$, $RB = 2b - a$, $LB = b$, $BF = 2b + c$, ce qui en multipliant les termes extrêmes & les moyens donne $2b^2 + bc - 2ab - ac = 2b^2 - ab$: cela se réduit à l'équation suivante donnée par la seconde des mêmes conditions $bc - ab - ac = 0$.

12. Ces trois valeurs sont liées ensemble de manière qu'en ayant choisi deux à volonté, on trouve la troisième. Si l'on prend les deux dernières b & c, on aura $ab + ac = bc$ & $a = \frac{bc}{b+c}$. Ainsi *on trouvera la première en divisant le produit des deux dernières par leur somme*.

13. Si l'on prend aussi comme donnée la distance du premier objectif au foyer commun qui avec l'oculaire détermine la longueur

gueur de la lunette, & qu' on l' appelle f, on aura encore $4b + r = f$, ce qui laissera le choix arbitraire d' une seule, tandis que pour avoir l' effet des deux images contraires & égales on peut en choisir deux à volonté, & ayant déterminé la troisième en tirer aussi la longueur de la lunette.

14. La troisième condition de l' égalité de la lumière exige que la surface découverte de l' anneau ce soit égale à celle du premier objectif aa', & que l' ouverture du second bb' soit assez grande pour recevoir tous les rayons passés par le premier. Les surfaces des cercles sont comme les quarrés des diamètres: ainsi on aura pour le premier objet $cc'^2 - ee'^2 = aa'^2$, & $cc'^2 = ee'^2 + aa'^2$, ce qui donne ce théorême: *le quarré du diamètre du cercle extérieur de l' anneau doit être égal à la somme des quarrés du diamètre de l' intérieur, & de celui de l' ouverture du premier objectif*. Pour le second objet on aura la proportion suivante (*) $aa' = 2Aa : bb' = 2Bb :: AR = a : RB = 2b - a$, ce qui donne ce théorême: *le diamètre de l' ouverture du premier objectif doit être à celui du second, comme la distance focale du premier objectif est à l' excès du double de celle du second sur la même distance focale du premier*.

15. On perdra une partie de lumière transmise par le premier objectif par l' interposition du second, mais il y aura une espèce de compensation par une perte qu' on aura aussi dans l' anneau à cause d' une barre, qui devra soutenir le système des deux premiers objectifs enfermés dans un tube fixé sur un' autre, qui contiendra l' anneau & l' oculaire, comme dans les télescopes il y a une barre, qui soutient le petit miroir. On poura faire l' ouverture du second objectif un peu plus grande pour lui faire parvenir une plus grande quantité des rayons appartenants aux points de l' objet du bord du champ passés par le premier objectif. Les extrêmes de ces rayons passés par a', & r rencontreroient

(*) Les lettres a, & b dans les deux premiers termes de la proportion appartiennent à la figure, & dans les deux derniers sont les valeurs algébriques des deux premiers rayons de sphéricité.

roient la ligne bb' en un point, dont la distance au point b seroit l'augmentation du demi-diamètre Bb: cette augmentation seroit à la distance Rr, comme AR à AB. Quand le champ sera de deux degrés, l'angle $EAI' = RAr$ sera $= 1°$ qui a pour tangente 0,017: ainsi la distance Rr aura 17 millièmes de AR, & par conséquent l'addition seroit la même fraction de AB. Parceque si l'on conçoit une ligne droite tirée du point a' par r jusqu' à sa rencontre avec la ligne $b'b$ prolongée; la distance de cette rencontre au point b sera à la droite rR comme $a'b$ est à $a'r$, ou comme AB à AR. Cette addition sur chaque pied de la distance focale du second objectif porte 5 lignes: mais une pareille addition obligeroit à faire le trou trop grand, & si l'on se bornoit à la seule ouverture bb', il n'y auroit d'autre inconvenient que celui d'une lumière moins vive vers l'extrémité du champ qui est la situation la moins intéressante à plusieurs autres titres.

16. La quatrième condition du num. 3 souffre beaucoup plus de difficulté; pour cette recherche j'employerai la formule suivante de Dioptrique assez connue, qui est aussi le fondement de deux théorémes que j'ai supposé au num. 9 & 11. Si l'on appelle a & $-b$ les rayons de sphéricité d'une lentille convexe des deux côtés, m la raison du sinus d'incidence à celui de l'angle réfracté, p la distance de la lentille au point lumineux qui sera infinie, quand les rayons arrivent parallèles à l'axe, r sa distance au point de leur convergence après la sortie, h la distance focale, qui est la valeur r du cas de rayons parallèles; en faisant $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$, on aura $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f} - \frac{1}{p}$ (*): quand

(*) Cette formule est la même que celle que nous avons trouvé de deux manières différentes dans le second Opuscule du Tome I, & premier de ce Tome-ci, & que nous avons employée toujours dans les autres Opuscules, avec la seule différence, que dans la dénomination pour appliquer plus immédiatement la formule au cas présent on a fait ici $+b$ & $-p$ ce que là avoit été $-b$ & $+p$ à cause de la convexité de la seconde surface & de la divergence des rayons.

quand les rayons arrivent parallèles, p est infini, & $\frac{1}{p} = 0$; on aura alors $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f}$, & ce sera la valeur de $\frac{1}{h}$ d'où l'on tire $f = (m-1)h$, & $\frac{1}{r} = \frac{1}{h} - \frac{1}{p}$.

17. Quand p est $= r$, on aura $\frac{1}{h} = \frac{2}{p}$ & $p = 2h = r$. C'est le cas du num. 9, où les rayons partis du point A doivent se réunir en C à la même distance de la lentille, & chacune de ces distances doit être double de sa distance focale. Mais la même formule donne $\frac{1}{r} = \frac{p-h}{ph}$, & par conséquent $p - h : p :: h : r$. Or pour les rayons partis du point R on a la distance focale $h = LB$, $BF = r$, $RB = p$, & par conséquent $RL = p - h$, ce qui donne la proportion employée dans le num. 11, c'est-à-dire $RL : RB :: LB : BF$.

18. Pour l'erreur de réfrangibilité en différentiant la formule $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f} - \frac{1}{p}$, où la seule f est constante, on aura $-\frac{dr}{r^2} = \frac{dm}{f} + \frac{dp}{p^2} = \frac{dm}{(m-1)h} + \frac{dp}{p^2}$, & par conséquent $dr = -\frac{r^2 dm}{(m-1)h} - \frac{r^2 dp}{p^2}$. Mais dans le cas des rayons parallèles la formule étant $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f}$, on aura seulement $-dr = \frac{r^2 dm}{(m-1)h}$, & comme alors r est $= h$, on aura $dr = -\frac{hdm}{m-1}$: celle-ci servira pour le premier & le troisième objectif, qui reçoivent les rayons sensiblement parallèles, la précédente entière pour le second, qui les reçoit divergents du point R, différent par rapport aux différentes espèces de rayons, ce qu'introduit la différence dp: pour dm je prend la différence de la valeur m appartenante aux rayons extrêmes, qui pourtant s'évanouira à la fin du calcul.

19. La valeur dr donne la distance des deux foyers F dans l' axe:

axe : cette distance produit dans le plan perpendiculaire à l'axe, qui reçoit l'image de l'objet la moins inexacte, la dispersion de toutes les espèces de rayons partis d'un même point de l'objet par un petit cercle qui ne dépend pas seulement de la distance des deux foyers pris dans le même axe, mais aussi des deux ouvertures bb', cc', & des deux distances BF, CF: pour déterminer les diamètres de ces deux cercles, & comparer par-là les deux erreurs de réfrangibilité appartenantes aux deux espèces des lunettes réunies dans cet instrument, j'employerai la fig 2. Le centre de la lentille est M, le diamètre de son ouverture (*) mm', N le foyer des rayons les moins réfrangibles, N' celui de plus réfrangibles, & on aura $MN = r$, $NN' = dr$: P, P' sont les rencontres des rayons mN, m'N', & mN', m'N : PP' sera le diamètre du plus petit des cercles qui contiennent tous les rayons, parcequ'avant cet endroit les rayons mN, m'N seront plus éloignés entr'eux, & après les rayons mN', m'N': ce diamètre sera perpendiculaire à l'axe MN, & si l'on conçoit une ligne NQ perpendiculaire au même axe, qui rencontre en Q le rayon mN', cette ligne sera sensiblement égale au même diamètre PP' à cause de la petitesse de l'angle NmN'. En faisant $mm' = u$, on aura la proportion suivante $MN = r : NN' = dr :: mm' = u : NQ = \frac{udr}{r}$.

20. En appellant dans la fig. 1 c, c', c'' les diamètres des ouvertures des deux premiers objectifs, & celui du cercle extérieur de l'anneau du troisième, on aura pour le premier & troisième objectif $dr = -\frac{hdm}{m-1}$ (num. 18). Pour ce dernier on aura $h = r = c$, $u = c''$ ce qui fait le diamètre de son erreur $=$ $-c''cdm$

(*) On a tout ce procédé dans l'*Additamentum* au supplément du second Opuscule de ce Tome : mais on le répète ici, parcequ'on avoit déjà fait cet Opuscule indépendemment de l'autre. Là s'agissoit de l'erreur d'un seul objectif, ici on l'applique aussi à la somme des erreurs produites par deux consécutives.

$- \frac{e'''cdm}{c(m-1)} = - \frac{e'''dm}{m-1}$. Pour le premier on aura la différence de AR $= dr = - \frac{adm}{m-1}$, parceque son h est $= a$. Celle-là prise positivement sera la valeur dp par rapport au second objectif, parceque la valeur dr du premier est la diminution de la ligne AR, qui devient augmentation de la ligne BR $= p$.

21. Or pour le diamètre du cercle de l'erreur en F dans l'image formée par cet objectif on aura $\frac{udr}{r} = \frac{e'dr}{r}$: dans la valeur $dr = - \frac{r^2dm}{(m-1)h} - \frac{r^2dp}{p^2}$, qui appartient à cet objectif, & donne $\frac{dr}{r} = - \frac{rdm}{(m-1)h} - \frac{rdp}{p^2}$, on a $r =$ BF $= 2b + c$, $h = b$, $p =$ BR $= 2b - a$, & comme on a trouvé $dp = \frac{adm}{m-1}$, on aura cette valeur $= - \frac{(2b+c)dm}{(m-1)b} - \frac{(2b+c)adm}{(2b-a)^2(m-1)}$, ce qui fait le diamètre de ce cercle $- \frac{e'dr}{r} = - \frac{e'(2b+c)dm}{(m-1)b} - \frac{e'(2b+c)adm}{(2b-a)^2(m-1)}$. L'égalité de ce diamètre avec le précédent $- \frac{e'''dm}{m-1}$ donne le rapport des ouvertures des deux derniers objectifs $\frac{e'''}{e'} = 2 + \frac{c}{b} + \frac{a(2b+c)}{(2b-a)^2}$.

22. De là on tire aisément le rapport du troisième diamètre e''' au premier e qui vient beaucoup plus simple. On a dans le num. 14 la proportion qui donne en lettres de la figure $\frac{bb'}{aa'}$, c'est-à-dire en lettres algébriques $\frac{e'}{e} = \frac{2b-a}{a}$ aussi en lettres algébriques. En multipliant cette fraction par la précédente, on aura $\frac{e'''}{e} = \frac{2(2b-a)}{a} + \frac{c}{b} \times \frac{2b-a}{a} + \frac{2b+c}{2b-a}$. Mais par le num. 12 nous avons $a = \frac{bc}{b+c}$, d'où l'on tire $2b - a = \frac{2b^2 + bc}{b+c} =$

 $b(2b+c)$

$\frac{b(2b+c)}{b+c}$ & $\frac{2b-a}{a} = \frac{2b+c}{c}$. Ainsi on aura d' abord $\frac{c''}{c} = \frac{2b+c}{b} \times \frac{2b-a}{a} + \frac{2b+c}{2b-a}$, & après $= \frac{(2b+c)^2}{bc} + \frac{b+c}{b} = \frac{4b^2+4bc+c^2}{bc} + 1 + \frac{c}{b} = \frac{4b}{c} + 4 + \frac{c}{b} + 1 + \frac{c}{b} = 5 + \frac{4b}{c} + \frac{2c}{b}$.

23. C'est la condition qui embarrasse le plus & qui fait voir l' imperfection nécessaire de cette espèce de lunette. Si tous les trois objectifs sont convexes, les valeurs a, b, c étant toutes positives, tous les trois termes de la valeur $\frac{c''}{c}$ sont positifs & la même valeur excessivement trop grande. Or on ne peut pas se dispenser de les faire convexes tous les trois. Le troisième le doit être nécessairement pour former l' image inverse comme dans les lunettes ordinaires astronomiques à deux verres : le second pour rassembler les rayons l'A dans un point de l' axe avant leur arrivée à l' oculaire, ce qui est nécessaire pour faire que l'autre image soit directe. Si le premier objectif étoit concave, il feroit aller le point R du côté opposé du point A de manière que la distance RB seroit plus grande que l' autre AB, & par conséquent le second objectif réuniroit plus-tôt dans l' axe les rayons qui tombent parallèles sur le premier objectif que les rayons passés par A. Ceux-ci seroient réunis chacun avec ses compagnons avant d'arriver à l' axe, & l' image seroit inverse, non directe.

24. Ainsi il est indispensable de faire tous les trois objectifs convexes. Alors on voit bien que dans la formule trouvée outre le nombre 5 positif, les deux autres termes doivent aussi être positifs, & même on ne peut pas faire petit le dernier. On doit faire la distance focale b du second objectif considérablement plus petite par rapport à celle du troisième $= c$, parcequ' autrement la longueur totale de la double lunette par l'addition de AC $= 4b$ deviendroit trop longue tandis que l' effet de l' extérieure formée par le troisième objectif ne pourroit être que très-foible, par-

parcequ'elle ne répond qu'à une lunette ordinaire dont l'objectif a pour la distance focale la seule CF $= c$, & même elle ne doit être beaucoup plus foible parce qu'on seroit obligé d'un côté à donner plus d'ouverture à son objectif pour y faire le trou & laisser assez de surface à l'anneau, & de l'autre ce trou ne diminueroit point la grandeur de l'erreur de réfrangibilité qui seroit la même comme si le trou étoit rempli, ce qu'on voit aisément dans la fig. 2. Le trou ne diminue que l'erreur de sphéricité qu'on auroit dans l'objectif entier : ainsi le dernier terme $\frac{2c}{b}$ doit être plus grand que 2 & considérablement plus grand : & même si celui-là n'est pas grand, le second $\frac{4b}{c}$ le deviendra.

25. On ne pourra jamais avoir qu'une lunette très-mauvaise, si l'on fait chaque objectif simple comme dans les lunettes ordinaires. Elle ne vaudra rien même en faisant les deux premiers objectifs acromatiques, & elle sera bien foible par rapport à sa longueur, même si l'on fait tous les trois objectifs acromatiques.

26. Pour en être bien convaincu il suffira d'appliquer la théorie à quelqu'exemple. La combinaison qui peut paroître une des moins mauvaises est celle qui fait $c = 3b$ pour ne pas faire le troisième objectif de foyer trop court, & ne pas trop allonger la lunette, ou faire trop petite la distance focale du second qui rend encore plus petite celle du premier. En faisant $c = 3b$, on aura $a = \frac{bc}{b+c} = \frac{3}{4}b$: ainsi les trois foyers des trois objectifs seront en raison de 3, 4, 12.

27. On verra la grande imperfection même en faisant les deux premiers objectifs de l'espèce qu'on appelle acromatiques, quoiqu'ils ne réunissent jamais exactement toutes les couleurs à la fois : on évitera la grande inégalité des ouvertures n'ayant point d'égard à la quatrième condition de l'erreur de réfrangibilité, comme si celle du trosième objectif simple étoit compensée par ce qui reste d'erreur dans les deux premiers & qui n'est pas si

peu à cause de la petitesse des rayons des leurs sphéricités par rapport à la distance de l'image.

28. On pourra déterminer les ouvertures des objectifs dans ce cas-là de manière à donner à la lunette du troisième objectif le plus grand grossissement qu'on puisse concilier avec la distinction d'une lunette ordinaire d'un même foyer de deux pieds. Comme le trou oblige à faire le diamètre extérieur de l'anneau que nous avons appellé e'' plus grand que dans les lunettes qui ont l'objectif entier ; il faudra diminuer le grossissement à proportion de l'augmentation de ce diamètre, parceque le diamètre de l'erreur de réfrangibilité selon la formule $\frac{e''dm}{m-1}$ (num. 20) est proportionel à ce diamètre indépendemment de la longueur de la distance focale : il faudra donner au premier objectif l'ouverture qui répond à ce grossissement pour avoir la même clarté, & pour en avoir assez, on ne peut pas supposer le diamètre de cette ouverture plus petit que d'un nombre des lignes égal au tiers de celui qui exprime le même grossissement : le second sera égal à $\frac{5}{3}$ de celui-là, qui est la valeur de $\frac{BR}{AR} = \frac{2b-a}{a} = \frac{8-3}{3}$: on fera le diamètre le plus petit que on peut le faire sans intercepter les rayons transmis par le second objectif : ainsi nous le supposerons ici même égal à son diamètre en négligeant l'épaisseur du tube qui le contiendra.

29. Le diamètre de l'ouverture du premier objectif étant e on aura le second $e' = \frac{5}{3}e$, & le quarré du diamètre extérieur de l'anneau $e''^2 = \frac{25}{9}e^2 + e^2$ (num. 14) $= \frac{34}{9}e^2$: ainsi ce diamètre sera $= 1,94e$. Si l'on fait le troisième objectif de 2 pieds de foyer, le second en aura 8 pouces, le troisième 6, la longueur de la lunette composée aura, outre le double foyer de l'oculaire, $c + 4b = 24 + 4 \times 8 = 56$ pouces, quoique l'extérieure à objectif simple percé ne sera qu'une lunette de deux pieds, mais trop inférieure aux ordinaires à cause du diamètre de l'ouverture augmenté pour y avoir le trou, comm'on verra par le calcul suivant.

30. On

30. On ne peut pas donner à une lunette ordinaire de deux pieds de foyer plus de 24 de grossissement, qui porte 8 lignes d'ouverture : mais en changeant celle-ci en celle de $1,94e$, il faut changer le grossissement en la même raison inverse à cause de l'erreur de réfrangibilité que nous regardons ici, & qui est proportionelle au seul diamètre de l'ouverture, comme nous venons de dire. En variant le grossissement il faut varier le diamètre de l'ouverture en la même raison : ainsi pour le premier objectif à la place du diamètre 8, qu'on lui auroit donné pour avoir la quantité de lumière égale à celle de cette lunette de deux pieds, il faudra prendre la valeur e quatrième proportionelle après $1,94e$, 8, & encore 8, ce qui donnera $e = \frac{64}{1,94e}$: on en tire $e^2 = \frac{64}{1,94} = 32,99$, $e = 5,75$, $e' = \frac{5}{3}e = 9,58$, $e'' = 1,94$, $e = 11,15$. Le cercle intérieur de l'anneau dont nous avons supposé le diamètre égal à celui du second objectif e' laissera pour le double de sa largeur $e'' - e' = 1,57$: ainsi la largeur même reste plus petite que d'une ligne, ce qui est bien excessivement peu. Le nouveau grossissement devra être quatrième proportionel après l'ouverture 8, le grossissement précedent $= 24$, & la nouvelle ouverture $e = 5,75$, qui devient $= 3 \times 5,75 = 17,25$. En divisant la distance focale c de deux pieds $= 2 \times 144 = 288$ par le grossissement 17,25 on aura la distance focale de l'oculaire $= 16,7$, parceque dans les lunettes simples le grossissement est égal à la distance focale de l'objectif divisée par celle de l'oculaire, & par conséquent on doit avoir celle-ci en divisant celle-là par le grossissement.

31. On voit bien l'imperfection de cette espèce de lunette qui étant presque de cinq pieds de longueur, & même ayant les deux premiers objectifs acromatiques n'arrive pas à grossir 17 fois, si l'on veut la clarté & la distinction qu'on a dans les lunettes ordinaires de deux pieds. Si l'on veut employer tous les trois objectifs simples, la force de la lunette devient encore incomparablement plus petite. Pour conserver la clarté & distinction des lunet-

nettes ordinaires avec l'égalité des images, de leur lumière, de leur distinction, il faudroit employer le diamètre intérieur de l' anneau beaucoup plus grand que celui du second objectif. On aura comme auparavant $e' = \frac{5}{3}e$, mais en appliquant dans la formule $\frac{e''}{e} = 5 + \frac{4b}{c} + \frac{2c}{b}$ (num. 22.) les nombres 1 & 3 pour b & c on aura $e'' = 12\frac{1}{3}e = \frac{37e}{3}$, & par conséquent $e = \frac{3 \times 64}{37e}$, comme dans le numero précédent, $e^2 = \frac{192}{37} = 5{,}19$, $e = 2{,}28$, ce qui réduit le grossissement à 7 seulement donné par $\frac{24 \times 2{,}28}{8} = 6{,}84$. Le diamètre e' de l'ouverture du second objectif sera $= \frac{5}{3}e = 3{,}8$. Mais celle du cercle extérieur du troisième $e'' = 12\frac{1}{3}e$ devient excessivement grand $= 28{,}12$. Le quarré de l'intérieur, pour avoir l'égalité de la surface de l'anneau avec celle du premier objectif, ôté du quarré de l'extérieur doit laisser (num. 14) le quarré du diamètre de l' ouverture du même premier objectif : ainsi tout au contraire ce quarré $= e''^2 - e^2$, & par conséquent le diamètre même $= 28{,}03$. Celui-ci ôté de $28{,}12$, ne laisseroit pour le double de la largeur que $0{,}09$, quantité insensible. Même le diamètre du cercle intérieur excessivement plus grand que le diamètre e' laisseroit un grand vide à remplir pour empêcher les rayons directs d'aller jusqu'à l'oculaire.

32. Ces désordres viennent de la grandeur de l'erreur de réfrangibilité dans cette espèce de lunette intérieure & de la petitesse de l'ouverture du premier objectif. On ne pourroit pas donner à celui-ci plus d' ouverture, ni augmenter son grossissement sans introduire de la confusion dans son image : on pourroit bien diminuer les diamètres des deux cercles du troisième objectif, en augmentant ainsi sa distinction & diminuant la grosseur du tube de la lunette : mais néanmoins on n'auroit rien de satisfaisant. Si l'on réduisoit le diamètre intérieur à l'égalité avec celui du second objectif, qui est de 3,80, on auroit le diamètre

de

de l'extérieur $= \sqrt{(2{,}28 \times 2{,}28 + 3{,}8 \times 3{,}8)} = 4{,}43$, qui laisseroit pour la double largeur de l'anneau $0{,}63$: mais on voit bien que tout celà ne vaut rien.

33. On pourroit obtenir quelque chose de moins mauvais en faisant aussi le troisième objectif acromatique : mais la théorie ne donnera sur cet object rien d'assez déterminé. Les objectifs formés de deux seules espèces de verre ne rassemblent pas dans un seul foyer que deux seules espèces de rayons, tandis que les autres débordent encore, bien moins que dans les lunettes ordinaires, mais assez pour introduire de la confusion, quand on veut pousser trop le grossissement qui demande une ouverture trop forte, & on ne peut pas déterminer si aisément, & peut-être encore on ne peut pas absolument déterminer, la quantité précise de ce débordement. Il y a dans les formules, comme j'ai indiqué ci-dessus, des termes inférieurs négligés, dont si l'on vouloit tenir compte, le calcul seroit immense : ainsi on ne peut pas déterminer par la théorie la grandeur du plus petit des cercles qui contiennent tous les rayons. Mais on voit bien que l'augmentation du diamètre extérieur du troisième objectif exigé par le trou doit toujours rendre trop défectueuse la lunette extérieure, qui donne l'image inverse, quoique acromatique, & la petitesse des rayons de sphéricité des deux premiers par rapport à la distance du foyer rend aussi mauvaise l'intérieure, qui la donne directe. Ainsi trois objectifs acromatiques seroient mal employés pour un instrument de cette espèce, qui d'ailleurs, s'il étoit égal en bonté aux lunettes ordinaires, n'auroit aucun usage pour l'Astronomie, parcequ'on peut démontrer aisément que par les instrumens, qui sont en usage, on peut avoir ou avec la même précision, ou même avec une précision beaucoup plus grande, tout ce qu'on pourroit déterminer par cette double lunette.

34. On pourroit changer la position des deux premiers objectifs & le rapport des leurs distances focales entr'elles, & conserver l'égalité des deux images en faisant que les rayons I'A*o* sortis du second objectif coupent l'axe au-dessous, ou au-dessus du centre C du troisième : mais alors l'oculaire *dd'* ne les feroit pas sor-

sortir avec leurs compagnons dirigés au point G de manière à entrer dans l' œil avec les rayons IC*d* : une seule partie de ses rayons peu inclinée à l' axe, c'est-à-dire appartenants aux points de l' objet peu éloignés du centre du champ entreroit par la prunelle, ce qui rendroit le champ d' une des deux lunettes beaucoup plus petit que celui de l' autre, & très-mal tranché. Il faut faire passer ces rayons par C, ce qui oblige à employer les déterminations que j' ai données ci-dessus.

35. J' ajouterai seulement ici ce qu' appartient à la manière de placer les trois objectifs & l' oculaire. Un tube extérieur contiendra en *cc'* l' anneau *cec'e'* : un second tube contiendra les deux objectifs *aa'*, *bb'*, & il arrivera à l' anneau de manière à le toucher en *e*, *e'* pour empêcher le passage aux rayons directs entre lui & le même anneau, qui ne doivent pas arriver à l' oculaire, mais il ne débordera pas beaucoup pour ne pas intercepter les rayons réfractés par l' anneau. Celui-ci sera attaché au premier tube par une petite barre, qu' on devra faire la plus mince qu' on peut, sauve une bonne solidité, pour intercepter le moins de rayons qu' on peut à l' anneau. Un troisième tube contiendra l' oculaire *dd'*, & il sera mobile dans le second pour les différentes vues : il aura à l' ordinaire l' ouverture G pour l' œil.

36. Le diaphragme doit être placé en *ff'*, & il doit avoir un diamètre un peu plus petit que l' ouverture *dd'* de l' oculaire. Ce diamètre détermine le champ : $\frac{1}{57}$ de la distance focale du troisième objectif en donnera un degré : ainsi pour la distance focale de 24 pouces, que nous avons supposé ici, 10 lignes donneroient deux degrés. Si le diaphragme doit avoir des fils fixes, ou une rhomboïde, comme on le pratique pour certaines observations astronomiques, il faut le placer précisement dans le lieu de l' image *ff'* pour éviter celle qu' on appelle la parallaxe de l' œil.

37. Un fil diamétral qui passe par le centre de la lunette est nécessaire, & il faut l' amener à la direction du mouvement diurne, si l' on veut voir réunies les deux images d' une étoile. Quand même les axes des deux lunettes seront bien placés à n'

en

en faire qu' un seul, l'union des deux images ne peut se faire que dans le centre du champ par où l'axe même doit passer, & on ne fera pas parcourir un diamètre du même champ aux deux images, si on les place dans ce champ au hazard sans la direction de ce fil. Pour le soleil ce sera un hazard, si l' on voit bien réunies les deux images, ce qui n' arrivera que quand son centre décrit exactement un diamètre du champ. Comme on ne voit pas ce centre, il faudroit avoir deux fils mobiles de manière à s'éloigner également du centre du champ, & les ayant dirigés selon le mouvement diurne y enfermer le disque du soleil en attouchement. Alors on verra le double attouchement direct des deux disques. C' est la seule observation par laquelle on pourroit croire utile un tel instrument. Si l'on veut déterminer le diamètre apparent du soleil par le temps simple de son passage par le fil perpendiculaire au mouvement diurne, on prend la mesure par cet intervalle réduit en minutes & secondes auparavant du parallèle, & après du grand cercle, tandis que le temps écoulé entre les deux contacts donneroit le double de cette mesure. Mais la manière d'avoir une mesure exacte du diamètre du soleil n'est pas celle d'observer le temps du passage par le fil, dans lequel l' erreur d' une seconde de temps donne 15 secondes du cercle, & ici une seconde d' erreur dans l' intervalle entre les deux contacts en donneroit $7\frac{1}{2}$. On prend le diamètre du soleil par un micromètre à un fil mobile ou à deux.

38. On croiroit qu' on pourroit avoir un avantage par cette lunette, parcequ'on y voit les deux contacts des deux disques du soleil & la rencontre des deux images d'une étoile sans avoir besoin d'aucun fil. Mais le moment de la rencontre des deux images de l' étoile & la grandeur du diamètre apparent du soleil ne sera pas donnée par les deux contacts des mêmes disques, si l' étoile ou le centre du soleil ne passe exactement par le centre du champ, & comme j' ai déjà indiqué, on ne réussira pas que par un grand hazard à donner cette position à l' étoile ou au centre du soleil sans le secours d' un ou de deux fils. C' est le micromètre objectif qui donne la mesure du diamètre apparent

 sans

sans aucun besoin de fils & sans dépendre du temps, qui étant employé ici en empêche l'exactitude.

39. On prétend qu'une lunette de cette espèce doit être avantageuse, par le double mouvement avec les directions contraires qui rend la vîtesse respective plus grande du double que la vîtesse absolue des lunettes communes : mais comme par les lunettes communes de la même longueur on peut avoir des grossissements plus forts au de-là du double, on peut compenser cette perte, & même y gagner, en donnant une augmentation au double plus forte, & encore bien d'avantage.

40. Ainsi c'est un instrument qui ne porte aucun avantage à l'Astronomie, & qui a tant d'imperfection en lui même. On ne peut avoir rien de tolérable, si l'on n'employe trois objectifs acromatiques tous les trois, & même avec ce secours on ne peut avoir qu'un effet beaucoup inférieur à celui d'une lunette ordinaire d'un seul objectif acromatique, & même d'une plus courte de plus du double.

OPU-

OPUSCULUM VI.

DE GLOBULIS NIGRIS TRANSLATIS PER DISCUM SOLIS CUM EPISTOLA GALLICA AD EJUS PHÆNOMENI OBSERVATOREM.

1. COMMUNICAVERAT mihi singulare phænomenum, quod in sole viderat celeberrimus Astronomus, & diligentissimus Observator Messierius interrogans, an dignum censerem, quod inter Regiæ Scientiarum Academiæ Monumenta vulgandum proponeret. Dum in meridie macularum solarium observationes persequeretur, sese ipsi repente obtulit ingens globulorum numerus traductus per ejus discum directionibus parallelis, quâ eâdem directione albicantes nubeculæ ferebantur. Apparebant satis distincti, eo autem numero, ut identidem ipsas solis maculas aspectui subducerent: per totum discum diffusi progrediebantur motu apparenti ita inclinato ad horizontem, ut viderentur oblique ascendere per ipsum discum: extra ipsum inde egressi jam ultra non apparebant. Notavit directionem venti, ac ejus obliqui motus tam directionem, quam celeritatem, tum magnitudinem globulorum, qui occupabant secunda $2\frac{1}{2}$ disci ipsius, binis vero secundis temporis ipsius diametrum percurrebant. Telescopium erat acromaticum egregium habens distantiam focalem objectivi pollicum 40, ac totidem linearum aperturam; id autem pro macularum solarium observatione aptaverat. Cum ipsi eâdem tubi constitutione, & ii globuli æque distincti apparerent, & solis limbus, & eæ maculæ; post phænomeni finem telescopium idem direxit ad duo objecta terrestria diversæ distantiæ cognitæ, & notavit, quam diligenter ejusmodi observatio permitteret, quanta esset productio tubi necessaria ad videnda ea objecta bene distincta: propiora enim productionem requirunt majorem: suspicabatur autem, eos globulos fuisse vel pluviæ guttas, quæ formam in-

 du-

ducunt rotundam, ut satis demonstrat iridis natura, vel grandinis granula.

2. Dignissimum censui phænomenum, quod posteritati transmitteretur, non ob singularitatem tantummodo, nullum enim ejus generis uspiam occurrit in Astronomicis monumentis, licet sæpissime accidat, ut sol trans pluviam labentem, & trans nebulas per telescopia transpiciatur; sed etiam, quod opportunam præberet occasionem cognoscendæ intimius naturæ visionis acquisitæ per telescopia, & inquirendi in ipsam originem inusitati phænomeni, ac interpositorum corporum distantiam a terra. Perquisitione institutâ, perscripsi ad ipsum fusiorem epistolam, qua quidquid eo pertinet diligentissime persecutus, omnia mihi videor non infeliciter evolvisse, & luculenter exposuisse. Ostendo, per telescopia videri non posse in sole globos, qui diametrum habeant aliquanto minorem aperturâ objectivi, quam ob causam pluviales guttæ, aut usitatæ grandinis moleculæ in ejus disco apparere non possunt, nec vero a se invicem separati, ac distincti ii exigui globuli, quorum multitudo nebulam, aut nubem efformat, nec vero aves prætervolantes exhibere globorum formam, ac limites habere suæ figuræ determinatos, atque distinctos: unde videtur patenter consequi, eam fuisse inusitatæ magnitudinis grandinem, quæ cum rarissima sit cælo etiam nubilo, ac procelloso, nunquam antea acciderit, ut in Astronomi, solem per telescopia observantis, oculos incurrerit.

3. Obesse videbatur ascensus apparens, qui tamen cum vero descensu obliquo facile conjungi potest: quamobrem casus omnes evolvi, qui veri, & apparentis motus oppositionem exhibere possint, ac in ipsam inquisivi directionem motus veri, qui quidem accurate determinari posset, si non solum directio ascensionis obliquæ apparentis, sed etiam venti directio, minus crassâ determinatione obtineri potuisset. Quod ad distinctionem pertinet, ostendo, quam diversa sit origo confusionis, quæ habetur in objectorum marginibus visis per telescopia, cum eorum visio fit per radios ab iis digressos, & cum ea radios alterius post ipsa positi ita intercipiunt, ut in iis instar nigrantis maculæ debeant apparere.

rere. Exhibeo limites distantiæ, quæ videri potest necessaria ad habendos margines ejusmodi maculæ satis distinctos, & indico observationes terrestres, per quas limites iidem possent accuratius definiri.

4. Cum ea omnia & ad Opticam pertineant, & ad telescopiorum theoriam, quæ argumenta in hisce binis voluminibus excolenda suscepi, ut indicavi etiam in præcedentis Opusculi præfatiuncula, epistolam illam hìc exhibeo ita, ut tum gallico sermone perscripta fuit, & ipsi tradita. Is ejus compendium cum ipsa phænomeni observatione, & schemate adnexo vulgavit in Monumentis Academiæ pro anno 1777 impressis anno 1780.

L E T T R E

De M. l' Abbé Boscovich à M. Messier sur son observation singulière des petits globules noirs qu' il a vu monter obliquement sur le disque du soleil.

1. J'AI examiné par les principes de l' Optique le phénomène bien singulier que vous avez observé sur le disque du soleil, & je trouve qu' il mérite toute l' attention des Physiciens. Vous y avez vu pendant plusieurs minutes de temps une quantité prodigieuse de globules obscurs & distincts, qui étoient bien peu éloignés les uns des autres & montoient obliquement sur le même disque, qui en étoit tout rempli : la lunette qui renversoit les objets représentoit une descente. Elle a dans son objectif 40 lignes d' ouverture : vous l' aviez adaptée à l' observation des taches du soleil, qui y paroissoient avec la même distinction : le soleil étoit au méridien à l' élévation de 64 degrés : le mouvement de tous ces globules se faisoit par des lignes parallèles inclinées au fil horizontal de 22 degrés & demi : un nuage blanchâtre passoit devant le disque par un vent de O. S. O, dans une direction à peu-près la même que celle des globules. Vous avez jugé le diamètre de ces globules qui paroissoient tous égaux de 2 secondes & demi, & le temps du passage de ceux qui

qui passoient par le diamètre, de 2 secondes: quelque fois il y en avoit une telle quantité qu' ils empêchoient de bien voir les taches, mais ils disparoissoient à mesure qu' ils sortoient du disque.

2. Comme on sait que pour voir les objets peu éloignés avec distinction, il faut allonger la lunette, & vous voyez vos globules également distincts que les taches du soleil, vous avez dirigé votre lunette à différents objets terrestres pour donner occasion de porter quelque jugement sur leur distance: pour voir avec distinction un objet éloigné de 2075 toises, vous avez dû allonger le tube de $\frac{6}{12}$ de ligne, & pour voir après avec distinction un autre éloigné de 285 il vous a fallu l'allonger encore de $\frac{9}{12}$ de plus.

3. Vous avez jugé que vos globules pouvoient être des gouttes de pluie, ou des grains de grêle, & vous dites qu' à l'occasion de cette observation M. Vallot a lu à l' Académie un Mémoire, dans lequel il a fait voir que la montée apparente peut s'accorder avec la descente réelle. Je ne sais pas de quelle manière M. Vallot s'y est pris pour faire voir cet accord: je donnerai ici la détermination générale de tous les cas, dans les quels une montée ou une descente apparente peut s' accorder avec une descente ou montée réelle: mais je trouve que la direction du mouvement réel d' un corps pesant, qui reçoit le mouvement oblique par l'action du vent, est déterminée par ces trois données, la hauteur du soleil, l'obliquité de la montée apparente, & la direction du vent: ces trois données, si on les prend sans aucun changement, donnent ici une montée réelle, non une descente. Pour ce qui appartient à la distinction, la théorie de l'allongement du tube pour les objets peu éloignés n'a pas lieu pour ceux qu'on voit comme de taches obscures sur le disque du soleil, quoique votre expérience sur cet article ne laisse pas d' être utile pour confirmer un' exception de la théorie générale de ces allongements. La théorie de la distinction pour cette espèce d' objets est très-différente, & elle exige un éloignement d' autant plus considérable que l' ouverture de l' objectif est

est grande ; mais elle fait voir qu'on ne peut pas par l'allongement du tube en ôter la confusion qui se trouve , quand la distance n'est pas assez grande .

4. Je trouve par la même théorie , que vos globules doivent être des globes d'un diamètre de plusieurs pouces , qui par conséquent ne pouvoient pas être des gouttes de pluie , qui sont incomparablement plus petites , mais qu'il faut recourir à des grêlons d'une grosseur bien extraordinaire ; on en trouve des exemples , mais ils sont très-rares , & il y reste la difficulté de la montée réelle , qui est exigée par vos données . On peut la diminuer , en changeant un peu la direction de la montée apparente & celle du vent que vous avez déterminées en gros , surtout la seconde , & qui peut avoir été différente dans les différentes hauteurs de l'atmosphère . Mais on ne peut pas changer ces données de manière que l'obliquité de la chûte ne se trouve trop grande pour des masses si lourdes , sur-tout quande il n'y avoit aucune apparence d'un vent bien violent , & qu'il paroit bien extraordinaire qu'on n'a pas entendu parler d'une grêle si terrible , qui pourtant devoit tomber dans Paris , ou très-près de la Ville . Cependant je ne vois pas qu'on puisse expliquer le phénomène , que par cette espèce de gros grêlons . On ne peut pas soupçonner une illusion optique d'un œil fatigué , & je ferai voir qu'une apparence de globules ne peut pas être produite par une bande d'oiseaux , dont le soupçon est détruit encore par la quantité prodigieuse de vos globules .

5. Toutes ces recherches appartiennent à l'Optique , & sont bien intéressantes : je les développerai les unes après les autres avec tout le détail nécessaire , qui fera voir l'utilité de votre observation : vous l'avez jugée avec raison digne d'être présentée à l'Académie , & imprimée parmi ses Mémoires . Votre assiduité à observer , & attention à remarquer tout ce qui est digne d'être remarqué , ont procuré aux Physiciens une observation , qui , à ce que je sache , est unique en son genre .

6. Je commence par la direction du mouvement réel , qui répond à celle de l'apparent . Dans la fig. 3 (Tab. IX) O est l'

œil

œil dans le centre d' une sphère, dont la surface passe par le centre S du soleil, ABCD son cercle horizontal, ASC le demi-cercle vertical, qui passe par le zenith Z & qui dans notre cas étoit le méridien : ainsi le point C étoit celui du vent de sud, & CS l'élévation du soleil : BSD est le demi-cercle perpendiculaire à celui-là, qui passe par l'Est B, & l' Ouvest D, & par-là les deux diamètres AC, BD sont perpendiculaires l'un à l'autre : E est le point de l'objet interposé, qui par la ligne visuelle OE est rapporté au point S : EI, ou EI' est le petit mouvement du même point projetté sur le disque du soleil en F, ou F' par les lignes visuelles OIF, ou OI'F' dans le demi-cercle GSG', qui est l'intersection de la surface de cette sphère avec le plan, qui passe par O, & par le mouvement EI, ou EI', je place le point G dans le demi-cercle BCD, le point G' dans l'opposé BAD, le mouvement EI dans le secteur SOG, EI' dans l'autre SOG'. EH est une ligne perpendiculaire à l' horizon, qui doit tomber à angles droits sur le rayon OC : L est la rencontre de la ligne EI' avec le diamètre G'G, & MO la direction du vent.

7. On voit bien que si le mouvement réel se faisoit dans la ligne SO, le point E paroîtroit immobile en S ; dans tout autre cas il y aura un mouvement apparent. Ce mouvement se fera par le diamètre horizontal du disque, si le réel se fait dans le plan du demi-cercle BSD, dont l' arc en S est perpendiculaire à l' arc du vertical, ainsi le point mobile suivra dans ce cas le fil horizontal du micromètre. Si le mouvement réel se fait dans le plan du cercle vertical ASC, l'apparent suivra le fil perpendiculaire, & il sera une montée ou une descente apparente, selon que le réel sera de même une montée ou une descente. Dans tous les autres cas le mouvement apparent sera oblique par SF', ou par SF. Dans le premier cas il y aura une montée apparente, & dans le second une descente, car l'arc SF' s' élève au dessus du fil horizontal qui suit en S l' arc du demi-cercle BSD vers le zenith Z & l' arc SF se baisse du côté opposé. Dans le triangle sphérique SCG les deux côtés SC, CG étant de la même espèce plus petits qu'un quart de cercle, l'arc SG le sera aussi,

& par

& par conséquent SG' plus grand, tandis que les arcs SD, SB seront de 90 degrés : ainsi l'angle SOG' sera obtus, SOG aigu, & les deux SOB, SOD seront droits. Ce sont les deux lignes tirées du point O, l'une au premier point E du mouvement réel, l'autre horizontalement vers le même côté de ce même mouvement, qui par leur angle décident de la position du mouvement apparent. Cette seconde ligne est OG par rapport au mouvement réel EI, & OG' par rapport à l'autre EI', & il y aura un mouvement apparent horizontal, ou une montée ou une descente apparente, selon que cet angle sera droit, obtus, ou aigu.

8. Pour la position du mouvement réel c'est le rapport de l'angle OEI, ou OEI' au supplément du même angle EOG, ou EOG', qui décide. Il y aura un mouvement réel horizontal, ou une montée ou une descente réelle, selon que cet angle sera égal à ce supplément, ou plus grand ou plus petit : parceque dans le premier cas la ligne du mouvement réel sera parallèle au rayon horizontal OG, ou OG', & dans les deux autres divergente par rapport à celui qui va vers le même côté avec le mouvement réel, ou convergente. On voit bien que chacune des trois conditions du mouvement apparent horizontal, montant, descendant, pourra se combiner avec chacune du mouvement réel.

9. Voyons à présent comment on peut déterminer par nos données, quelle des trois conditions du mouvement réel répondoit dans le cas de votre observation à la montée apparente. La figure est adaptée au cas de la descente réelle. Le mouvement selon la direction EI', qui répond à la montée apparente par SF', est composé du vertical selon la direction EH, & de l'horizontal selon HL : celle-ci étant produite par le vent, sera parallèle à sa direction MO. Si le point M tomboit en G, la ligne HL seroit parallèle au rayon OG', & le point L allant à l'infini le mouvement EI' seroit horizontal. Pour faire une descente réelle il faut que l'arc CM soit plus petit que CG, comme il est exprimé dans la figure, ce qui fait aller le point L vers G' par rapport au centre O : que si CM en étoit plus grand, comme C*m*, alors le

point L iroit du côté opposé en *l*, & à la place de la descente par El' il y auroit une montée par E*i*. Si le vent a été exactement O.S.O; l'arc CM sera $= \frac{3}{4} \times 90^\circ = 67^\circ.30'$. Il y reste à déterminer l'arc CG.

10. Dans le triangle rectangle SCG le côté SC est la hauteur du soleil de 64°, & l'angle GSC = ASG' est le complément de l'angle BSF', élévation apparente de la ligne SF' au-dessus de l'arc SB horizontal en S: Cette élévation étant $= 22^\circ.30'$, l'angle GSC sera de $67^\circ.30'$. Ainsi on aura *tan*.CG = *tan*.GSC × *sin*.SC = *tan*.67°.30' × *sin*.64°, & CG = 65°.15'. Cela feroit cet arc plus petit de 2°.15', que celui qui est donné par la direction du vent, qui à la place d'être CM seroit C*m*, avec la montée réelle par E*i*. Mais comme ce vent n'a été déterminé qu'en gros, & qu'entre lui, & le S.O. il y a 22°.30', on peut soupçonner qu'il étoit éloigné de ce point vers le sud de plusieurs degrés. S'il en a été éloigné de 2°.15', le mouvement réel a été horizontal; si plus encore, celui-ci a été une descente.

11. La direction aussi de la montée apparente doit avoir été déterminée par un à-peu-près, mais avec beaucoup plus de précision. Si l'on y suppose l'obliquité de 20 degrés, on auroit CG = 67°.57', un peu plus grande que CM, même dans la supposition de l'exactitude du vent de O.S.O, avec une petite descente réelle. Si l'on y ajoute la différence du vent dans les différentes hauteurs de l'atmosphère, on verra toujours mieux qu'on ne peut tirer rien de précis de ce côté-la. Pourtant comme il n'y avoit aucune marque d'un temps orageux, il y a toute la probabilité pour croire, que la direction du vent qui poussoit les globes tombants, si c'étoit des grêlons, n'étoit pas trop éloignée de celle qui poussoit le nuage blanchâtre, & que cette direction étoit moins éloignée du O.S.O, que du S.O, on en tirera toujours que l'inclinaison du mouvement réel à l'horizon étoit bien grande. Si l'on rapproche la direction du vent éloignée du sud de 10 degrés, & que l'on suppose l'élévation du mouvement apparent de 20 degrés seulement, ce qui paroit qu'on puisse s'éloigner le plus de l'estime de l'observation, on

aura

aura l'arc CG $= 67^{\circ}.57'$, & le CM $= 57^{\circ}.30'$, ce qui donnera MG $= 10^{\circ}.27'$.

12. Dans cette supposition on déterminera l'obliquité du mouvement réel de la manière suivante. On a ces deux proportions EH : OH :: *tan*.CS : 1, & OH : HL :: *sin*.OLH $=$ *sin*.GM : *sin*.HOL $=$ *sin*.CG : on tire cette troisième EH : HL :: *tan*. CS $\times$ *sin*.GM : *sin*.CG :: *tan*.64 $\times$ *sin*. $10^{\circ}.27'$: *sin*. $67^{\circ}.57'$ :: 1000 : 2268. Celle-ci seroit la raison du mouvement vertical produit par la gravité à l'horizontal produit par le vent, & ce dernier nombre seroit la cotangente de l'angle ELH, qui donne l'obliquité du mouvement réel au rayon $=$ 1000 : elle resteroit $= 77^{\circ}.13'$. Cette raison & cette obliquité sont trop fortes pour des masses si lourdes, comme nous allons voir, qu'on doit supposer les grêlons, & pourtant nous nous sommes éloignés un peu trop de l'obliquité apparente & de la direction du vent estimées par l'observation : en s'approchant de ces données l'obliquité & l'effet de la force du vent se trouvent excessivement augmentés. Cette grande obliquité est encore conforme à la grande vîtesse, avec laquelle ces taches obscures ont traversé le diamètre du disque, & à la grandeur apparente conservée dans la traversée. Si la direction du mouvement se fût approchée de la ligne EO, le mouvement apparent auroit été beaucoup plus lent, & un approchement considérable auroit augmenté le diamètre apparent dans le temps même de la descente.

13. Avant de passer à la détermination de la grandeur de ces masses, je remarquerai seulement que si l'on suppose le point G placé dans l'arc CB, on aura toujours une montée réelle, ce qui donneroit encore plus d'embarras : mais alors la direction du mouvement apparent auroit été trop éloignée de celle du vent, pour pouvoir les estimer à-peu-près les mêmes.

14. Pour déterminer ce qui appartient à la grandeur nécessaire pour faire qu'un globe interposé entre la lunette & le soleil puisse être aperçu sur son disque comme une tache obscure, il faut faire attention à l'ouverture de l'objectif qui reçoit les rayons partis de tous les points du disque, & en forment l'image

dans le foyer du même objectif. Si le diamètre du globe est plus petit que le diamètre de cette ouverture, il n'y aura aucun point de ce disque dont tous les rayons soient interceptés. Ainsi pour cacher tout à fait un seul point du disque, le diamètre du globe doit être égal à celui de l'ouverture, qui dans votre excellente lunette étoit de 40 lignes, & il faut augmenter ce diamètre de beaucoup, pour avoir une tache de quelques secondes de diamètre apparent qui réponde à une partie égale du disque cachée par ce globe.

15. Dans la fig.4 AB soit un diamètre du disque du soleil, C le centre de l'ouverture DE considérée dans le même plan avec AB, GH le diamètre du globe dont le centre en I, F la rencontre de la droite CI avec le même disque, *f* le foyer des rayons partis de ce point, qui après avoir été réfractés par l'objectif s'y réunissent dans la même ligne: K, L soit la rencontre des lignes FG, FH avec l'objectif DE, *ab* l'image de tout le disque. On voit bien qu'à cause de la distance immense du point F on pourra prendre la ligne KL pour égale au diamètre GH. Si celui-ci est plus petit que le diamètre DE de l'ouverture, de tous les rayons, qui sans l'interposition du globe GH auroient formé en *f* l'image du point F, il n'y aura de perdu que ce qui seroit tombé sur le cercle du diamètre KL: tous les autres qui tomboient sur l'anneau KDLE, y parviendront de même, & y formeront en *f* l'image du même point plus ou moins claire, selon que le globe sera plus ou moins petit par rapport à l'ouverture DE. Tous les rayons de ce point ne seront pas interceptés que quand le diamètre du globe sera égal à cette ouverture en arrivant jusqu'aux lignes FD, FE sensiblement parallèles en M, N.

16. Si le diamètre du globe GH étoit de 4 lignes, le diamètre DE étant de 40, le cercle KL ne seroit que la centième partie du cercle de l'ouverture entière, & si celui-là étoit de deux lignes, celui-ci ne seroit que la quatrecentième partie: ainsi un globe de deux lignes n'intercepteroit qu'une quatrecentième partie de la lumière totale, & un de 4 lignes la centième. Cette perte non seulement ne peut faire une obscurité totale en *f*; mais

mais elle ne pourroit donner aucune différence sensible de clarté entre ce point & ceux dont la lumière tombe sur tout l'objectif. Or jamais une goutte d'eau, quand en tombant a la figure sphérique, n'a un diamètre de 4 lignes, ni même de deux : ainsi il est bien évident que ce phénomène ne peut pas provenir des gouttes d'une pluie, & c'est la raison pour laquelle, quoiqu'il arrive très-souvent qu'on se rencontre à voir le soleil à travers d'une petite pluie, on ne voit jamais un phénomène pareil à celui que vous avez observé à cette occasion. La grêle ordinaire est de même incapable de produire cet effet.

17. Pour ôter toute la lumière à un point de l'image du disque du soleil il faut substituer un globe égal à l'ouverture : un petit excès de celle-ci sur son disque laisse le passage à un anneau, qui a pour largeur cet excès, & pour longueur toute la circonférence de la même ouverture qui dans votre lunette va au de-là d'un pied entier. Si le diamètre du globe est de 30 lignes, la lumière interceptée ne sera à celle qui arrive qu'en raison de 9 à 7. Ce reste à la place d'une tache obscure laisseroit seulement une lumière un peu plus foible, mais bien peu sensiblement, comme on voit dans les pénombres qui ne sont jamais sensibles qu'assez près de l'ombre. Dans les éclipses totales du soleil la plus petite partie de son disque qui se découvre donne immédiatement une clarté qui forme un vrai jour. Vous pourrez bien aisément faire une observation analogue : en couvrant de plus en plus votre objectif avec du gros papier, vous verrez qu'une partie assez petite découverte vous fera voir le disque du soleil assez clair & bien éloigné de l'apparence d'une sombre obscurité.

18. Un globe d'un diamètre égal à celui de l'ouverture n'empêche tous les rayons que pour un seul point du disque du soleil : pour en cacher une partie d'une étendue donnée, il faut que son diamètre en soit plus grand comme OO' de manière qu'ayant prolongé les lignes EO, DO' jusqu'au disque en P, P', l'angle FEP soit égal au demi-diamètre apparent de la tache quand elle est bien obscure : alors tout l'objectif est entierement caché

pour

pour tous les points qui se trouveront dans un cercle de disque dont le rayon est FP, & il n' y aura dans l' image *ab* aucun rayon d' aucun des points de ce cercle, ce qui formera une tache noire circulaire en *pp'*. La grandeur de l' excès NO du demi-diamètre du globe sur le demi-diamètre de l' ouverture CE = IN sera déterminée par l' angle NEO qui est le demi-diamètre apparent de la tache, & par la distance EN ou CI, & il sera à cette distance comme le sinus de ce petit demi-diamètre est au rayon. Comme le petits angles sont proportionels aux sinus, l' excès du diamètre de ce globe sera à la distance, comme le sinus du diamètre apparent est au rayon. Ainsi pour déterminer cette grandeur il faut pouvoir apprécier la distance.

19. Quand même la théorie de l' allongement du foyer de l' objectif pour les objets peu éloignés auroit lieu pour les objets interposés entre le disque du soleil & la lunette, on ne pourroit pas déterminer cette distance, puisqu' au de-là d' un certain point cet allongement doit être tout à fait insensible. Il parroîtroit pourtant qu' à l' aide de vos observations on pourroit trouver au moins une limite, qui en devroit être surpassée. On démontre dans la Dioptrique, que si l' on fait la distance du foyer des rayons parallèles entr' eux à l' objectif $= f$ & la distance de l' objet $= d$; l' excès de la distance du foyer pour les rayons partis de cet objet sera $= \frac{f^2}{d-f}$ (*), dans laquelle formule la valeur f étant très-petite par rapport à la distance d, & constante, on voit

(*) On tire aisément cette formule de celle que nous avons employée tant de fois dans ce volume, & qui est le fondement principal de la théorie des lentilles simples $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$, où h est la distance focale de la lentille pour les rayons parallèles, qui est ici $= f$, p la distance du point, vers lequel on conçoit que les rayons soient convergents en arrivant à la lentille qui sera ici $= -d$ à cause de la divergence, x la distance du foyer des rayons divergents: ainsi on aura $\frac{1}{x} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d} = \frac{d-f}{df}$, $x = \frac{df}{d-f}$, $x - f = \frac{df - df + f^2}{d-f} = \frac{f_2}{d-f}$, ce qui est l' allongement énoncé.

voit bien que l' allongement sera en raison réciproque de cette même distance.

20. Si réellement la distance de 2075 toises que vous avez employée dans la première observation terrestre étoit de $\frac{6}{12}$ de ligne & qu' on prenne $\frac{1}{12}$ de ligne pour le dernier terme de l' allongement sensible, la limite de la distance nécessaire pour rendre insensible l' allongement seroit selon cette proportion de 6×2075 troises $= 12450$: mais réellement l' allongement pour cette distance est beaucoup plus petit. La formule $\frac{f^2}{d-f}$ pour une ligne d' allongement donnera $\frac{f^2}{d-f} = 1$, & en réduisant f, qui dans votre lunette étoit de 40 pouces, en lignes, qui dans un pouce sont 12, & dans un pied 12×12, on aura $f = 40 \times 12$, & $d = 40 \times 40 \times 12 \times 12 + 40 \times 12$ en lignes: comme la toise a $12 \times 12 \times 6$ lignes, on aura d en toises $\frac{1600}{6} + \frac{40}{72} = 267$ en négligeant la petite fraction qu' il y a de plus. Ainsi la distance pour une demi-ligne n' est que de 534 toises à la place de 2075, & pour ce nombre-ci n' y a que $\frac{267}{2075}$ de ligne, qui fait un peu moins de 0, 13, c' est-à-dire tant soit peu plus d' un huitième à la place de $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

21. Pour la seconde des deux distances que vous avez employées & qui est de 285 toises on a par le même théorême $\frac{267}{285} = 0,94$. L' excès sur le nombre précédent 0, 13 est $= 0,81$ qui est peu différent de celui que vous avez trouvé de $\frac{9}{12} = 0,75$, puisqu' il n' arrive pas à $\frac{10}{12} = 0,83$. On voit par-là que la proportion va assez bien, quand il s' agit des objets terrestres, & que vous avez saisi l' allongement nécessaire pour ces espèces d' objets à $\frac{1}{12}$ de lignes près, quoique le maximum de la distinction, même dans les plus excellentes lunettes acromatiques, ne consiste

ste pas dans un point indivisible. Mais quand on rapporte les objets terrestres au soleil, l'observation n'est pas d'accord avec la théorie, ce qui fait voir que quand il y a une grande différence de lumière dans différents objets, la distinction exige quelque différence dans la longueur de la lunette, comme on savoit déjà, & on en est assuré encore par vos observations.

22. Mais cette théorie ne peut pas s'appliquer aux objets qu'on voit comme de taches noires sur le disque du soleil. Elle appartient aux rayons qui étant partis d'un point de l'objet doivent se réunir dans le foyer de l'objectif. Ici on n'a pas de rayons partis de ces objets : on voit les différents points du disque du soleil par des rayons qui sont partis de cette distance immense, & la tache noire est produite par le défaut des rayons qui appartenoient aux parties du disque qui restent cachées. Ainsi le foyer de tous le rayons qui arrivent à l'objectif, & qui forment l'image, doit se trouver à la même distance, & l'allongement du tube à la place d'aider la distinction, y causeroit de la confusion.

23. La confusion dans l'image de cette espèce d'objets, quand ils ne sont pas assez éloignés, comme des oiseaux qu'on voit passer quelque fois sous le disque du soleil, provient de toute autre principe que je m'en vais développer. Si l'on prolonge la ligne DO jusqu'à la ligne AB en Q, & que l'on prenne du côté opposé FQ' = FQ ; tous le points du disque du soleil, qui seront hors du cercle du diamètre QQ', envoyeront leurs rayons à toute l'ouverture DE, & auront dans leur image en *ab* la lumière toute entière. Pour les points du cercle PP' toute la lumière sera interceptée : pour ceux, qui se trouveront dans l'anneau PQ, P'Q', la même ouverture sera en partie découverte & en partie cachée par le globe OO'. Tout ce dernier espace aura dans l'image une espèce de pénombre, qui à côté de l'ombre sera bien obscure, & en s'éloignant d'elle ira en s'affoiblissant. Cette pénombre aura toute l'analogie avec la pénombre de la terre dans la lune, & la pénombre des corps opaques exposés au soleil, comme si l'ouverture DE étoit le soleil, & le disque de celui-ci en devoit recevoir l'ombre, & la pénombre.

24. La

24. La pénombre forme une nuance qui rend confuse la limite de l'ombre. Dans tous les deux cas la pénombre est très-forte à côté de l'ombre & s'affoiblit en s'éloignant : la position différente du corps interposé, qui forme l'ombre & la pénombre, fait que celle-ci est ou très-mince & insensible, ou bien large : dans le premier cas l'ombre paroit bien déterminée & tranchée, dans le second incertaine & nuancée : mais dans les ombres du corps exposé au soleil cela dépend de la distance de ce corps au plan sur lequel l' ombre est projettée, & dans les globes vus par la lunette dans son disque c'est la distance du même globe à l'objectif qui donne la détermination : la pénombre est très-mince dans le premier cas, quand cette distance est très-petite, & dans le second, quand elle est bien grande : en augmentant dans celui-là la distance du corps interposé à la surface, qui reçoive l'ombre, elle devient si confuse qu' on ne peut pas en apercevoir la limite comme on voit dans l'ombre que les hautes montagnes projettent sur le plaine : le même effet arrive dans celui-ci en diminuant la distance de ce corps à l'objectif, & pour avoir l' ombre tranchée il faut éloigner le globe.

25. La largeur de la pénombre est déterminée par l'angle POQ = DOE, qui est le diamètre apparent de l'ouverture DE vue de O. Si elle étoit par tout également sensible par elle-même, pour la rendre insensible par rapport à une tache si petite & empêcher la confusion, il faudroit supposer cet angle plus petit d' une seconde, ce qui donneroit la distance EO ou CI en lignes $= 206265 \times 40$, puisque le rayon d' un cercle est égal à un arc de $57^{\circ}.\ 17'.\ 45'' = 206265''$, & l'ouverture qui seroit alors égale à une seconde est de 40 lignes. Cela se réduit à 9550 toises, qui multipliées par 0, 8988 sinus de l'élévation sur l'horizon de 64° donne 8583 distance excessive pour la supposition des grêlons tombants. Mais comme la pénombre n'est pas assez sensible pour troubler une distinction apparente que bien près de l' ombre, on pourra supposer sensible seulement sa dixième partie. Dans la lune la largeur de la pénombre de la terre doit être égale à-peu-près à son diamètre, & pourtant l'étendue de la con-

fusion de la limite, qui rend incertain le moment de l' immersion, & émersion des taches, ne paroit guère plus large d' un dixième de ce diamètre. Dans cette supposition la distance audessus de la surface de la terre ne resteroit que de 858 toises: on peut supposer les grêlons encore plus élevés, ce qui donneroit une distintion plus assurée.

26. Si l'on fixe le dixième de l'angle DOE à une seconde, le double débordement NO, MO' pris ensemble formera un quart de l'ouverture DE, parceque celle-ci sera de 10 secondes, & la somme de deux angles OEN, O'DM égale au diamètre apparent de la tache est de $2\frac{1}{2}$. Ainsi le grêlon entier seroit de 50 lignes, ou à-peu-près de 4 pouces. Mais il paroit qu' il devroit être plutôt plus gros, parceque nous avons pris plutôt un peu trop en prenant une seconde pour avoir la pénombre insensible par rapport à une tache de deux secondes & demi de diamètre, & trop peu en prenant un dixième de la pénombre totale pour en avoir une partie sensible en elle-même. Il est vrai qu' on doit diminuer un peu ce diamètre du grêlon par la considération qu'une petite partie du diamètre DE de l'ouverture qui reste à découvert ne donne pas une lumière assez vive, pour n'être pas prise pour une obscurité & pour une espèce de tache à côté des parties du disque qui ont la lumière toute entière, sur-tout étant si affoiblie en passant par le verre obscur. Mais il y a des réflexions qui font augmenter ce diamètre. Un grêlon investi directement par le soleil doit avoir en lui-même une lumière assez vive, puisqu'il a beaucoup de transparence: il y a encore un débordement de la lumière, qui s'étend des dernières parties éclairées vers l'ombre, par le défaut de l' union des tous les rayons partis d' un point de l' objet lumineux & passés par l' objectif & par les humeurs de l'œil. Ce débordement de lumière fait paroître le bord de la partie lumineuse de la lune directement éclairée par le soleil étendu au de-là du bord de cette lumière pâle, qu' on voit sur le reste de son disque quelques jours après la nouvelle lune, & qui provient des rayons que la terre éclairée par le soleil réfléchit vers elle. Le diamètre de la tache formée par l'om-

l'ombre seroit plus grand sans ce débordement de lumière, & les parties NO, MO' du grêlon, qui doivent déborder, se trouveroient plus grandes.

27. Toute réflexion faite il paroit qu'on ne peut guère diminuer le diamètre des grêlons au-dessous de 3 pouces. Ces masses sont un peu trop lourdes pour être transportées par un vent à une obliquité si considérable, comme celle que nous avons trouvée par la direction du vent & de la montée apparente. La difficulté s'augmente en considérant qu'il n'y avoit aucune apparence d'orage, mais un petit nuage mince blanchâtre, qui ne donne aucun indice d'une formation de grêle, & d'un vent impétueux dans la partie intermédiaire de l'atmosphère : la considération que j'ai indiquée au commencement qu'on auroit dû entendre parler d'une grêle si extraordinaire qui devoit tomber dans Paris ou très-près, augmente encore plus la même difficulté. Mais je ne vois pas qu'on puisse attribuer le phénomène qu'aux grains extraordinaires de grêlons qui quelque fois arrivent à cette grosseur. Sur cet objet je développerai ici un peu plus ce que je n'ai fait qu'indiquer au commencement de cette lettre.

28. Quelqu'un pourroit soupçonner que le passage d'une bande d'oiseaux pouvoit donner une apparence de globules ronds, les parties extrêmes disparoissant à cause de la distance. La direction du mouvement réel, qui, comme nous avons vu ci-dessus, devoit être à-peu-près horizontal, si le vol des oiseaux suivoit la direction du vent, pourroit favoriser cette idée. Mais il y a des raisons qui s'y opposent à mon jugement d'une manière invincible. Premièrement il y a le grand nombre de vos globules, qui paroissoient remplir le disque dont le passage a duré un demi-quart d'heure, tandis que chacun passoit par le disque dans deux secondes, & les distances mutuelles étoient très-petites, comme on voit dans la figure que vous en avois dessinée, de manière à empêcher de temps en temps la vue des taches du soleil : il y a la grande hauteur nécessaire pour faire disparoître la pénombre, & celle-ci est la raison, qui fait voir toujours mal tranchés les oiseaux que l'on voit souvent passer devant le disque du soleil :

 il y

il y a encore la forme même de taches rondes, sur laquelle les oiseaux ne pouvoient pas paroître, parceque le corps en a la figure allongée, & les ailes étendues ont une largeur plus grande que celle du corps. Tout cela fait voir que ce n'étoit pas une bande d'oiseaux.

29. Si le phénomène n'avoit pas été observé par vous, qui connoissez si bien les effets des lunettes, & avec la plus grande expérience réunissez une attention & une sagacité sans pareille, on soupçonneroit une illusion optique & un mouvement de petits corps opaques ou de petites boules d'air dans l'intérieur de l'œil : mais le grand nombre & le mouvement uniforme avec la même direction en ôte tout principe de soupçon : il n'y en auroit même, si le phénomène avoit été observé par une personne d'une habileté incomparablement inférieure à la votre. Ainsi je crois qu'il n'y a autre manière de l'expliquer que par des gros grêlons transportés par le vent à une obliquité très-extraordinaire pour des masses si lourdes. Il n'y a aucune des difficultés que j'ai exposées ci-dessus qui puisse démontrer positivement le contraire : elles font bien voir qu'un tel phénomène doit être infiniment rare, comme je l'ai dit aussi.

30. J'ajouterai que quoique ni les gouttes d'une pluie, ni les vapeurs ne peuvent pas être visibles, si l'on prend un de ces globules séparement des autres, le grand nombre qui s'en trouve ensemble peut obscurcir le disque & en rendre une partie plus obscure qu'un autre, ou la cacher tout à fait en interceptant en grande partie, ou en totalité les rayons partis de certains points du disque & dirigés vers l'objectif, & c'est sur cette forme que l'on voit passer les nuages par le même disque qui par un amas plus grand en est caché tout à fait si long temps.

31. Je finirai par proposer une expérience qui mettra sous les yeux toute la théorie que j'ai développée : mais pour la faire plus aisément on peut employer les petites lorgnettes de théâtre, qui ont une grande ouverture dans l'objectif, & un foyer très-court de manière à n'avoir besoin d'aucun allongement de lunette pour voir les objets qui ne sont éloignées que de 15, ou 20 toi-

toises. Si l'on a un mur bien blanc à une distance beaucoup plus grande, & que l'on place un cercle de papier noirci beaucoup plus-près de la lorgnette, ce cercle ne paroîtra point, quand son diamètre sera peu plus petit que celui de l'ouverture. Quand il sera plus grand, on verra une tache sur le mur, mais avec beaucoup de pénombre bien large. Pour éviter la pénombre il faudroit diminuer l'ouverture & éloigner beaucoup plus le cercle noir : mais il faut que le mur soit beaucoup plus éloigné que le cercle, parceque dans la fig.4 un cercle d'un diamètre MN beaucoup plus petit couvrira toute l'ouverture DE, si la distance FC n'est pas bien plus grande que FI. Si le cercle n'est pas noir, mais coloré, & qu'il ait un autre objet derrière lui qui ne soit pas d'un simple blanc uni, on verra deux images posées l'une sur l'autre, dont une sera formée par les rayons partis de l'objet interposé qui tomberont sur tout l'objectif, & l'autre par ceux qui étant partis de l'objet éloigné passeront à côté de l'interposé de manière à tomber sur une partie du même objectif, ce qui fera qu'à parité de lumière dans les deux objets le plus éloigné paroîtra moins clair. En éloignant l'autre, on verra diminuer la confusion des limites, & si on arrive à une distance, ou que dans le cas du cercle noir plus grand mis avant un mur bien blanc & bien éclairé, on arrive à une bonne distinction; on pourra déterminer quelle est la partie de la pénombre qui reste insensible & qu'ici par une simple supposition quoique raisonnable j'ai pris pour un dixième. Mais pour cela il faudra diminuer beaucoup l'ouverture de l'objectif, puisqu'autrement la distance nécessaire pour faire évanouir la pénombre & avec elle la confusion de la tache dans ces limites, seroit trop grande, ce qui rendroit difficile ou même impossible l'opération.

32. Par tout ce que je viens de détailler dans cette lettre devenue trop longue par la multiplicité des objets & des remarques nécessaires pour expliquer tout ce qui appartenoit à votre observation, on voit bien qu'elle méritoit toute l'attention. Vous ferez très-bien à la publier, puisqu'elle donne l'occasion de faire des recherches curieuses bien utiles & bien intéressantes pour l'Optique.

OPU-

OPUSCULUM VII.

De refractionibus Astronomicis.

1. Hoc ego Opusculum conscripsi ante meam transmigrationem in Galliam, & transmisi jam tum ad Regiam Scientiarum Academiam Parisiensem, quæ ipsum typis destinaverat. La-Landius ejus compendium quoddam inseruit suæ Astronomiæ, annuncians editionem Opusculi ipsius, in qua deberent perspici omnia fusius, & luculentius exposita. Editio illa dilata est initio, fuit autem cur paullo post meum adventum Parisios repetendum censuerim tam hoc Opusculum, quam alia multa, quæ habebuntur in Tomis sequentibus, quæ itidem fuerant ab eadem Academia typis destinata: rationem innui in uno e præcedentibus Opusculis: ea omnia nunc demum hîc prodeunt. Mutavi, vel adjeci nonnulla admodum pauca in hoc Opusculo ad uberiorem explicationem, vel expressionum exactitudinem, ac arithmeticis calculis diligentius subductis obvenerunt pluribus in locis numeri accuratiores, quos veteribus illis substitui. Suppressi tamen partem postremi scholii, partem mutavi: suppressi etiam postremum paragraphum, pro cujus argumento uberius evolvendo substitui bina Opuscula separata, quæ hoc immediate subsequentur.

2. In hoc Opusculo post definitiones, & consectaria nonnulla, quæ exhibent formulas quasdam generales, persequor naturam, & proprietates curvæ descriptæ a radio intra atmosphæram, ac immoror potissimum in ea, quæ oritur a vi refringente vel accurate, vel saltem satis proxime constanti in omnibus distantiis a superficie Terræ. Eam suppositionem adhibuit Simpsonus, & ex ipsa eruit suam regulam pro comparandis inter se refractionibus respondentibus diversis distantiis a zenith: ostendo, quo pacto Bradleyus ex eadem derivaverit suam, deductis coefficientibus per binas refractiones observatas, quorum ope omnis refractionum tabula com-

computatur, qua quidem regula Astronomi utuntur passim, ut consentiente cum observationibus, licet innitatur principio non solum non demonstrato, sed etiam minus probabili.

3. Porro illud invenio, ea omnia, quæ non tantum ii duo celeberrimi Auctores proposuerunt huc pertinentia, sed etiam quæ Bouguerius, quæ Cassinus protulerunt, consequi omnia ex eodem principio vis refractivæ proxime constantis, in qua hypothesi arcus a radio per atmosphæram descriptus debeat esse saltem proxime circularis. Reservavi sequentibus binis Opusculis methodum inquirendi in refractiones astronomicas per observationes idoneas, supponendo in priore regulam Bradleyi deductam hic ex hypothesi vis refractivæ proxime constantis, cum observationibus, quas demum obtinui ad rem idoneas, & accuratas, pro adjicienda methodi applicatione, in posteriore sine ulla alia suppositione physica præter æquabilitatem motus diurni intra horas 24, quam ego quidem arbitror omnino certam. Priorem methodum in eo paragrapho non satis evolveram, nec habueram observationes pro applicatione, posteriorem ne indicaveram quidem: nusquam autem habetur, quod sciam, instrumentum satis magnum, quod requiritur pro instituendis ejusmodi observationibus necessariis ad ejus methodi applicationem, quod quidem esset summæ per totam Astronomiam utilitatis: id indicabo in eo ipso posteriore Opusculo, quod erit hujusce Tomi postremum, habebitur autem integrum Opusculum de eodem in Tomo IV.

§. I.

De refractionum proprietatibus, quæ non dependent ab ulla hypothesi circa legem virium refringentium.

1. Radius ab astro adveniat (fig. 1 Tab. X) per rectam DF usque ad atmosphæram, tum incurvatus a vi refractiva adveniat ad oculum in A. Erit directio DF tangens curvæ, quæ tangens continuata occurret alicubi in I rectæ AB ipsam curvam tangenti in A: erit AB directio visa astri ipsius. Recta A*d* tendens ad astrum ab A, erit ad sensum parallela rectæ FD ob immanem

astri

astri distantiam. Hinc ductâ a centro terræ rectâ CAZ, quæ tangenti DF occurrat in E, & ductis CH, CG perpendiculis in eas binas tangentes, erit ZAd distantia vera ipsius astri a zenith, ZAB = CAG distantia apparens, adeoque dAB = DIB = GIH, nimirum angulus binarum tangentium, erit refractio astronomica.

2. Motus per curvam FA fiet secundum leges curvarum, quæ describuntur viribus tendentibus ad centrum C, & pendentibus a distantiis ab eodem centro, ita ut in pari distantia sint eædem: nam vires refractivæ diriguntur ad sensum ad ipsum figuræ centrum ob figuram ad sensum sphæricam sive telluris, sive superficierum terminantium strata atmosphæræ homogenea. Supponemus hìc legem illam notissimam, quæ profluit ab æquabili descriptione arearum terminatarum ad commune centrum virium C, quod nimirum velocitas in quavis ejusmodi curva sit in ratione reciproca perpendiculi ducti a centro in tangentem. Erit ergo velocitas in F ad velocitatem in A, ut CG ad CH. Quare si fiat CA = 1; celeritas in quovis puncto curvæ = c, perpendiculum e centro ductum in tangentem transeuntem per idem punctum = y. Celeritas finalis in A = c'. Angulus CAG = a, adeoque CG = $sin.a$: erit $c = \frac{c' sin.a}{y}$. Alias proprietates hìc nobis usui futuras demonstrabimus.

3. Sit FA (fig. 2) arcus infinitesimus (*) cum rectis FC, AC, ductis ad centrum C, ac binis tangentibus FIH, AI, quarum priori occurrat in L recta ex A parallela CF: tum rectæ CF occurrat in Q arcus circuli ductus centro C, intervallo CA, & recta FN perpendicularis ad tangentem FH sit diameter circuli osculatoris. Concipiatur autem recta NR perpendicularis ad CF, tum

(*) Satis patet ex hac ipsa expressione, hunc arcum non esse nisi particulam infinitesimam ejus, qui habetur in figura 1. Solum centrum C hujus figuræ est idem, ac illud præcedentis: puncta A, F, I, H hujus sunt tantum analoga punctis iisdem illius, ut & puncta N, R hujus punctis N', R' illius analoga, non eadem.

tum chorda FA cum perpendiculo QO in ipsam, & CH sit perpendiculum in tangentem FIH.

4. Si in fig. 1 angulus ACF dicatur x, & refractio HIG dicatur r; erit in fig. 2 FCA $= dx$, & LIA $= dr$, cum ille sit differentia anguli in centro C, & hic inclinatio tangentis sequentis ad antecedentem, quarum inclinationum summa est inclinatio (in fig. 1) postremæ tangentis AI ad primam FI. Sit præterea dt tempusculum, quo in fig. 2 percurratur arcus FA, recta CA $= z$, adeoque FQ $= dz$, ac demum vis refractiva in F $= u$. Erit autem CH $= y$ celeritas in F $= c = \frac{c' \sin . a}{y}$.

5. In primis poterit poni spatiolum FA proportionale celeritati, & tempusculo $= cdt$, ac LA effectus vis acceleratricis, nimirum spatiolum respondens vi continuo agenti, proportionale ipsi vi, & quadrato tempusculi ipsius $= udt^2$. Porro vis secundum FQ, nimirum vis refractiva absoluta u, ad vim respectivam secundum FA erit, ut FQ ad FO, sive ut FA ad FQ. Erit igitur $cdt : dz :: u : \frac{udz}{cdt}$, qui erit valor vis respectivæ. Porro incrementum celeritatis est, ut vis respectiva, & tempusculum; adeoque erit $dc = \frac{udzdt}{cdt} = \frac{udz}{c}$, nimirum $cdc = udz$. Est autem cdc dimidium incrementum quadrati velocitatis, unde habetur hujusmodi theorema: *Incrementum quadrati velocitatis in singulis curvæ arcubus exiguis est, ut vis absoluta, & accessus ad centrum ibidem*: hinc autem consequitur & illud: *Si binæ particulæ luminis pertinentes ad binos radios semel habuerint in paribus a centro distantiis velocitates æquales; habebunt eas itidem æquales in aliis omnibus itidem paribus*. Habebunt enim in singulis accessibus æqualibus sequentibus vires æquales respondentes æqualibus distantiis, adeoque æqualia incrementa quadratorum velocitatum æqualium, quæ quadrata erunt proinde semper æqualia, adeoque & velocitates simplices pariter æquales erunt.

6. Jam vero radii omnes homogenei adveniunt ad summam atmosphæram cum velocitatibus æqualibus, adeoque omnes, qua-

cumque directione veniant, & progrediantur, paribus a centro terræ distantiis habebunt velocitates æquales. Valor c' velocitatis finalis erit constans pro radiis omnibus homogeneis, ac in fig. 1 eadem pro omnibus ratio CH ad CG, nimirum (num. 2) ratio celeritatis finalis ad initialem.

7. Porro ea ratio erit proxima rationi æqualitatis, cum nimirum velocitas luminis ingredientis in atmosphæram sit ingens, & vis refractiva atmosphæræ ipsius perquam exigua, unde fit, ut curvatura radii ipsam permeantis sit itidem perquam exigua, & positio tangentis IAG parum abludat a positione alterius FIH. Verum illud idem constat ex observationibus astronomicis, quæ refractionem exhibent semper exiguam. Cum sit sinus CIA ad sinum CAI, sive ad sinum distantiæ apparentis a zenith ZAI = CAG, ut est CA ad CI, & ob exiguam atmosphæræ altitudinem ea ratio sit proxime ratio æqualitatis; erunt proxime æquales ipsi anguli CIA, CAG, existente semper exiguo angulo ACI, qui est eorum differentia, ob angulum externum CAG æqualem binis internis oppositis CIA, ACI. Hinc refractio GIH, cum sit exigua respectu distantiæ apparentis a zenith ZAI, sive CAG, erit exigua etiam respectu ipsius anguli CIG, adeoque ratio sinuum angulorum CIG, CIH, quæ est ratio perpendiculorum CG, CH, parum abludet a ratione æqualitatis, sicut & velocitas finalis ab initiali, unde fiet, ut parum admodum inter se differant velocitates omnes ejusdem radii per totam atmosphæram, quæ omnes sunt intermediæ inter initialem, & finalem.

8. Quæcumque mutatio fiat in constitutione atmosphæræ, dummodo constitutio in A fuerit eadem; velocitas luminis ibidem erit eadem: nam incrementum quadrati velocitatis erit, ut summa omnium productorum e viribus agentibus per omnia strata, & crassitudinibus eorumdem stratorum, nimirum (num. 5) omnium udz. Concipiatur atmosphæra divisa in plurima strata ejusdem crassitudinis, & vis, qua stratum quodcumque urgebit in accessu particulam luminis versus centrum terræ, erit æqualis, & contraria illi, qua idem stratum urgebit ipsam versus partem contrariam in recessu, adeoque hæc nova actio contraria elidet effectum illius

præ-

præcedentis, & remanebit in quovis strato solus effectus ejus vis, qua id stratum egit in eam particulam in accessu ad ipsum, tanquam si immediate eadem particula transisset ex æthere in illud stratum. Generaliter habetur, & rite demonstrari potest hoc theorema: *Ubi lumen deveniat ad certum quoddam medium, vel immediate ex æthere, vel post transitum per quotcumque, & quæcumque media factum sub angulis quibuslibet; semper in eo postremo medio habebit velocitatem eandem*. Et ob eam causam, si lumen delatum ad vitrum post transitum ex aere per quævis media, egrediatur ex eo in dato angulo obliquo, habet eandem refractionem, quam si immediate transisset in ipsum vitrum. Verum hic nobis usui erit tantummodo theorema, quod demonstravimus, velocitatis in A pendentis pro radio quovis a sola constitutione atmosphæræ ibidem, quæcumque mutatio accidat in stratis superioribus, quæ nimirum velocitas pendebit a sola constitutione atmosphæræ in A, a qua idcirco pendebit ratio CH ad CG.

9. Quoniam pro radiis omnibus altitudo atmosphæræ eadem est; erit eadem pro omnibus recta CF: atque adeo eadem erit pro omnibus ratio sinus anguli CFH, qui æquatur angulo incidentiæ in summam atmosphæram ad verticem oppositο, ad sinum anguli CAG refracti in A. Sunt enim sinus illi $= \frac{CH}{CF}, \frac{CG}{CA}$; nimirum si velocitas in A ad velocitatem in F, sive CH ad CG fiat, ut $1 + b$ ad 1, & altitudo atmosphæræ dicatur e; ea ratio erit $\frac{1+b}{1+e}$ ad 1. Fiat $\frac{1+b}{1+e} = m$, & erit $1 : m :: sin.CAG = sin.a : sin.CFH = m\,sin.a$. Cum vero in quadrilineo CFIA tam quatuor anguli interni, quam bini cum suis externis in A, & I æquentur simul quatuor rectis; demendo binos illos internos, erunt bini externi æquales reliquis binis internis, nempe CFI + ACF = CAG + GIH, adeoque CFI, sive CFH = CAG − ACF + GIH $= a - (x - r)$. Quare erit primo $m\,sin.a = sin.(a - (x - r))$, sive $1 : m :: sin.a : sin.(a - (x - r))$. Deinde cum summa sinuum sit ad differentiam, ut tangens semisummæ angulorum ad tangentem semidifferentiæ; erit $1 + m : 1 - m ::$

$tan.(a - \frac{1}{2}(x - r)) : tan.\frac{1}{2}(x - r)$, quæ ratio cum sit constans; erit $tan.\frac{1}{2}(x - r)$, sive ipse angulus exiguus $x - r$, ut $tan.(a - \frac{1}{2}(x - r))$, sive ut tangens distantiæ apparentis a zenith imminutæ per angulum exiguum $\frac{1}{2}(x - r)$.

10. Si x ad r habeat rationem constantem; erit ipsa refractio r, ut tangens prædictæ distantiæ imminutæ quodam multiplo refractionis. Simpsonus (*) invenit, haberi eam rationem constantem in hypothesi vis refractivæ constantis per totam atmosphæram, ac ex binis refractionibus per observationes Astronomicas determinatis eruit $r = \frac{2}{11}(x - r)$, sive $11r = 2x - 2r$, & $x = 6\frac{1}{2}x$. Bradleyus valori $\frac{2}{11}$ substituit $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, unde prodit $x = 7r$, adeoque $a - \frac{1}{2}(x - r) = a - 3r$. Inde autem ortum duxit regula, quam paulo ante obitum invenit teste La-Landio (**), quod nimirum refractio sit, ut tangens distantiæ apparentis a zenith imminutæ per triplam refractionem ipsam. Bouguerius (Acad. Paris. an. 1749) eandem proportionalitatem quantitatum x, & r invenit pro hypothesibus, quæ, ut infra videbimus, reducuntur ad vim constantem. Cassinus (Acad. Paris. an. 1714) assumpsit formam curvæ circularem, quam infra ostendemus provenire itidem ab eadem hypothesi vis constantis. Evolvemus ordine suo, & methodo quammaxime licebit simplici, eorum auctorum comperta, quæ, quod haud scimus, an ab alio quopiam fuerit animadversum, pendent omnia ab eadem communi lege virium proxime æqualium per totam atmosphæram: addemus autem & ea, quæ nobis præterea sese obtulerunt in eadem perquisitione. Interea hic persequemur illa, quæ non pendent ab ulla hypothesi circa legem virium refringentium.

11. Si concipiatur, punctum C abire in infinitum, manente finitâ distantiâ superficiei supremæ ab infimâ, ratio CF ad CA fiet ratio æqualitatis. Fiet autem angulus CFH æqualis angulo incidentiæ, CAG angulus refractus, & ratio eorum sinuum evadet

(*) Simpson mathematical dissertations 1743.

(**) Astronom. par M. de La-Lande première Edit. p. 822.

det sola ratio perpendiculorum CH, CG. Is casus obtinet, ubi radius transit ex uno medio in aliud trans superficiem refringentem, quæ illa dirimit, agentibus viribus refringentibus hinc, & inde in exigua distantia ab ea superficie, secundum directiones ipsi perpendiculares. Inde pro refractionibus omnibus eruuntur sequentia theoremata: *Sinus incidentiæ ad sinum anguli refracti erit in ratione constanti pro radiis homogeneis utcumque transeuntibus per superficiem dirimentem bina media heterogenea, & illa ratio erit inversa velocitatis in primo medio ad velocitatem in secundo.*

12. Si angulus ACI dicatur x'; erit CIG sive CIA $= a-x'$; CIH $= a-x'+r$, quorum sinus cum sint, ut CG, CH, sive ut velocitates $1, 1+b$; erit $(1+b)\times sin.(a-x') = sin.(a-x'+r)$. Porro e formulis trigonometricis sinus anguli compositi e binis æquatur binis productis ex sinu prioris in cosinum posterioris, & e sinu posterioris in cosinum prioris. Hinc considerando angulum $a-x'+r$ divisum in duos $a-x'$, & r, erit $sin.a-x'+r = sin.(a-x')\times cos.r + sin.r\,cos.(a-x')$, sive cum ob exiguitatem anguli r possit sumi radius pro ejus cosinu, & is ipse pro suo sinu, erit $= sin.(a-x') + r\,cos.(a-x')$, adeoque erit $(1+b)\,sin.(a-x') = sin.(a-x') + r\,cos.(a-x')$, ac dividendo per $sin.(a-x')$, & ponendo $cot.$ pro $\frac{cos.}{sin.}$, erit $1+b = 1+r\,cot.(a-x')$, sive $b = r\,cot.(a-x')$. Ad eruendos plures usus hujus formulæ notandum illud, valorem x' debere esse satis exiguum respectu a, potissimum, ubi ipse a non nimis accedat ad quadrantem. Est enim $sin.$ CAG $= sin.a : sin.$ CIG $= sin.(a-x')$ :: CI : CA, quæ ratio parum abludit ab æqualitate ob exiguam altitudinem atmosphæræ: exigua autem mutatio in sinu inducit exiguam mutationem in angulo, ubi non nimis acceditur ad rectum.

13. Hinc primo quidem haberi poterit valor b pertinens ad incrementum velocitatis satis proxime per unicam etiam refractionem r datam pro distantia a zenith $= a$ ex observationibus astronomicis, & rite assumptam, sumendo $b = r\,cot.a$. Bradleyus

yus (*connoissance des mouvements célestes* 1768) pro $a = 60°$. habet $r = 1'.38'', 4$. Hinc assumendo *sin.r* pro r, ut reducatur ad numeros, in quibus unitas est radius (*), erit $b = 0,0002755$: pro $a = 50°$ habet $r = 1'.7'', 9$, unde $b = 0,0002762$, qui valores satis congruunt inter se, ut oportebat. Simpsonus pro $a = 60$ habet $r = 1'.30''\frac{1}{2}$, unde provenit $b = 0,0002533$. Caillius pro $a = 60°$ habet $r = 1'.54'', 4$, unde profluit $b = 0,0003202$: at idem pro distantia a zenith 50° habet $r = 1'.17'', 9$, unde prodit $b = 0,0003169$.

14. Porro valorem b immediate ex opticis observationibus diligentissime institutis coram Regiæ Societatis Præside, jam olim determinavit Hauxbeïus ope theorematis numeri 11 de celeritate reciproce proportionali illis sinubus: notatâ nimirum refractione radii in transitu e vacuo Boyliano in aerem cum inclinatione graduum 45, invenit eum valorem $= 0,000264$, quod facile fit ex illo theoremate, ex quo habetur valor $1 + b$ dividendo sinum incidentiæ per sinum anguli refracti. Erat tum altitudo barometri pollicum Londinensium $29\frac{1}{2}$, adeoque Parisiensium 27. lin. 8. Eundem autem valorem b mutatâ intra machinam aeris densitate, invenit proportionalem altitudini barometri densitatem eandem indicantis. Ea determinatio est fere accurate media inter valores Bradleyanum, & Simpsonianum. Caillianus valor est nimis magnus, licet omissio illa valoris x' reddat illum potius tantillo minorem, ob cotangentem anguli majoris a minorem, quam minoris

(*) Facilius reducentur valores arcuum ad partes unitatis æqualis radio, si ipsi reducantur ad secunda, & logarithmo numeri secundorum addatur logarithmus constans 4,685575, qui est complementum arithmeticum logarithmi 5,314425 numeri 206264, 8 secundorum contentorum in radio: est enim ut hic numerus ad numerum secundorum in arcu quovis, ita radius ipse $= 1$, ad ejus partes contentas in eodem arcu: nam nec arcus est accurate æqualis sinui, nec sine usu partium proportionalium obtinetur sinus arcus habentis præter secunda fractiones secundorum: accedit, quod differentiæ logarithmorum sinuum exiguorum non sunt proportionales differentiis arcuum, ut idcirco debeant prius determinari sinus numerici per partes proportionales, tum horum numerorum logarithmi: usque adeo est simplicior, & tutior ea alia methodus.

ris $a-x'$. Bini etiam ejus valores paullo minus inter se congruunt, quam bini Bradleyani. Jamdudum dubitatur de refractionibus Caillianis, quæ videntur omnes majores justo. Is quidem suam tabulam computavit ex immenso numero observationum diligentissime institutarum, combinationibus adhibitis sane ingeniosissimis: at timetur, ne ejus sector non satis tutâ methodo, vel non satis accurate verificatus continuerit arcum totalem minorem justo, qui idcirco omnes angulos exhibuerit in eadem ratione justo majores. Optandum esset, ut iterum verificaretur ille sector accuratissime, & observationes opticæ pro valore quantitatis b iterum diligenter instituerentur, factis novis inquisitionibus in refractiones per observationes astronomicas; cum usque adeo differant tabulæ duorum primi ordinis Astronomorum Caillii, & Bradleyi.

15. Ex eadem formula num. 12. habetur hoc theorema: *Refractiones in distantiis a zenith non nimis proximis quadranti sunt, ut tangentes ipsarum distantiarum quamproxime*. Sunt enim hic, ut $\frac{b}{cot.(a-x')} = b\,tan.(a-x')$. Idem exhibet & Bradleyana regula, quæ (num. 10) facit eam proportionalem tangenti $a-3r$. Nam ea tangens parum admodum mutatur, addito $3r$, donec angulus a satis distat a recto. Verum illa Bradleyana regula innititur hypothesi vis refractivæ constantis, dum hic habetur independenter a quavis hypothesi.

16. Patet ex eadem formula, refractionem in distantiis a zenith non ita proximis quadranti debere esse quamproxime constanter easdem, ubi sit eadem constitutio atmosphæræ in A, quæcunque accidat mutatio in stratis atmosphæræ superioribus, & mutatâ eâ constitutione in ipso loco observatoris, debere mutari in ratione valoris b, qui ex Hauxbeïanis observationibus est proportionalis altitudini barometri; pendet autem etiam a statu thermometri: at prope horizontem debebit esse admodum variabilis, positâ etiam eâdem barometri, & thermometri constitutione. Nam variatio, quæ accidit in superioribus atmosphæræ stratis, cum mutet formam curvæ, mutat positionem intersectionis

I bi-

I binarum tangentium in recta AB determinante apparentem distantiam a zenith, adeoque mutat angulum ACI $= x'$. Porro, uti diximus, is totus in distantia non nimis accedente ad quadrantem est exiguus, & parum mutat valorem $tang.(a-x')$, si totus etiam omittatur, adeoque multo minus ejus mutatio turbabit valorem $\frac{b}{cot.(a-x')}$, sive $b\ tan.(a-x')$. At prope quadrantem, & is multo major mutatur magis, & exigua etiam ejus mutatio mutat plurimum valorem ejus tangentis, cum nimirum tangens quadrantis sit infinita, licet tangens arcus utcumque parum ab eo differentis finita sit. Et hæc quidem est vera ratio discriminis summi, quod observatur in refractionibus horizonti proximis, non illa, quæ vulgo adduci solet, discriminis inter refractiones cælestes, & terrestres. Quivis radius, qui appellit ad oculum, permeat omnia superiora atmosphæræ strata, & sentit omnes omnium vires refractivas, quanquam non æque diu, ob variam itineris longitudinem: sed variatio anguli x' detrahendi & est multo major prope horizontem, & multo magis ibidem mutat valorem tangentis, quæ ducta in b debet exprimere refractionem.

17. Ex illa proportione (num. 12) $1+b:1::sin.(a-x'+r):sin.(a-x')$ eruitur etiam, fore $2+b:b::tan.(a-x'+\frac{1}{2}r):tan.(\frac{1}{2}r)$; assumendo nimirum summam, & differentiam sinuum, & tangentem semisummæ, ac semidifferentiæ arcuum. Quare cum ratio $2+b:b$, sit constans, & $tan.\frac{1}{2}r$ sit, ut r; erit refractio ut $tan.(a-(x'-\frac{1}{2}r))$, sive ut tangens distantiæ apparentis a zenith imminutæ per angulum exiguum $x'-\frac{1}{2}r$, quod num. 9 inventum fuerat ope valoris $\frac{1}{2}(x-r)$ itidem exigui.

§. II.

De natura curvæ a radiis descriptæ, & refractionum proprietatibus pendentibus a lege virium, potissimum earum, quæ sint constanter eædem per totam atmosphæram.

18. INQUIRENDO in ipsam naturam curvæ, quam radius describit per atmosphæram, resumendi sunt in fig. 2 valores numero-

merorum 2, 4, 5. Cum ibi sit AF $= cdt$, ac binæ tangentes AI, FI assumi possint in eo arcu infinitesimo pro æqualibus inter se, & simul æqualibus ipsi AF; erit AI $= \frac{1}{2}cdt$: angulus autem ALH æqualis interno, & opposito CFH assumi poterit pro æquali CFA ob AFH infinitesimum, & ipsius CFA sinus erit $\frac{AQ}{AF}$ ob angulum AQF rectum. Cum autem arcus AQ sit, ut angulus ACF $= dx$, & radius CA $= z$; is poni poterit $= zdx$, adeoque ob AF $= cdt$ erit is sinus $= \frac{zdx}{cdt}$. Jam vero est AI $= \frac{1}{2}cdt$: AL $= udt^2$ :: $sin.$ ALI $= sin.$ ALH $= \frac{zdx}{cdt}$: $sin.$ AIL $= sin. dr = dr$, cum nempe angulus infinitesimus poni possit pro suo sinu. Quare multiplicando terminos extremos & medios habebitur $\frac{1}{2}cdrdt = \frac{uzdxdt}{c}$, sive $dr = \frac{2uzdx}{c^2}$. Ea æquatio exprimit naturam curvæ, sive rationem, quam habet incrementum dr refractionis, sive flexus tangentis respondens cuivis arcui FA, ad angulum ACF $= dx$, quem arcus idem subtendit ad centrum: ea relatio est $\frac{dr}{dx} = \frac{2uz}{c^2}$. Si vis u detur per distantiam z a centro C; dabitur ipsa ratio per eandem, cum (numer. 5) sit $cdc = udz$, adeoque $\frac{1}{2}c^2 = S.udz$, assumptâ constanti e quadrato velocitatis initialis summæ atmosphæræ.

19. Verum cum pari distantiâ z a centro C, sit eadem & vis u, & celeritas c; jam habetur hoc theorema: *Pari a centro distantiâ, incrementa refractionum pro binis radiis quibuslibet sunt inter se in arcubus æque accedentibus ad centrum ipsum, ut anguli, quos subtendunt in centro iidem arcus.* Cum enim sit pro utraque idem valor $\frac{dr}{dx}$, erunt bini dr inter se, ut bini dx.

20. Quoniam mutatis etiam distantiis, celeritates mutantur parum admodum (num. 7), & ob exiguam altitudinem atmosphæræ ratio distantiarum itidem sit quamproxime ratio æqualitatis; haberi poterit pro constanti valor $\frac{2z}{c^2}$, adeoque erit $\frac{dr}{dx}$, ut vis u. Quod

Quod si vis refractiva u sit, ut $\frac{c^2}{z}$, nimirum etiam ipsa ad sensum constanter eadem in quavis altitudine atmosphæræ; in ea hypothesi ratio $\frac{dr}{dx}$ erit constans, sive eadem pro omnibus radiis homogeneis.

21. Hæc autem est illa hypothesis numeri 10, & theorema Simpsonianum ex eadem fluens, quod hìc sponte consequitur ex æquatione illâ adeo simplici, & deductâ methodo adeo expeditâ: ipse multo complicatiorem adhibuit. Nos hìc, aliis hypothesibus omissis, persequemur tantummodo consectaria hujus, in qua vis refringens sit proxime constans, nimirum accurate, ut $\frac{c^2}{z}$. Vis erit constans, si densitas materiæ refringentis crescat uniformiter in descensu versus superficiem terræ, cum ea debeat esse excessus actionis cujusvis strati inferioris supra stratum superius, & idcirco is quidem eam proportionalitatem eorum angulorum ponit pro hypothesi densitatis ipsius crescentis uniformiter. Ratio sinus distantiæ apparentis a zenith, sive anguli CAG (fig. 1) $= a$, ad sinum anguli CFH $= a - (x - r)$ est constans pro radiis omnibus, & valor $x - r$, qui est eorum angulorum differentia, est in hac hypothesi Simpsoniana quoddam multiplum refractionis r, ob x proportionalem ipsi r. Porro docebimus inferius, quomodo ii duo valores constantes inveniri possint e binis refractionibus observatis, quorum alter exprimit rationem angulorum, & est (num. 9) $\frac{1+b}{1+e} = m$, alter exprimit illud multiplum, qui si dicatur n, erit $m \sin . a = \sin . (a - nr)$.

22. Eandem rationem constantem valoris x ad r, sive anguli subtensi in centro ad refractionem, invenit & Bouguerius (Acad. Paris. an. 1749) ex hypothesibus virium, quas ipse censuit admodum varias, & generales, sed ut num. 10 innuimus, facile ostenditur, omnes recidere in vim proxime constantem. Pendet enim apud ipsum vis ab ordinatis ad curvam quandam, quas ponit proportionales perpendiculo demisso e centro in tangentem; & id perpendiculum est quamproxime constans. Eas ipse assumit e gene-

genere parabolarum ad habendam ejusmodi proportionalitatem valorum x, & r: verum cujuscumque naturæ sint eæ curvæ, dummodo ordinatæ ipsarum parum admodum mutentur a summa atmosphæra ad imam, vires remanent ad sensum constantes, & habebitur ejusmodi proportionalitas, ut hìc est demonstratum. Hìc autem juxta numerum 10, cum (num. 9) $x-r$ sit, ut tangens distantiæ appparentis a zenith imminutæ per angulum exiguum $\frac{1}{2}(x-r)$, erit ipsa refractio, ut tangens ejus distantiæ imminutæ per angulum exiguum, & quidem multiplum refractionis ipsius. Demonstratum est (num. 17), eam esse, ut est tangens ejus anguli imminuti per $x'-\frac{1}{2}r$. Id quidem haberi posset etiam sine æqualitate valorum $x'-\frac{1}{2}r$, & $\frac{1}{2}(x-r)$. Nam pro binis a habentur bini valores x, & bini x', quorum priores duo possunt adhuc minuere illas tangentes, ad quas pertinent, in eadem ratione, ac posteriores duo. Adhuc tamen facile ostendemus, eos fore proxime æquales inter se, ubi determinatis circulis curvam nostram osculantibus, invenerimus, eam in hac virium hypothesi esse proxime circularem. Ad ejusmodi perquisitionem faciemus gradum.

23. In triangulis AFL, FAR fig. 2 angulus FAL æquatur alterno AFR, & angulus AFL chordæ cum tangente angulo FRA insistenti in alterno segmento. Hinc est AL : AF :: AF : FR $=\frac{AF^2}{AL}$. Tum in triangulis rectangulis FRN, CHF ob rectas NF, CH perpendiculares eidem FH angulus NFR erit æqualis alterno FCH, adeoque ea triangula similia, & CH : CF :: FR $=\frac{AF^2}{AL}$: FN $=\frac{CF\times AF^2}{CH\times AL}$. Jam vero est CF $=z$, AF $=cdt$ (numer. 5), AL $=udt^2$, & cum (num. 2) sit $c=\frac{c'\sin.a}{y}$, & CH hujus figuræ $=y$, erit ipsa CH $=\frac{c'\sin.a}{c}$. Hisce valoribus substitutis, habetur diameter circuli osculatoris FN $=\frac{c^3z}{uc'\sin.a}$, ex quo valore diametri circuli osculatoris æquatio ad curvam deducitur per formulas cognitas.

 24. Ob

24. Ob c' constantem pro radiis omnibus, *sin.a* pro unico quovis radio, erit diameter circuli osculatoris, generaliter ut $\frac{c^3 z}{u\, sin.a}$, pro quovis radio ut $\frac{c^3 z}{u}$. Quod si comparentur inter se bina binorum radiorum puncta assumpta in eadem distantia a terra; erit in iis idem valor c, z, u, adeoque habebitur hujusmodi elegans theorema: *diameter circuli osculatoris in punctis radiorum quorumvis æque remotis a superficie terræ est in quavis virium hypothesi reciproce, ut sinus distantiæ apparentis a zenith objecti per eos radios visi*. Quod si in fig. 1 sit AR' semidiameter circuli osculantis in A radium horizontalem, & recta ex R' perpendicularis ad AC, occurrat in N' rectæ perpendiculari ad tangentem IAG ductæ per A; erit angulus R'N'A complementum R'AN', adeoque æqualis CAG, & R'A ad AN', ut *sin*.R'N'A ad radium. Quare AN' erit semidiameter circuli osculantis in A radium FA, ac omnium circulorum omnes radios osculantium in A jacebunt centra in eadem recta infinita perpendiculari rectæ AC ducta per R'.

25. Quoniam vero c, & z parum admodum mutantur; erit ipsa semidiameter proxime in punctis diversis ejusdem radii, reciproce ut vis. Et, si vis sit ad sensum constans, erit ubique proxime eadem: adeoque in hypothesi vis proxime constantis, *forma curvæ erit proxime circularis, & omnium ejusmodi circulorum centra jacebunt in illa eadem recta* R'N'. *Si u sit, ut* $c^3 z$, *nimirum si vis sit in ratione composita ex directa triplicata celeritatis, & simplici distantiæ a centro terræ; curva radii cujusvis erit accurate circularis*. Porro cum celeritas c crescat decrescente distantia z, vis proportionalis valori $c^3 z$ eo magis ad constantem accedet. Numero 20 assumpta est vis proportionalis valori $\frac{c^3}{z}$, adeoque in eâ hypothesi, ex qua accurate profluxerunt regulæ Simpsoniana, & Bradleyana, est $\frac{c^3 z}{u}$, ut cz^2: nimirum diameter circuli osculatoris in eodem radio directe

ut

ut celeritas, & quadratum distantiæ. Ea ratio non exhibet valorem accurate constantem, cum, ut patebit inferius (num. 39), magis mutetur distantia, quam celeritas: adhuc tamen ob exiguam utriusque mutationem forma curvæ parum abludit a circulari etiam in ea hypothesi.

26 Ejusmodi theoria exhibet formam curvæ circularem, quam jam olim assumpserat Cassinus (num. 10). Porro forma ipsa circularis præbet etiam demonstrationem ejus, quod proposuimus num. 18. Erunt enim æquales ex natura circuli tangentes FI, AI. Est autem CI : FI :: $sin.$CFI : $sin.$FCI, & CI : AI :: $sin.$CAI $=$ $sin.$CAG : $sin.$ACI, quæ ratio erit utrobique eadem: adeoque cum sit $sin.$CAI $= sin.$CAG $= sin.a$, & $sin.$CFI $= sin.(a-x+r)$ (num. 9), qui sinus sunt proxime æquales; erunt proxime æquales & sinus angulorum FCI, ACI: adeoque erit FCA $=$ 2ACI, sive $x = 2x'$, & $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}r = x' - \frac{1}{2}r$. Videbimus inferius, ex eadem forma circulari profluere etiam regulam a Bouguerio adhibitam pro refractionibus horizontalibus pertinentibus ad diversas elevationes supra superficiem terræ: sed interea regrediemur ad regulas Simpsoni, ac Bradleyi, & methodum eruendi ex aliquot observatis refractionibus valores constantes ad eas regulas pertinentes, & plura earum consectaria.

§. III.

De deductione, determinatione, & mutua comparatione regularum Simpsoni, & Bradleyi.

27. In primis, comparando inter se regulas Simpsoni, & Bradleyi facile est ab altera transire ad alteram, retinendo etiam valores generales, qui deinde determinentur per binas refractiones observatas. Simpsoni regula (num. 10) huc reducitur: *Fiat in quadam ratione data sinus distantiæ apparentis a zenith ad sinum cujusdam anguli; & hujus differentia ab illo erit ad refractionem quæsitam in alia quadam ratione data.* Erit nimirum (num. 21) $m.sin.a = sin.(a-nr)$. Est ibidem $m = \frac{1+b}{1+c}$, sed

sed & is, & n erui debent ex binis refractionibus observatis. Simpsonus habet $m = \frac{sin.86^\circ.58'\frac{1}{2}}{sin.90^\circ}$, sive $= 0,99861$; $n = \frac{11}{2}$, quos eruit ex refractione horizontali $= 33'$, & in distantia a zenith $60^\circ = 1'.30''\frac{1}{2}$. Bradleyana regula sic habet: *refractio est proportionalis tangenti distantiæ apparentis a zenith imminutæ per quoddam multiplum refractionis ipsius*; nimirum r, ut $tan.(a-hr)$, existente h quodam numero constanti. Ea deducitur e Simpsoniana adhibendo methodum numeri 9. Bradleyus adhibet $h = 3$, quod respondet valori $n = \frac{12}{2} = 6$ substituto valori $\frac{11}{2}$, ut innuimus numero 10, & mox videbimus.

28. Exponemus hic primo, quomodo Bradleyanus numerus eruatur e Simpsonianis, vel Simpsonianus uterque ex Bradleyano: tum eorum regulas inter se comparabimus, ad eligendam commodiorem: deinde docebimus, quomodo illi ipsi eorum numeri inveniri possint ex binis observatis refractionibus: ac demum ostendemus, quomodo inde deduci possit altitudo totius atmosphæræ refringentis in F. Transibimus deinde ad refractiones pro locis elevatioribus, & regulam Bouguerianam pro horizontalibus locorum eorundem, ac exponemus phænomena refractionum infra horizontem locorum eorundem, & refractiones terrestres pro locis intra atmosphæram sitis.

29. Cum sit juxta Simpsonum $1 : m :: sin.a : sin.(a-nr)$; erit $1 + m : 1 - m :: sin.a + sin.(a-nr) : sin.a - sin.(a-nr) :: tan.(a-\frac{1}{2}nr) : tan.\frac{1}{2}nr$: cumque $\frac{1}{2}nr$ sit, ut sua tangens ob suam exiguitatem; erit is valor, adeoque & ejus coefficiens variabilis r, ut $tan.(a-\frac{1}{2}nr)$, & idcirco Bradleyanus valor $h = \frac{1}{2}n$. Sic ex $n = 6$ deducitur $h = 3$, ut Bradleyus posuit. Si retineatur valor Simpsonianus $n = \frac{11}{2}$; erit $h = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$; & tum distantia a zenith minuenda esset per $2\frac{3}{4}$ refractionis ipsius. Simpsonianus numerus n e contrario statim eruitur e Bradleyano $h = \frac{1}{2}n$, cum sit $n = 2h$. Tum ad inveniendum m requiritur præterea una quæpiam refractio r cognita pro una data distantia $= a$, qui valor fiet cognitus per formulam $m = \frac{sin.(a-nr)}{sin.a}$ con-

for-

formem proportioni positæ initio hujus numeri: & si r sit refractio horizontalis; existente $a = 90°$, $sin.a = 1$, $sin.(a-nr) = cos.nr$, fit $m = cos.nr$.

30. Regula Bradleyana est elegantior, & primo aspectu simplicior, sed est multo minus apta ad efformandam tabulam refractionum ex data aliqua refractione: si enim refractio quæsita pro alia distantia data $= a'$ dicatur r'; erit $tan.(a-hr) : tan.(a'-hr') :: r : r'$, ubi cum etiam secundus terminus contineat valorem $-hr'$ incognitum, nihil directe erui potest, nisi jam cognoscatur saltem proxime valor r' substituendus in secundo termino, ut is habeatur abludens a vero per quantitatem exiguam respectu sui, adeoque quartus r' exiguus per se obveniat diversus a vero, prorsus insensibiliter. Id autem est incommodum, & ad habendam exactitudinem indiget restitutione calculi. Hinc satius est transire a Bradleyana ad Simpsonianam numeris rite aptatis: sumetur semel $n = 2h$, tum $m = \frac{sin.(a-nr)}{sin.a}$, vel pro refractione r horizontali, $m = cos.nr$. Inventis n, & m, invenietur pro quavis alia distantia apparente a zenith $= a'$ refractio r' ex formula $sin.(a'-nr') = m\,sin.a'$; ubi valor $a'-nr'$ inventus, & subtractus ab a', relinquet nr' dividendum per n ad habendum r'.

31. Si pro distantia apparente a zenith $= a$, libeat potius assumere altitudinem apparentem supra horizontem $= p$; poterit assumi $cos.q = m\,cos.p$, tum $r = \frac{q-p}{n}$. Nam erit p complementum a, adeoque $cos.q = m\,cos.p = m\,sin.a = sin.(a-nr)$, & proinde q complementum $a - nr$. Hinc $a = 90° - p$, $q = 90° - (a-nr) = p + nr$, $nr = q - p$, $r = \frac{q-p}{n}$.

32. Applicatio numerorum erit admodum expedita. Utemur hic formula priore, quæ exhibet valorem a. Bradleyana refractio horizontalis r est eadem, ac Simpsoniana $33'$, & pro Bradleyo $n = 6$, hinc $m = cos.nr$ (num. 29) $= cos.3°.18' = 0,9983418$. Pro Simpsono est $n = 5\frac{1}{2}$, adeoque habebitur $m = cos.3°.1'\frac{1}{2} = 0,9986066$. Ipse pro $cos.3°.1'\frac{1}{2}$ posuit $sin.86°.58'\frac{1}{2}$, quod idem

idem exprimit. Eâ ratione adhibitâ, ex. gr. pro distantia a zenith $a' = 60°$, habebitur novi anguli sinus $= cos.3°.18' + sin.60°$, & ipse angulus $= 59°. 50'. 9''$, cujus differentia a $60° = 9'. 51''$, divisa per 6 exhibet refractionem quæsitam $1'. 38''$, 5, quæ in tabula Bradleyanarum refractionum (*conn. des mouv. Céles. an.1768.*) habetur $1'. 38''$, 4 fere accuratissime eadem, cum nimirum computata sit ex iisdem principiis. Ex Simpsonianis numeris innixis etiam refractioni horizontali $33'$ angulus quæsitus obvenisset $59°. 51'. 11''$, cujus differentia a $60° = 8'. 49''$, & $\frac{2}{11}$ hujus $= 1'. 36''$, 2 refractio paullo minor Bradleyanâ ob m, & n diversa.

33. Pro inveniendis numeris Simpsonianis, & Bradleyanis ex observationibus requiruntur binæ refractiones r, & r', quibus aptabimus formulas notissimas trigonometriæ. Est $sin.(a - nr) = sin.a\,cos.nr - sin.nr\,cos.a$: sed $cos.nr = 1 - sin.vers.nr = 1 - 2(sin.\frac{1}{2}nr)^2$, sive, posito nr pro suo sinu, $= 1 - \frac{1}{2}n^2r^2$. Quare erit $sin.(a - nr) = sin.a - \frac{1}{2}n^2r^2 sin.a - nr\,cos.a$, & cum sit (num. 21) $m\,sin.a = sin.(a - nr)$; dividendo per $sin.a$, & ponendo $cot.a$ pro $\frac{cos.a}{sin.a}$, erit $m = 1 - \frac{1}{2}n^2r^2 - nr\,cot.a$. Cum idem valor habeatur pro a', & r', ablato communi 1, erit $\frac{1}{2}n^2r^2 - \frac{1}{2}n^2r'^2 = nr'cot.a' - nr\,cot.a$, & $\frac{1}{2}n = \frac{r'cot.a' - r\,cot.a}{r^2 - r'^2}$, & si r sit refractio horizontalis, erit $\frac{1}{2}n = \frac{r'cot.a'}{r^2 - r'^2}$, factâ $cot.a = 0$. Facile huic formulæ aptari poterunt logarithmi ob $r^2 - r'^2 = (r + r')\times(r - r')$. Verum ad servandam homogeneitatem unitatis, nam habentur r, & r' in secundis peripheriæ, & $cot.a'$ in partibus radii, præstabit, redactis r, & r' ad secunda, concipere totum valorem ductum in $\frac{60}{sin.1'}$ (*). Sive pro denominatore adhibere log. $(r + r')$

(*) In valore $\frac{1}{2}n = \frac{r'cot.a'}{(r+r')(r-r')}$ habentur r, r' in iis particulis, in quas concipitur divisa peripheria habens secunda $360 \times 60 \times 60$, & $cot.a$ in iis, in quas con-

$(r + r') +$ log. $(r - r') + 4,6855749$, qui postremus valor logarithmicus est $=$ log. $(sin.1' -$ log. $60°)$. Invento n per ejusmodi formulam, habebitur $m = 1 - \frac{1}{2}n^2r'^2 - nr' \, cot.a'$; ubi, si r' sit refractio satis distans ab horizontali, ut $cot.a'$ non sit valor nimis exiguus, omitti poterit $\frac{1}{2}n^2r'^2$, & assumi $m = 1 - nr' cot.a'$, $1 - m = nr'.cot.a'$. Sed pro r horizontali, facilius invenietur valor m ex formula finali numeri 29, ubi habetur $m = cos.nr$.

34. Simpsonus (num. 27) pro $a = 60°$ adhibuit $r' = 1'.30''\frac{1}{2}$, & pro refractione horizontali $r = 33'$. Bradleyana autem refractionum tabula habet pro iisdem distantiis a zenith $r' = 1'.38'',4$,

concipitur divisus radius. Ad servandam homogeneitatem earum partium potest concipi is valor divisus in duos coefficientes fractionarios $\frac{r'}{r+r'}$, & $\frac{cot.a'}{r-r'}$. Pro priore fractione possunt in r, & r' retineri numeri secundorum, & pro posteriore videndum erit, qui valor respondeat arcui habenti numerum secundorum $r - r'$ in his partibus radii. Habentur in tabulis sinuum communibus logarithmi sinuum, & tangentium usque ad septem notas decimalium, & tamen logarihmus sinus, qui est minor arcu, & tangentis, quæ est ipso major, non differunt ne per unicam quidem unitatem postremæ notæ. Hinc logarithmus is idem est etiam logarithmus arcus unius minuti assumptus in iis partibus. Porro arcus unius minuti ad arcum $r - r'$ reductum ad secunda est, ut 60 ad eum numerum $r - r'$. Quare valor arcus habentis numerum secundorum $r - r'$ erit $= \frac{(r-r')sin.1'}{60}$, eritque $\frac{1}{2}n = \frac{r'cot.a'}{(r+r')(r-r')} \times \frac{60}{sin.1'}$. Reductis ad secunda valoribus r, r', assumentur e tabulis logarithmi numerorum r, $r + r'$, $r - r'$, 60, & $log.cot.a'$, $log.sin.1'$. Pro numeratore poterit assumi $r'cot.a'$, & pro denominatore $(r + r') \times (r - r') \times \frac{sin.1'}{60}$, cujus postremæ fractionis habebitur logarithmus constans $= log.sin.1' - log.60 = 6,4637261 - 1,7781512 = 4,6855749$, qui valor habetur in textu, ubi characteristica 4 non indicat, quinque notas integras in numero correspondente, sed primas quinque decimalium notas habere zero. Is logarithmus constans addendus erit logarithmis $r + r'$, & $r - r'$.

Porro hic numerus logarithmicus constans est ille idem, quem, posito in fine 5 pro 49, proposuimus in adnotatione ad numerum 13 pro reductione secundorum ad partes radii petita a numero secundorum in ipso radio. Hic adhibuimus logarithmum sinus unius minuti, qui cum congruat cum logarithmo tangentis, tuto adhiberi potuit pro logarithmo arcus secundorum 60 reducto ad partes radii.

$r = 33'$. Si ii numeri substituantur in superioribus formulis, invenitur pro Simpsono $n = 5,5$ sive $\frac{11}{2}$, & $m = cos. 3^\circ. 1'. \frac{1}{2}$ $= 0,9986066$, & pro Bradleyo $n = 5,992$, sive quamproxime illud 6, vel $\frac{12}{2}$. Tum $m = cos. 3^\circ. 17',74 = 0,998346$. Cassinus (Acad. Paris. an. 1714) habet $r = 32'. 20''$, & $r' = 5'. 24''$, pro $a' = 80^\circ$. Inde obtinetur $n = 6,452$, $m = cos. 3^\circ. 28',62$ $= 0,998159$.

35. Facile jam est ex hisce numeris computare tabulas refractionum: pro quavis alia distantia a zenith $= a'$ habebitur quivis valor r', inveniendo angulum $a' - nr'$, cujus sinus $m. sin. a'$; & dividendo per n ejus differentiam ab a'. Calculo inito inveniuntur numeri satis conformes tabulæ Bradleyanæ, quæ nimirum ex hisce ipsis principiis est computata: sed non habetur idem consensus cum tabula Cailliana. Illa quidem exhibet refractiones majores

dii. Poterat hic adhiberi immediate illa reductio, sed hanc retinuimus, quam posueramus in veteri hujus dissertationis textu, illâ ibi substitutâ multo post ipsam dissertationem conscriptam.

En autem specimen ejus calculi tam pro numeris Simpsonianis, quam pro Bradleyanis, neglectâ ultimâ decimalium notâ: possent autem negligi etiam plures, cum satis sit invenire valorem n usque ad partes decimas, vel ad summum centesimas ob exiguitatem refractionum, de quibus agitur.

Formulæ	Pro Simpsono		Pro Bradleyo numeri	logarithmi
$\frac{1}{2}n = \frac{r' cot. a'}{r' - r'^2}$	$r = 33' = \dots\dots 1980''$		$33' = \dots\dots 1980$	
	$r' = 1. 30'',5 = 90,5$		$1. 38,4 = 98,4$	
	$r + r' = \dots\dots 2070,5$	3,316075	$\dots\dots 2078,4$	3,317729
	$r - r' = \dots\dots 1889,5$	3,276347	$\dots\dots 1881,6$	3,274528
	constans addendus	4,685575		4,685575
	log. denominatoris	1,277997		1,277832
	complem. arithmet.	8,722003		8,722168
	r'	1,956649		1,992995
	$cot. a' = 60^\circ$	9,761439		9,761439
	$\frac{1}{2}n = 2,75$	0,440091	2,996	0,476602
	$n = 5,5$		5,99	
$m = cos. nr'$	$nr' = 5,5 \times 33' = 181',5 = 3^\circ. 1',5$		$5,992 \times 33' = 196' = 3^\circ. 17',74$	
	$m = cos. 3^\circ. 1',5 = 0,9986066$		$3. 18',74 = 0,998159$	

jores Bradleyanis, nec in eadem ratione majores: nam pro distantia a zenith $= 60^\circ$ habet $1'.54'',4$ majorem per $16''$ Bradleyanâ $1'.38'',4$; & pro distantia 84° habet $8',42''$, majorem tantummodo per $14'',2$ Bradleyanâ $8'.27'',8$, quod jam indicat, hujusmodi theoriam cum tabula Cailliana non consentire.

36. Dissensus erit multo magis manifestus, si quærantur numeri m, & n ex binis refractionibus desumptis e tabula Cailliana. Ipse quidem omisit postremos 6 gradus horizonti proximos, cum ibi observationes expertus sit incertas admodum, & varias, adeoque non habet horizontalem. Potest assumi ejus refractio $r' = 1'.54'',4$ pro $a' = 60^\circ$, & $r = 8'.42''$ pro $a = 84^\circ$, & adhiberi formula integra numeri 33, nimirum $\frac{r' cot.a' - r cot.a}{r^2 - r'^2} = \frac{1}{2}n$. Si in ea formulâ substituantur valores Bradleyani $r' = 98'',4$, pro $a' = 60^\circ$, $r = 8',27'',8 = 507'',8$ pro $a = 84^\circ$; invenietur $\frac{1}{2}n = 47,22 - 44,36 = 2,86$ satis proximus valori 3 numeri 34, ubi $n = 6$. Verum adhibitis Caillianis $r' = 114'',4$; $r = 8',42'' = 522''$, habetur $52,52 - 43,63 = 8,89$, unde $n = 17,78$, tum $m = 0,994307 = cos.6^\circ.7'$. Ii numeri satisfaciunt quidem iis binis refractionibus: sed postremæ horizonti proximæ inde obveniunt e contrario multo minores, & horizontalis evadit pro nostris hisce regionibus manifesto nimis erronea. Si ea dicatur r; habetur ex formulâ $m = cos.nr$. Cum enim inventum sit $cos.nr = cos\ 6^\circ.7'$, erit $r = \frac{6^\circ,7'}{n} = \frac{367'}{17,78} = 20'.38''$. Excessus refractionum Caillianarum supra Bradleyanas in exiguis distantiis a zenith perquam exiguus, initio quidem perpetuo crescit, tum decrescit (num. 35) ita tamen, ut adhuc ultima pertinens ad distantiam 84°, sit major; sed si tabula reliqua computetur ex iisdem principiis, ita decrescit ille excessus, ut ante finem quadrantis evanescat, tum abeat in defectum.

37. Ipse quidem Caillius suam tabulam computavit ex immenso numero observationum post ingeniosissimas combinationes, uti diximus num. 14: sed, ut ibi innuimus, dubium superest de veri-

rificatione sectoris ab ipso adhibiti, & jam ibidem vidimus, e refractionibus ipsius erui valorem illum b justo majorem. Valor ipse b potest facile erui etiam hic ex valore m jam invento. Est enim (num. 13) pro distantiis non nimis proximis quadranti $b = r \cot. a$, & (num. 33) omissis accentibus, qui ibi adhibentur pro iisdem, $1 - m = nr \cot. a$, adeoque $1 - m = nb$, & $b = \frac{1-m}{n}$, sive Bradleyo ob $m = 0{,}998346$ (num. 34), $b = \frac{0{,}001654}{5{,}992}$ $= 0{,}0002760$. Simpsono ob $m = 0{,}998607$, $b = \frac{1}{11} \times 0{,}001393$ $= 0{,}0002527$. Valor Bouguerianus satis congruit cum inventis numero 13 per unicam refractionem, nimirum $0{,}0002755$, & $0{,}0002761$, ac valor Simpsonianus penitus cum invento ibidem itidem $= 0{,}0002533$, ut hic. Pro Cassino ob $m = 0{,}998159$, & $n = 6{,}452$ obvenit $b = 0{,}0002853$.

38. Sub zona torrida ex Bouguerianis observationibus habitis in ipsa superficie terræ ad mare hi omnes numeri evadunt admodum diversi. Ipse ibidem (Acad. Par. an. 1749) observavit refractionem horizontalem $27'$, quæ idcirco minorem debet exhibere valorem b: observavit autem immediate refractiones pro solis 7 gradibus elevationis supra horizontem, quarum postrema debita ipsis, sive valori $a = 83°$ est $5'.30''$. Ex iis invenietur n per formulam num. 33, $\frac{1}{2}n = \frac{r' \cot. a'}{r^2 - r'^2}$, positis $r' = 5'.30''$, $r = 27'$, $a' = 83°$, eritque $\frac{1}{2}n = 3{,}3225$, adeoque $n = 6{,}645$. Tum $m = \cos. nr = \cos. 2°.59',4 = 0{,}998636$, $b = \frac{1-m}{n}$ $= 0{,}0002053$.

39. E valoribus m, b profluit altitudo atmosphæræ refringentis e, cum sit (num 9.) $m = \frac{1+b}{1+e}$, adeoque $e = \frac{1-m+b}{m}$, sive ob $b = \frac{1-m}{n}$, $e = \frac{(n+1)b}{m} = \frac{(n+1)(1-m)}{mn}$, ubi interea constat id, quod num. 25 affirmavimus, magis mutari distantiam, quam velocitatem: nam illius mutatio e ad hujus mutationem b est, ut $n+1$, quod superat usque adeo unitatem, ad m, quod eâ

eâ tantillo est minus. Potest autem assumi pro earum mutationum ratione $n+1$ ad 1. Ad inveniendum valorem e habentur pro Bradleyo, Simpsono, Cassino, valores n, & m num. 34, b num. 37, pro Bouguerio omnes tres num. 38: ii cum ipso valore e proveniente ex applicatione eorum numerorum ad formulam $\frac{(n+1)b}{m}$ continentur in sequenti tabula, ubi pro m assumuntur solæ quatuor notæ.

Pro	Bradleyo	Simpsono	Cassino	Bouguerio
n	5,992	5,5	6,452	6,645
b	0,0002760	0,0002527	0,0002853	0,0002053
m	0,9983	0,9986	0,9982	0,9986
e	0,001933	0,001645	0,002130	0,001573

Ii valores respondent radio terræ $=1$. Is ex gradu hexapedarum proxime 57000 eruitur proxime 3266000, per quem numerum multiplicati superiores valores exhibent hexapedas 6313, 5373, 6957, 5137. Bouguerius ibidem adhibet altitudinem atmosphæræ tantillo majorem, nimirum 5158, quam, ut infra etiam videbimus, deducit partim e refractionibus horizontalibus habitis in diversis altitudinibus, partim e theoria, quæ itidem recidit in vim proxime constantem (num. 22). Cassinus (Acad. Par. an. 1714) invenit 6918 parum itidem discrepantem ab hîc inventâ, licet is ibi adhibens arcum circularem pro figura a radio descripta, utatur tam pro hoc valore eruendo, quam pro refractionibus computandis methodo indirecta, & minus accurata, quam sint formulæ directæ hîc a nobis adhibitæ, & pertinentes ad illam ipsam hypothesim formæ circularis, quæ sine proxima æqualitate virium refringentium haberi non potest.

40. Posset in hac theoria altitudo atmosphæræ inveniri e singulis refractionibus una cum altitudine puncti I pro eo radio, cui ea refractio respondet, ope valorum x, x'. Est enim (num. 9) CFI $= a-(x-r)$, & (num. 12) CIA $= a-x'$, cui addito AIH $= r$, fiet CIH $= a-(x'-r)$. Est autem sin. CIA $=$

sin.

$sin.(a - x'): sin.CAI = sin.CAG = sin.a :: CA = 1 : CI = \frac{sin.a}{sin.(a - x')}$: tum $sin.CFI = sin.(a - (x - r)) : sin.CIF = sin.CIH = sin.(a - (x' - r)) :: CI : CF = \frac{sin.a \times sin.(a - (x' - r))}{sin.(a - x') \times sin.(a - (x - r))}$.

Porro ex num. 9, & 17 facile colligitur, illos valores $\frac{1}{2}(x - r)$, $x' - \frac{1}{2}r$ esse illum ipsum valorem Bradleyanum hr adhibitum numer. 27, existente $h = \frac{1}{2}n$ (num. 29): inde autem profluit $\frac{1}{2}(x - r) = \frac{1}{2}nr$, & $x - r = nr$: tum $x' - \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}nr$, & $x' = \frac{1}{2}(n + 1)r$, $x' - r = \frac{1}{2}(n - 1)r$. Datis autem $x - r$, x', $x' - r$ per r, habentur per a, & r toti valores CI, CF. E formula $x - r = nr$ habetur $x = (n + 1)r$, unde profluit theorema, quod erit usui inferius: *Refractio ad angulum subtensum a radio in centro terræ est, ut 1 ad $n + 1$*. Est enim $r : x :: 1 : n + 1$.

41. Si radius sit horizontalis; formulæ evadunt multo simpliciores, cum fiat $sin.a = 1$, & in reliquis terminis, omisso a, satis sit ponere cosinum residui pro sinu, nimirum $cos.(x' - r)$, $cos.x'$, $cos.x - r$ pro $sin.(a - (x' - r))$, $sin.(a - x')$, $sin.(a - (x - r))$. Si radius satis elevatus adveniat supra horizontem, poterunt formulæ reddi simpliciores ope formularum differentialium, & ope divisionum, in quibus omittantur potentiæ superiores exigui multipli valoris r jam exigui. Sic erit $CI = \frac{sin.a}{sin.a - x'cos.a} = 1 + \frac{x'cos.a}{sin.a} = 1 + x'cot.a$: hinc, ablato radio $= 1$, erit altitudo puncti I $= x'cot.a = \frac{1}{2}(n + 1)r\,cot.a = \frac{1}{2}(n + 1)b$ (num. 37).

42. Cum is valor sit constans, erit constans elevatio intersectionis I binarum tangentium in omnibus radiis satis remotis ab horizonte: est autem is valor quamproxime dimidius valoris $e = \frac{(n + 1)b}{m}$ (num. 39): nam valor $m = \frac{1 + b}{1 + e}$ parum abludit ab unitate ob valores b, & e exiguos respectu unitatis ipsius, ut eum invenimus ubique num. 34, & 38. Atque id quidem ita esse debuit: nam ob exiguam radii curvaturam binæ tangentes confunduntur ad sensum cum chorda, & in hac virium constantium hypothesi, punctum I jacet in ipsius medio ob formam arcus prope cir-

pe circularem. Si autem CI, CF occurrant arcui terrestri in L, M, & AIF habeatur pro unica recta; FAM haberi poterit pro triangulo, & IL, FM pro parallelis in radio quovis satis erecto supra tangentem terræ ductam per A, adeoque erit IL $= \frac{1}{2}$FM. Si radius IF esset horizontalis; AIF esset tangens arcus ALM: tum esset proxime IL : FM :: AI^2 : AF^2, sive illa hujus subquadrupla. Et hæc quidem invenientur itidem, si formulis superioribus applicentur numeri.

43. Usque ad quem terminum possint assumi refractiones, ut proportionales tangentibus distantiæ a zenith nihil imminutæ, id quidem pendet a magnitudine valoris x', cum debeat contemni $x' - \frac{1}{2}r$. Apud Bradleyum id licet usque ad distantiam graduum 70°. Ibi refractio apud ipsum est 2'. 35", 1, adeoque $x' - \frac{1}{2}r = 3r = 7'. 45", 3$: eo dempto a 70°, residui 69°. 52'. 14", 7 tangens 272998 a tangente 70° = 274748 differt per 1570. Quare ibi negligitur $\frac{1}{174}$ totius, dum refractio ibi est = 155, 1; adeoque committitur error adhuc paullo minor uno secundo. Caillius illam proportionalitatem admittit usque ad 48°. tantummodo.

44. Ex num. 39 collato cum 20 invenitur ratio diametri circuli osculatoris in ima radii parte in A ad eam, quæ habetur in summa atmosphæra, in ea hypothesi vis, quæ indicata est numero 20, ex qua profluxerunt accuratè regulæ Simpsoniana, & Bradleyana, ut innuitur numero 25. Nam in ipso numero 25 inde eruitur, esse diametrum circuli osculatoris in ratione composita ex directa simplici celeritatis, & duplicata distantiæ a centro terræ. Celeritas in ima atmosphæra est ad celeritatem in summa (num. 9) ut $1 + b$ ad 1, & distantia in ima atmosphæra est 1, in summa $1 + e$. Hinc ea ratio est $1(1+b)$ ad $(1+e)^2 \times 1$, sive 1 ad $\frac{(1+e)^2}{1+b} = 1 + 2e - b$ ob b, & e quantitates exiguas, quæ cum (num. 39) sint Bradleyo 0,0002760, & 0,001933; erit ea ratio 1 ad 1,00359: discrimen est $\frac{1}{280}$ totius: hinc is arcus assumi potest pro circulari. Si vis sit constans accurate; in valore nu-

numeri 24 remanet $c^3 z$, cumque in imo, & summo rationes c, & z sint 1 ad $1+b$, & $1+e$ ad 1, fiet ratio 1 ad $\frac{1+e}{(1+b)^3}$ $= 1 + e - 3b$, nimirum adhibitis numeris Bradleyanis, $=$ 0,001105 multo magis ad æqualitatem accedens.

45. Potest autem pariter erui absoluta curvatura cujusvis radii determinando ejus semidiametrum pro uno ex ipsis. Sit (fig.3) AF radius horizontalis, cujus binæ tangentes FIH, AI cum chorda AF, quæ superficiei terræ occurrat in P, ducaturque radius CP, recta CF, & FQ perpendicularis ad tangentem FI, cujus concursus cum semidiametro AC producta determinabit proxime centrum circuli osculatoris in Q ob angulos ad A, & F rectos in quadrilineo AIFQ anguli ad I, & Q erunt simul duo recti, adeoque simul æquales binis interno, & externo ad I, ac dempto interno, erit AQF $=$ AIH refractioni horizontali. Hinc ob angulos internos, & oppositos simul huic æquales in triangulo isoscelio AIF erit IAF $= \frac{1}{2} r$. Demum in triangulis isosceliis ACP, AQF habentibus angulum communem in A, adeoque æquales etiam angulos in P, & F, erit & ACP $=$ AQF, ac PC parallela FQ, & AC : AQ :: AP : AF.

46. Porro rectæ AP, AF erunt quamproxime, ut anguli ACP, ACF, qui sunt exigui: si enim concipiatur CD perpendicularis ad AP; erunt DA, DP, DF tangentes angulorum DCA, DCP, DCF, quæ assumi possunt pro arcubus eos angulos subtendentibus: sunt enim exigui, cum ACP æquetur refractioni horizontali r, & (num.40) sit n, nimirum hic ACF $= (n+1)r$. Hinc AP : AF :: 1 : $n+1$, adeoque & radius terræ AC ad semidiametrum circuli, ad quem pertinet radius horizontalis, ut 1 ad $n+1$, sive ille ad hanc, ut 1 pro Bradleyo ad 6,992, pro Simpsono ad 6,5, pro Bouguerio (num.38) in zona torrida ad 7,645. Accuratius inveniri potest ratio AC ad AP notando, esse AP chordam arcus metientis refractionem horizontalem, quæ Bradleyo, & Simpsono est 33', Bouguerio sub zona torrida 27', adeoque ut calculum instituamus pro Bradleyo, erit AP duplum sinus $16\frac{1}{2}' = 0{,}0095993$. Invenietur autem AF ex datis in triangu-

lo

lo ACF lateribus AC $= 1$, CF $= 1 + e = 1{,}001933$, ac angulo CAF complemento dimidiæ refractionis $16'\frac{1}{2}$: unde profluit angulus ACF $= 3°.50'.42''$ per sola $2''$ discrepans a $6{,}992 \times 33' = 3°.50'.44''$, tum AF $= 0{,}067188$, quæ divisa per AP $= 0{,}0095993$ exhibet $6{,}999$, qui valor consentit penitus cum eo, qui inveniri debebat $= (n+1)$ AC $= 6{,}992$. Idem consensus habebitur in reliquis binis hypothesibus.

§. IV.

De refractionibus cælestibus pro locis elevatioribus, & de terrestribus objectorum, quæ sunt intra atmosphæram.

47. QUÆCUNQUE dicta sunt de natura curvæ a radiis descriptæ, & relatione ad se invicem refractionum, quæ pertinent ad diversas distantias apparentes a zenith, sunt communia puncto cuivis utcumque elevato supra superficiem terræ intra atmosphæram, cum punctum A possit concipi ubicumque intra ipsam. Forma curvæ circularis inventa est num. 23 ex sola vi proxime constanti independenter ab altitudine atmosphæræ supra punctum A, & ab eadem sola pendet deductio regularum Simpsoni, & Bradleyi. Pendet ab ea sola & magnitudo absoluta diametri circuli osculantis curvam in puncto elevatiore, quæ manente eodem angulo a, manebit proxime eadem. Nam in formula generali $\frac{c'z}{uc'sin.a}$ (numer. 23) si comparentur eæ diametri pro radiis advenientibus in eodem angulo ad puncta diversæ elevationis, erit $sin.a$, & c' valor idem pro omnibus. Quod si sit vis u, ut $c'z$, in quo solo casu curva radii est accurate circularis, erit constans etiam valor $\frac{c'z}{u}$, adeoque in ea hypothesi habetur hujusmodi theorema: *Comparando loca omnia, & quoscumque radios homogeneos, diameter circuli osculatoris erit reciproce ut sinus distantiæ apparentis a zenith, adeoque in radiis advenientibus in eodem angulo cum recta verticali erit accurate idem.* At in hypothesi, ex qua profluxerunt accurate regulæ Simpsoni, & Bradleyi, est (num. 25)

u ut $\frac{c^2}{z}$, hinc diameter ipsa, ut $\frac{cz^2}{sin.a}$: adeoque *in radiis advenientibus in eodem angulo cum recta verticali erit directe ut celeritas, & quadratum distantiæ loci, ad quem devenit, a centro terræ conjunctim*. Patet autem ob adeo exiguum discrimen ejus distantiæ a centro terræ, eas posse assumi pro æqualibus etiam in ea hypothesi: nam tota atmosphæræ altitudo e numeris Bradleyanis, existente semidiametro terræ $= 1$, est 0,001933, adeoque in loco elevato per dimidium hujus altitudinis, elevatio esset proxime $\frac{1}{1000}$ semidiametri terræ. Ejus distantiæ quadratum ab hujus quadrato non differet nisi $\frac{1}{500}$ sui parte, cujus contemptus nihil ad sensum turbabit refractiones inde erutas. Cum igitur decrementum velocitatis in ascendendo adhuc minuat discrimen ipsum; poterunt pro locis utcumque elevatis assumi circuli radiorum advenientium in eodem angulo cum verticali (exhibentium scilicet easdem distantias apparentes a zenith) pro æqualibus. Idem autem licebit in quavis hypothesi, in qua vis sit proxime constans, cum, ea constante, habeatur c^2, qui valor per totam atmosphæræ altitudinem non mutatur parte sui $\frac{1}{1000}$. Id tamen non illud præstat, ut refractiones radiorum advenientium ad loca diversam elevationem habentia in iisdem angulis debeant esse æquales: pendent enim non solum a magnitudine totius circuli, sed etiam a magnitudine arcus ipsius, qui intra atmosphæram refringentem cadit. Adhuc tamen earum magnitudinem facile determinabimus.

48. Et primo quidem eæ definiuntur per constructionem geometricam: sit (fig. 4) ZN diameter atmosphæræ refringentis, CA semidiameter terræ, A' punctum quodvis utcunque elevatum supra ipsius superficiem, ad quod deveniat radius F'A' cum ultima directione BA' data exhibente datam distantiam apparentem a zenith ZA'B, & quæratur refractio ipsi respondens. Hoc est utique problema generale huc pertinens, & habet solutionem itidem

gene-

generalem, & elegantissimam. In ipsa ZC producta assumatur AQ ad terræ semidiametrum CA in ratione $n + 1$ ad 1, nimirum pro Bradleyo $= 6,992 \times CA$. Ducantur per Q, & A' rectæ perpendiculares rectis A'Q, A'B, quæ sibi invicem occurrant in R. Centro R radio RA' ducatur arcus circuli A'F', qui superficiei atmosphæræ occurrat in F', & recta F'R: tum angulus A'RF' exhibebit refractionem quæsitam.

49. Ea determinatio erit accurata pro hypothesi exhibente circulum accuratum, & satis proxima pro quavis hypothesi vis proxime constantis. Potest autem haberi refractio nihil ad sensum abludens a vera ex solo arcu ZF' diviso per $n + 1$, cum (numer. 40) sit refractio $= r$ ad angulum ACF' in centro $= x$, ut 1 ad $n + 1$. Porro is angulus inveniri potest etiam per calculum trigonometricum. In triangulis rectangulis RQC, RQA' est A'Q : CQ :: $cot.$RA'Q : $cot.$RCQ. Est autem, ob CA, CA' quamproxime æquales, A'Q : CQ :: $n + 1 : n$, & RA'Q, ob angulum RA'B rectum, est complementum ZA'B $= a$: hinc erit $cot.\text{RCQ} = \frac{n}{n+1} \times tan.a$. In triangulo RQC dato latere CQ, & angulo ad C, invenietur RC. Tum in triangulo RCF', datis jam omnibus lateribus, invenietur angulus ad C, adeoque habebitur duorum angulorum ad C jam cognitorum supplementum, nempe angulus F'CZ, qui divisus per $n + 1$ dabit refractionem quæsitam. Si refractio ipsa supponatur jam proxime cognita, habebitur angulus F'A'B, qui æquatur dimidio angulo A'RF' ad centrum, nimirum dimidiæ refractioni. Hinc habebitur CA'F' supplementum ZA'F' $= a + \frac{1}{2}r$, ex quo, & lateribus CA', CF' notis habebitur angulus A'CF'. Ea methodo utitur Bouguerius loco citato: sed ea habet idem incommodum, quod Bradleyana, quæ (num. 30) supponit pariter refractionem jam proxime cognitam.

50. Hinc optimum factu est, adhibere regulam Simpsoni rite aptatam, quæ etiam per formulas numeri 31 calculum reddit expeditiorem. Eæ formulæ adhibent valores n, & m: valor n est saltem quamproxime idem pro quavis elevatione supra

superficiem maris, valor m pro aliis elevationibus est alius, & oportet determinare illum, qui convenit elevationi, in qua observationes instituuntur. Valor n est quamproxime idem, qui in ipsa terræ superficie: nam semidiameter circuli, ad quem pertinet radius horizontalis est (num. 46) ad semidiametrum terræ, ut $n+1$ ad 1, quæ ratio non pendet ab elevatione loci, & semidiameter ipsa circuli est (num. 47) ejusdem magnitudinis pro locis omnibus, qui inventus semel per duas observationes cum valore m, ut numer. 34, in loco quovis retinebitur pro elevationibus aliis quibuscunque. Deinde invenietur valor m e data quavis elevatione A'Z atmosphæræ refringentis supra locum A' (*). Si enim ea dicatur e'; erit (num. 39) $e' = \frac{(n+1)(1-m)}{mn}$, unde eruitur $m = \frac{n+1}{(n+1)+e'n} = 1 - \frac{e'n}{n+1}$, contemptis nimirum ulterioribus po-

(*) Valor m pro dato quovis loco inveniri potest etiam sine ulla refractione ibi observata per solam altitudinem e' atmosphæræ supra eum locum, & valorem b inventum, ut num. 37, ex observationibus institutis ubicumque alibi. Is est $= \frac{1+b}{1+e}$ (num. 9). Hinc si ponantur accentus iisdem litteris pro eo loco erit $m' = \frac{1+b'}{1+e'} = 1 + b' - e'$, institutâ nimirum divisione, & neglectis terminis habentibus potentias superiores valoris exigui e', vel factum $e'b'$. Porro si celeritates in ima atmosphæra, & in loco superiore quovis dicantur c', c ut prius, ac celeritas in summa atmosphæra c''; erit (num. 9) $1 : 1+b :: c'' : c' = c'' + bc''$, & eodem pacto $c = c'' + b'c''$.

Porro e formula (num. 5) $cdc = udz$ eruitur, ut ibi, in hypothesi vis u constantis incrementum quadrati velocitatis debere esse idem in paribus accessibus ad centrum, adeoque erit $c'^2 - c''^2 : c^2 - c''^2 :: e : e'$. Porro, ablato c''^2 a $c'^2 = c''^2 + 2bc''^2 + b^2c''^2$, & neglecto $b^2c''^2$, evadit $c'^2 - c''^2 = 2bc''^2$, & eodem pacto $c^2 - c''^2 = 2b'c''^2$. Quare fiet $e : e' :: 2bc''^2 : 2b'c''^2 :: b : b' = b \times \frac{e'}{e}$, adeoque habetur etiam b' per b, e, e', ubi possunt assumi e, e' etiam in hexapedis: sed pro habendo deinde valore $m' = 1 + b' - e'$ oportet valorem e' reducere ad partes radii.

In exemplo numeri sequentis est in hexapedis $e = 5137$, $e' = 2749$; tum $b = 0{,}0002053$ (num. 38), adeoque $b' = 0{,}0001098$: est autem ibidem e' in partibus semidiametri terræ $= 0{,}0008417$, adeoque evadit $m' = 1{,}0001098 - 0{,}0008417 = 0{,}9992681$, fere penitus idem valor, qui aliâ illâ methodo evasit ibidem $= 0{,}0002684$.

potentiis valoris e' exigui respectu 1, & n. Eo pacto habetur etiam m ex iisdem datis e', n, e quibus pendet constructio superior geometrica.

51. Exemplum desumi potest ex observationibus Bouguerianis habitis in zona torrida in monte Chimboraco, cujus elevationem supra superficiem maris is invenit hexapedarum 2388. Invenimus autem (num. 38) ex ejus observationibus habitis ibidem prope ipsam maris superficiem valorem $n = 6,645$, & (num. 39) altitudinem atmosphæræ e hexapedarum 5137: hinc residua altitudo A'Z supra eum montem erit $e' = 2749$, quæ divisa per 3266000, numerum hexapedarum in semidiametro terræ, exhibebit $A'Z = e' = 0,0008417$, ubi ea semidiameter $= 1$: hinc habetur $m = 1 - \frac{e'n}{n+1} = 0,9992684$, qui valor cum sit $= \cos. nr$, existente r refractione horizontali (num. 29), erit $nr = 2°.\ 11'.\ 30''$, $r = 19'.\ 47'',4$. Is valor est fere accurate medius inter tres ab ipso ibidem observatos, qui habentur in tabella sequentis numeri, ac evadit $19'.18'',5$.

52. Inde jam ex formulis num. 31 $\cos. q = m \cos. p$ (existente p elevatione apparente supra horizontem, qui valor idcirco erit negativus, ubi pro elevatione habeatur depressio), & $r = \frac{q-p}{n}$, habebitur quævis alia refractio tum pro objectis elevatis supra horizontem, tum pro depressis infra, cujusmodi observationes occurrunt in montibus editis, ex quibus in horizontem physicum depressum patet despectus. In sequenti tabella habentur aliquot refractiones inde erutæ, & comparatæ cum observatis a Bouguerio. Prima columna habet elevationes, & depressiones, apposito his signo negativo, secunda refractiones erutas ex hoc calculo, tertia observatas a Bouguerio, ubi cum plures ponuntur, institutæ sunt diebus diversis. Patet autem, computatas vel cadere inter observatas, vel ab ipsis differre minus, quam nonnullæ ex iis ipsis inter se differant.

Altit.

Altit.	Refr. comp.	Refr. observ.	Altit.	Refr. comp.	Refr. obs.
7°.	3'. 1"	3'. 51" 3 . 24	— 0°. 31'	25'. 0"	24'. 20"
1°.	12. 43	14 . 32 13 . 46 13 . 23	— 1 . 0	30. 47	30. 1
0°.	19. 47	20 . 17 19 . 34 19 . 35	— 1 . 17	34. 43	34. 47

53. Hìc autem notandum illud, in ea Bouguerii dissertatione (Mem. Acad. Par. an. 1749 pag. 79) irrepsisse errorem in serie depressionum apparentium, positâ 0°. 31" pro 0°. 31', qui quidem error occasionem præbuit historico (pag. 153) dicendi, *Bouguerium summopere miratum refractionem, quæ in horizonte fuerat* 19' $\frac{1}{2}$, *inventam* 24' $\frac{1}{3}$ *immediate infra, tum deinde crevisse regulariter, tanquam si saltum quendam habuerit in ipso transitu ex hemisphærio superiore in inferius*. Bouguerius ibidem vocat utique subitum incrementum, sed intelligit tantummodo admodum celerem: nam pro exemplo non affert illam 24' $\frac{1}{3}$, ut debitam 0'. 31", quod omnino præstitisset, sed reliquas binas pro 1°, & 1°. 17', ac explicatio ejus phænomeni desumpta ex sua theoria, quam adhibet, & quæ cum nostris etiam principiis congruit, inducit mutationem utique celerem, sed regularem. Ea pendet ex ipsa illa eadem formula $r = \frac{q-p}{n}$, posito $cos.q = m cos.p$: augentur refractiones plurimum infra horizontem, quia illa, quæ prius fuerat differentia binorum angulorum q, p, jam evadit summa, ubi in ipso transitu per horizontem mutatur p ex positivo in negativum, & auctâ depressione, augetur uterque valor. Nam p decrescit regulariter usque ad zero, tum crescit ex parte negativa, & eidem positivo, ac negativo ejusdem magnitudinis respondet idem q valoris semper positivi, cum nimirum sinus anguli $a - nr = m sin.a$ semper minor, quam $sin.a$ crescat, donec hìc fiat æqualis radio, ubi ille fit maximus, tum decrescat, quin unquam eva-

evadat sinus totus, ut idcirco $sin.(a-nr)$ retrocedat, aucto iterum valore q, qui evaserat quidem minimus, sed non evanuerat.

54. Porro facile perspicitur ex ipsa etiam constructione numeri 48, debere augeri plurimum refractionem in transitu per horizontem. Id ibi accidit idcirco, quod longitudo viæ radii intra atmosphæram, a qua pendet magnitudo refractionis, mutatur plurimum ibidem. Concipiatur motus circa punctum A' chordæ A'F', quæ est ad sensum æqualis suo arcui: ejus angulus cum recta verticali A'Z est distantia apparens a zenith ZA'B aucta angulo BA'F', qui æquatur dimidiæ refractioni (num. 49). Ubi is angulus erit nullus, recta A'F' congruet cum A'Z: eo aucto, augebitur, sed initio parum admodum, ita, ut eo existente $= 60°$, nondum sit dupla ipsius A'Z, quod admodum facile demonstrari potest. Ubi eo existente recto, ea evaserit horizontalis, jam erit media geometrice proportionalis inter A'Z, & A'N: nimirum cum AN major, quam 2, contineat A'Z $= 0,0008417$ (num. 51) vicibus fere 2400, ipsa A'F eam ibi continebit fere 50 vicibus. Crescente adhuc magis illo angulo, crescit plurimum ea chorda, adeoque & arcus. Longitudo arcus cujusvis facile invenitur, inventâ per superiores regulas refractione pro quavis distantia apparente a zenith $= a$, sive ab horizonte $= p$: nam semidiameter circuli pro radio horizontali est $n+1$ (num. 46), adeoque pro quovis alio $= \frac{n+1}{sin.a} = \frac{n+1}{cos.p}$. Arcus autem est angulus ad centrum ductus in semidiametrum, & is ipse angulus æquatur refractioni r. Igitur arcus ipse erit $= \frac{(n+1)r}{cos.p}$, qui valor ductus in 3266000 exhibebit valorem ipsius arcus per numerum hexapedarum.

55. Pro radio horizontali est $r = 33'$, & $cos.p = 1$. Assumpto sinu 33', ut reducatur ad unitatem eandem, & posito $n=6$ (*) cum Bradleyo, habetur radii via hexapedarum 219456, qui nu-

(*) Hic jam adhibetur pro n numerus 6, ut adhibitus est a Bradleyo, non ille 5,992 ipsi proximus, quem deduximus num. 34 ex ejus refractione.

numerus si dividatur per 33, exhibebit longitudinem viæ 6650 respondentem refractioni unius minuti. Nam in circulo flexus est proportionalis longitudini arcus: adeoque si in quovis alio radio longitudo viæ dicatur l; pro quovis numero minutorum r erit $l = 6650 r \sin. a$: crescit enim arcus in ratione directa numeri minutorum r, & reciproca semidiametri circuli, nimirum & directa $\sin. a$, adeoque $r = \frac{l}{6650 \sin. a}$, unde dabitur refractio per longitudinem viæ, & vice versa. Porro cum arcus terræ respondens uni minuto sit $= \frac{1}{60} \times 57000 = 950$, & via radii $= 6650$, invenitur hæc illius accurate septupla, ut sane debuit, cum (numer. 40) angulus, quem via radii subtendit ad centrum terræ, sit ad refractionem, nimirum $x : r :: n + 1 : 1$.

56. Hæc quidem pertinent ad comparandas vias radii, & refractiones pro diversis radiorum directionibus respectu loci ejusdem: sed si comparentur eædem pertinentes ad diversas elevationes; habebuntur theoremata nihilo minus elegantia, & utilia in hac eadem theoria virium proxime æqualium. Persequemur id, quod pertinet ad refractiones, & arcus radiorum horizontalium. Positâ ea refractione $= r$, est (num. 50) $m = 1 - \frac{e'n}{n+1}$, qui valor ibidem erutus est e valore $\sin.(a - nr) = m \sin. a$, ubi pro $a = 90°$, $\sin. a$ est 1, & nr complementum a, adeoque $m = \cos. nr$. Erit igitur $\cos. nr = 1 - \frac{e'n}{n+1}$, adeoque $\frac{e'n}{n+1} = 1 - \cos. nr = \frac{1}{2} n^2 r^2$ (num. 33). Quare $r^2 = \frac{2e'}{n(n+1)}$: unde ob n communem omnibus elevationibus in eadem regione, erit r^2, ut e', sive r, ut $\sqrt{e'}$. Nimirum *erit refractio horizontalis, ut radix altitudinis atmosphæræ refringentis supra locum*. Id theorema continet regulam, quam eodem loco tradidit Bouguerius, quæ est hujusmodi: *subtrahatur elevatio loci ab altitudine tota atmosphæræ* (ipse exhibet pro hac hexapedas 5158), *& refractio horizontalis erit ut radix residui*.

57. I-

57. Idem theorema facile deprehenditur, si via radii intra atmosphæram habeatur pro rectilinea ob exiguam curvaturam. Tum enim A'F (fig. 4) habebitur pro recta perpendiculari ad diametrum ZN, cujus quadratum cum sit $= A'Z \times A'N$, ac A'N sit proxime constans, erit ipse arcus, & refractio ipsi proportionalis, ut radix ipsius A'Z. Sed quoniam curvatura radii non est ita exigua respectu curvaturæ terræ, & atmosphæræ, qua est tantummodo septuplo minor, sic etiam per geometriam idem theorema accuratius demonstrabitur: sit QE æqualis, & opposita QA', & concipiatur chorda A'F cum sinu suo FO. Cum sit $ZO \times ON = OF^2 = A'O \times OE$; erit ZO : A'O : : OE : ON, sive quamproxime : : A'E : ZN, vel sumptis dimidiis : : AQ : CZ, quæ ratio est constans, cum sit constans semidiameter circuli A'Q pro omnibus elevationibus AA' (num. 47). Erit igitur A'O ut OZ, adeoque ut residua altitudo A'Z, & chorda A'F ad sensum æqualis suo arcui, quæ ob diametrum constantem est in ratione subduplicata sui sinus versi A'O, erit in ratione subduplicata altitudinis A'Z.

58. Ope hujus regulæ ex binis refractionibus horizontalibus observatis in satis magno elevationis intervallo potest determinari altitudo atmosphæræ refringentis factis, *ut differentia quadratorum refractionum observatarum ad quadratum majoris, ita differentia elevationum ad altitudinem supra locum inferiorem*. Pro instituendo calculo adhibeantur binæ refractiones horizontales, altera r inventa in superficie maris, ubi altitudo atmosphæræ refringentis quæsita sit e, altera r' inventa in elevatione supra ipsam superficiem d, ac erit $e' = e - d$: habebitur $r^2 - r'^2 : r^2 : : e' : e$ $= \frac{r^2 e'}{r^2 - r'^2} = \frac{r^2 e'}{(r + r') \times (r - r')}$.

59. Bouguerius habet quatuor refractiones horizontales, unam pro superficie maris, & reliquas tres pro tribus diversis elevationibus, quæ habentur in sequenti tabella. Columna prima continet elevationes, secunda refractiones, tertia altitudines atmosphæræ refringentis, quarum prima est illa e inventa postremo loco pro Bouguerio num. 39, reliquæ tres erutæ, comparando sequentes refractio-

nes cum prima: quoniam autem eæ altitudines proveniunt non penitus æquales, additur quarta columna, in qua habentur sequentes refractiones erutæ per eam regulam e prima, posita altitudine tota e media inter eas quatuor columnæ tertiæ, quæ est 5123. Formula pro deducenda refractione r e datis e, e' evadit $r' = r\sqrt{\frac{e'}{e}}$. Computatæ, quæ habentur in quarta columna, differunt ab observatis columnæ primæ, tantummodo per 4'', 8'', 1'', licet Bouguerius (Acad. Paris. an. 1739.) affirmet, ad mare in zona torrida sibi obvenisse admodum variabilem refractionem horizontalem intra limites admodum laxos, nimirum a 25' ad 29'.

Elevat.	Refract.	Altit. comp.	Refr. comp.
0	27'. 0''	5137	
1479	22. 50	5193	22'. 46''
2044	20. 48	5028	20. 56
2388	19. 45	5136	19. 44

60. Numero 54 exposita est ratio incrementi refractionis in transitu per horizontem desumpta a longitudine radii intra atmosphæram. Sit (fig. 5) MAN recta horizontalis: videatur astrum per radium FA'OA cum directione finali AB depressum infra horizontem AM angulo MAB unius gradus: sit autem integra via radii per atmosphæram FA'OAF', cujus punctum O medium maxime accedat ad terram. Centro C intervallo CA inveniatur in eodem radio punctum aliud A', & tangens RA' occurrat in I tangenti BA, quæ producatur ex parte opposita in B'. Refractio objecti visi per AB uno gradu infra horizontem erit ea, quæ oritur a curvatura totius arcus AOA'F, refractio autem respondens reliquo arcui AF' erit ea, quæ debetur elevationi apparenti NAB' unius gradus supra horizontem: ea respondet etiam arcui A'F pro objecto viso ex A' cum directione A'R itidem elevata supra horizontem puncti A' uno gradu, cum sit respectu A' prorsus ut AB' respectu A. Excessus refractionis pro depressione unius gradus supra refractionem pro elevatione unius gradus est refractio respondens curvaturæ arcus AOA', quam Bouguerius vocat

cat refractionem terrestrem, appellatâ cælesti illâ, quæ respondet arcui A'F, quia nimirum totus arcus AOA' est inferior puncto A, sive propior superficiei terrestri, ut idcirco is patiatur refractionem a materia, quæ respectu puncti A est propior terræ, adeoque quodammodo velut terrestris. In tabella num. 52 refractio debita uni gradui elevationis est 12'.43" pro uno depressionis 30'.47", a qua si dematur illa, habetur 18'.4": hæc debetur arcui AOA', dum arcui A'F debetur tantum 12'.43", ut idcirco in hoc casu terrestris sit major cælesti. Porro terrestris hæc non additur cælesti, nisi in objectis depressis infra horizontem: in iis, quæ apparent in horizonte, vel supra ipsum, omnis via radii est elevatior ipso oculo. Verum quæ refractio est terrestris, in eo sensu pro oculo posito in A, esset cælestis pro eodem posito in O: ibi enim objectum visum per eundem radium appareret in horizonte, & tota ejus radii via esset superior oculo, nimirum jacens versus cælum, non versus terram respectu ipsius oculi. Porro cum toti viæ FOF' debeatur refractio 31'.3" + 12'.40" = 43'.43"; hujus dimidius 21'.51" $\frac{1}{2}$ esset refractio horizontalis pro puncto O, major utique horizontali in A ob minorem elevationem ipsius O.

61. Refractio terrestris potiore jure appellari potest ea, quæ habetur, ubi observatur elevatio, vel depressio objecti terrestris siti intra ipsam atmosphæram, & visi per radium curvatum a vi refractiva. Ea refractio erit dimidium curvaturæ arcus a radio descripti. Sint bina loca A, A' utcumque etiam inæqualiter elevata supra superficiem terræ, quorum alterum esse potest etiam in superficie ipsa. Si spectetur A' ex A; directio apparens erit AI, directio vera AA', refractio, demenda elevationi, vel addenda depressioni, A'AI: ea erat dimidia anguli A'IB externi in triangulo isoscelio A'IA, qui totus exhiberet refractionem cælestem. Porro (num. 40) ipse A'IB est pars $\frac{1}{n+1}$ anguli A'CA, quem radius A'OA subtendit in centro terræ, adeoque ea refractio terrestris erit pars $\frac{1}{2n+2}$. Totus valor $\frac{1}{n+1} \times$ A'CA sumi de-

 bet,

bet, ubi ex triangulo A'CA inquiratur in magnitudinem gradus terrestris per observationem angulorum A', & A. Eorum summa demitur a 180°, & residuum habetur pro angulo ACA', qui obvenit minor vero per binos angulos A'AI, AA'I, quorum summa est BIA', pars ipsius $\frac{1}{n+1}$, adeoque pars $\frac{1}{n}$ illius residui erronei. Si valor n satis accurate esset cognitus; posset ea methodus ad hujusmodi perquisitionem adhiberi: at is incertus est, nam, ut vidimus, apud Bradleyum est $= 6$, apud Simpsonum $= 5\frac{1}{2}$, & quidem varius etiam pro varia constitutione atmosphæræ. Idcirco pro mensura graduum adhibentur potius observationes fixarum, quæ sint proximæ zenith, ubi refractiones sunt perquam exiguæ, & certo cognitæ.

62. Ex observationibus institutis pro graduum mensura, cujusmodi multæ jam habentur passim editæ, licet inquirere in ipsum valorem n. Nam pro reductione polygoni ad superficiem regularem terræ habentur mutuæ elevationes, ac depressiones singularum stationum observatarum ex aliis, cum intervallo, cui respondet angulus in centro. Eo eruto ex iisdem elevationibus, & depressionibus erroneis, apparebit quota pars veri anguli sit error ipse: ea deberet esse $\frac{1}{n+1}$, a quo valore innotescet, quantum differat. In Bouguerianis observationibus debet esse $\frac{1}{7\frac{1}{3}}$, cum ipsi sit $n = 6,645$ (num. 38). Is aliquando invenit etiam $\frac{1}{9}$, discrimine aliquo quidem, sed non immani, ut in refractionibus radiorum, qui permeant imam, & crassam, & instabilem atmosphæræ partem, timeri posset.

SCHOLIUM.

63. Huc usque evolvimus ea, quæ pertinent ad hypothesim virium refractivarum proxime æqualium: superesset inquisitio in alias, ut possent earum consectaria conferri inter se, & cum observationibus: verum ex altera parte huic uni conveniunt, quas Cassinus, Simpsonus, Bradleyus, Bouguerius adhibuerunt ad excolen-

colendam refractionum theoriam, & suas tabulas condendas, quæ quidem vel cum observationibus plane congruunt, vel ab iis parum admodum dissentiunt: ex parte altera in aliis hypothesibus nihil nobis huc usque occurrit satis simplex, & elegans, & quod cum ipsis observationibus satis congruat. Hinc in ipsa hypothesi virium proxime æqualium diutius immorati sumus, & quidem ipse hujus hypotheseos consensus cum eorum hominum inventis ad id ipsum nos impulit. Resumpseramus in hoc scholio hìc paucis præcipua eorum, quæ per totam dissertationem dispersa sunt: sed eam synopsim hìc modo etiam supprimemus reservando ipsam, juxta ea, quæ dicemus inferius, synopsi totius voluminis addendæ in ejus fine.

64. Inprimis autem notandum illud, considerari hìc a nobis radium luminis, ut constantem particulis progredientibus, in quas agunt vires materiæ cujusdam, quæ ob inæqualem ejus densitatem, vel agendi modum ipsas detorqueant, & refractionem pariant. Eam Newtonus assumpsit, & est sane mirum in modum opportuna ad explicandas methodo simplici, & expeditâ omnes luminis proprietates. Hypothesis, quæ naturam luminis collocat in undis fluidi elastici, ut sonum, theoriam requirit in immensum magis sublimem, & compositam, & nobis quidem videtur omnino falsa ob rationes, quarum exponendarum non est hìc locus (*). Eandem particularum progredientium, & virium eas refringentium suppositionem adhibuerunt & Simpsonus, Bradleyus, Bouguerius, & plerique omnes, qui egerunt de refractionibus astronomicis.

65. In ea hypothesi habetur illud, celeritatem omnium luminis particularum in primo ingressu in atmosphæram eandem esse, ean-

(*) Ea de re mentio est injecta in Opusculo III hujus Tomi, quod est conscriptum post hoc jam olim ad Academiam Parisiensem transmissum, & ab ipsa typis destinatum. Observationes institutæ ope telescopii aquei ibi propositi pro determinanda ratione velocitatis luminis in aere ad velocitatem in aqua, & multo magis adhibitis aliis fluidis diaphanis, si eam exhibeant conformem rationi sinuum, quam requirit theoria Newtoni, qua de re ego quidem nequaquam dubito, ejusmodi quæstionem omnino diriment.

eandem itidem communem omnibus, licet diversam a priore in appulsu ad oculum. Sermo est de particulis homogeneis, quæ ad oculum adveniant in directionibus utcumque diversis, & per vias itidem utcumque diversas: quæcumque enim dicuntur de uno radiorum genere, eadem communia sunt reliquis omnibus, ubi agitur de regulis ad comparandas inter se refractiones, & totum discrimen est in absoluta earum magnitudine, quod quidem, ubi agitur de observationibus astronomicis, quæ ipsæ exiguæ sunt, est perquam exiguum, & in paullo majoribus ab horizonte altitudinibus prorsus insensibiles, potissimum si comparentur radii extremi cum mediis, quibus aptantur quæcumque diximus de absoluta magnitudine ipsarum refractionum, & arcuum, qui a radiis describuntur intra atmosphæram. Porro utrumque pendet a proprietate luminis nota per observationes opticas, juxta num. 8, quod nimirum particulæ luminis homogeneæ in eodem medio feruntur semper eādem celeritate, per quæcumque media prius transierint. Prima autem pars patet etiam ex eo, quod radii ad atmosphæram concipiantur delati sine ulla refractione sensibili, & secunda consequitur (num. 5) ex prima, & ex alia suppositione, quæ adhibetur in hac perquisitione, quod nimirum vis refractiva dirigatur ad centrum, & paribus a centro distantiis sit eadem pro omnibus radiis homogeneis.

66. Ea suppositio oritur a figura telluris ad sensum sphærica, & æquilibrio fluidorum, quæ componuntur in sphæram circa ipsam ita, ut strata homogenea sint ad sensum sphærica. Vis enim refractiva est excessus virium, quibus in particulas luminis progredientes agunt strata inferiora supra vires, quibus agunt superiora. Est quidem nonnihil compressa ad polos ipsa terræ figura: sed hæc compressio est satis exigua, & multo minus a sphærica figura abludit ea terrestris superficiei pars, cui imminet radius, qui ad oculum devenit. Sic ubi inquiritur in ipsam telluris figuram, dum polygonum terminatum in summis montibus altitudinis utcumque inæqualis reducitur ad superficiem regularem, assumitur ille tractus trium etiam, vel plurium graduum, ut portio cujusdam superficiei sphæricæ, ejus nimirum sphæræ, quæ in medio

sphæ-

sphæroidicam illam superficiem oscularetur. Aliquam inæqualitatem virium paribus a centro distantiis potest inducere etiam inæqualitas caloris in eo omni tractu, ubi potissimum in radiis horizonti proximis longior est via per atmosphæram, at id ipsum potissimum in radiis non penitus horizontalibus exiguum discrimen pariet, cum illud tantummodo præstet, ut intersectio binarum curvæ tangentium mutetur nonnihil.

67. Considerando ejusmodi curvam habentur quædam, quæ sunt generalia pro quavis virium refringentium lege. Cætera sunt propria hypothesi virium proxime æqualium in omnibus distantiis a superficie terræ. Generaliter ipsa habet omnes proprietates trajectoriarum, quæ describuntur viribus centralibus, quarum una notissima est, celeritatem esse in ratione reciproca perpendiculi ducti e centro in tangentem: ab ea proprietate pendent præcipua e theorematis sparsis per totum Opusculum, quorum seriem exhibebit Synopsis Gallica, quam addemus in fine etiam hujusce Tomi, uti præstitimus in fine præcedentis, distinguendo communia a pertinentibus ad legem illam peculiarem vis saltem ad sensum constantis.

68. Contra ejusmodi legem habentur binæ difficultates, quarum proxima petitur a lege continuitatis, quæ observatur ubique in Natura, & quæ videretur ab ea lege vis refringentis violari debere. Radius delatus per lineam rectam usque ad eam distantiam, in qua incipit actio vis refringentis, deberet per saltum quendam transire ad motum in curva quadam circulari, vel proxima circulo magnitudinis cujusdam finitæ, habente curvaturam quandam determinatam in ipso illo initio: vis ipsa, usque ad eum limitem nulla, deberet momento temporis transire ibidem ad vim magnitudinis cujusdam finitæ. Dici posset, id quidem non fieri momento temporis, nec haberi immediatum transitum a linea recta ad arcum circularem, sed in intervallo perquam exiguo vim quidem a nihilo transire per omnes gradus ad magnitudinem quandam, quæ deinde perseveret proxime constans per totam atmosphæram, in quo exiguo intervallo per continuam curvaturæ mutationem deveniat radius a recta linea ad eum arcum circularem. Sic dum radius delatus per

unum

unum medium uniforme, in quo ejus motus habetur pro æquabili, ad aliud itidem uniforme, in cujus superficie refringitur, & detorquetur ad aliam rectam, actio vis refringentis incipit paullo ante eum appulsum, & desinit paullo post ita, ut ab una recta transeatur ad aliam per curvam quandam brevissimam, sed continuam, cujus illæ binæ rectæ concipiuntur tangentes, & vero etiam osculatrices.

69. Ibi concipitur actio vis refringentis incipiens in aliqua distantia perquam exigua ante novam superficiem, & desinens in alia æquali post ipsam, crescens per omnes gradus, tum per eosdem decrescens: hìc conciperetur incipiens paullo ante appulsum ad superficiem supremam atmosphæræ, & crescens per omnes gradus usque ad magnitudinem qnandam exiguam, sed finitam, quæ deinde perseveraret per totam atmosphæram, adeoque dum ibi concipitur transitus ab una recta ad aliam, hìc conciperetur transitus a motu rectilineo ad curvilineum curvaturæ finitæ per curvam quandam, cujus curvatura itidem a directione rectilinea abiret per omnes gradus ad curvaturam illam finitam curvæ illius proxime circularis. Et quidem & hìc, & ibi, & ubique in natura nusquam re ipsâ fieret transitus a vi nulla, vel a motu rectilineo, qui nusquam haberi potest accurate talis: nam vel sola generalis attractio, quæ gravitatem generalem gignit, & in puncto materiæ quovis variatur mutatione continua per omnes distantias a puncto materiæ quovis ad quodvis aliud, inducit mutationem & vis, & directionis motus continuam, & potissimum in ea lege virium generali, ad quam unicam & uniformem in mea sententia reducitur theoria Philosophiæ Naturalis, punctum quodvis materiæ motum habuit semper, & habebit in curva quadam continua naturæ uniformis determinatæ a prima projectione, & a vi resultante e compositione virium omnium, quas determinant omnes positiones, & distantiæ, quas id punctum habuit, & habebit respectu omnium aliorum materiæ punctorum.

70. Verum ea huc non pertinent, & habemus pro viribus novis incipientibus in aliqua positione determinata vires, quæ inducunt mutationes sensibiles tempusculo perquam exiguo in spatiolo

tiolo fere punctuali, quo pacto concipitur actio vis refringentis incipiens in quadam exigua distantia a superficie refringente, in qua incipiat flexus viæ a motu concepto rectilineo per rectam præcedentem usque ad sequentem. Sic posset hic etiam concipi mutatio vis, & flexus facta in accessu ad supremam superficiem atmosphæræ terrestris per spatium exiguum tempore exiguo a motu præcedente habito pro rectilineo ad sequentem proxime circularem circuli cujusdam magnitudinis finitæ. Sed hanc explicationem videtur respuere natura atmosphæræ terrestris, quæ debet attenuari paullatim ita, ut per gradus insensibiles fiant mutationes sensibiles in ejus densitate, differentiis ipsis stratorum, a quibus pendent vires, decrescentibus sensim per longa intervalla usque ad evanescentiam. Aer comprimitur in ratione ponderum comprimentium, & refractiones juxta experimenta Hauxbeyi sunt proportionales densitati ipsius, ex quibus principiis determinatâ curvâ, quæ exprimat densitates aeris in diversis elevationibus, longe alia obvenit lex virium refringentium, quas debeant parere differentiæ stratorum, longe remota ab uniformitate constanti, & longe alia curva a radio describenda per aerem.

71. Eadem progressio densitatis aeris orta a compressione massæ superioris ipsam comprimentis parit secundam difficultatem contra theoriam vis proxime constantis, & motus proxime circularis radii per atmosphæram. Illa requirit altitudinem multo majorem atmosphæræ habentis densitatem adhuc satis magnam, quam hæc requirit nimis exiguam. Ipsa prodiit numero 39 minor, quam septem millium hexapedarum, & quidem pro Bradleyo, & Bouguerio paullo major quinque millibus: accedit, quod huic sub zona torrida obvenit minor, quam illi in climate usque adeo boreali, dum omnino videtur sub zona torrida debere esse major tum ob majorem vim caloris, tum etiam ob vim centrifugam motus diurni.

72. Nihil video, quod ad hasce difficultates reponi possit, si admitti debeat vis refractiva constans, cui refractiones observationibus deprehensæ respondeant, nisi vim refractivam non pendere ab omnibus atmosphæræ particulis, sed a particulis substan-

 tiæ

tiæ cujuspiam ipsi admixtæ, quæ ascendat ad altitudinem multo minorem, & addensetur hìc quidem prope superficiem terræ in eadem ratione, ac addensatur aer, cum refractiones ex observationibus Hauxbeyi ipsius sint proportionales densitati aeris compressi, vel rarefacti in machina Boyliana, sed in distantiis majoribus recedat plurimum ab ea ratione addensationis, quæ quidem suppositio videtur admodum improbabilis. Quamobrem videtur omnino argumentum hoc omne mereri perquisitionem ulteriorem, cujus instituendæ ratio optima videtur ea, quæ adhibeat comparationem refractionum deductarum e theoria exposita, cum iis, quæ deducentur ex observationibus immediatis.

73. Proposueram ego quidem methodum pro ejusmodi comparatione in postremo paragrapho hujus dissertationis tum transmisso ad Academiam, cui erat titulus: *De determinatione refractionum astronomicarum per observationes*. Ea methodus erat petita a proportionalitate refractionum cum tangentibus distantiæ apparentis a zenith, quam juxta num. 43 admittit tabula Cailliana usque ad gradus 48, Bradleyanâ, quæ censetur magis conformis observationibus, admittente usque ad 70.

74. Formulam ibidem proposueram erutam ex hac suppositione, cujus ope habitis distantiis apparentibus a zenith supra, & infra polum invenitur sine ulla alia suppositione valor refractionum pertinentium ad illas quatuor distantias apparentes, & vera poli altitudo, cujus ope deinde ex aliis observationibus deduci possunt refractiones pro aliis omnibus distantiis: innui ibidem, determinatis semel refractionibus per eam suppositionem, posse ipsas corrigi calculo restituto cum usu tangentium pertinentium ad distantias a zenith imminutas juxta regulam Bradleyanam per triplum refractionum ita primo inventarum. Id argumentum ego reservo sequenti Opusculo separato, ut enunciavi hìc in præfatione. Si altitudo poli inventa per plura fixarum binaria obveniat magis diversa, quam pro erroribus, qui possint supponi commissi in observationibus institutis per instrumenta satis perfecta; eæ observationes ostendent, falsam esse legem vis refractivæ proxime constantis. Si eæ altitudines poli congruant, & reliqua, quæ

ex

ex observationibus aliis eruentur ope ejus altitudinis poli ita inventæ pro refractionibus aliis, belle omnia conveniant cum iis, quæ eruentur e formulis, quas in hoc Opusculo deduximus ab ea lege virium refringentium, id quidem favebit plurimum legi ipsi, sed illius veritatem nequaquam demonstrabit: consensus hypotheseos cum phænomenis demonstrat felicitatem quidem maximam hypotheseos ipsius, veritatem ejusdem nequaquam demonstrat. Idcirco aliam methodum proponam in alio Opusculo immediate adjecto, quod erit postremum hujusce Tomi, quæ refractiones exhibeat innixas soli suppositioni æqualitatis motus diurni terræ, de qua arbitror dubitari non posse.

75. Hic demum addam tantummodo, independenter a lege vis refringentis proxime constantis erui illud, quod proposuimus numero 8, refractionem in altitudinibus supra horizontem non nimis exiguis pendere a sola constitutione atmosphæræ in strato infimo: adeoque pro habenda variatione refractionum, quæ pendeat a variatione ejus constitutionis, barometrum, ac thermometrum, & vero etiam hygrometrum, si refractiones pendent etiam ab aeris humiditate, non est exponendum extra fenestram, sed prope locum observationis, ut haud procul ab objectivo telescopii quadrantis muralis.

OPUSCULUM VIII.

De refractionibus Astronomicis, et altitudine poli determinandis per distantias apparentes binarum fixarum supra, et infra polum.

1. In Opusculo superiore vidimus (num. 23) refractiones Astronomicas in hypothesi vis refractivæ proxime constantis debere esse ut tangentes distantiarum apparentium a zenith imminutarum per angulum exiguum, qui angulus habeat rationem constantem ad refractiones ipsas: is autem angulus juxta Bradleyanam regulam deductam ex eo theoremate applicato ad ejus observationes est (num 33) triplus refractionis cujuslibet. Vidimus autem & illud (num. 43), posse omitti subtractionem ejusmodi tripli citra errorem unius secundi in refractionibus Bradleyanis usque ad distantiam a zenith graduum 70, quamvis in Caillianis id non liceat nisi usque ad gradus 48, quæ tamen videantur omnino majores justo. Promisimus pro hoc Opusculo innixam hisce principiis methodum determinandi refractiones ipsas, & altitudinem poli ex observationibus distantiarum apparentium a zenith supra, & infra polum binarum fixarum ex ejusmodi principiis.

2. Id hic præstabimus, exponendo methodum ipsam, eruendo formulas, & illas applicando ad observationes plurium binariorum, quas, adhibito quadrante pedum tantummodo trium, sed egregio, & habente telescopium acromaticum ingentis aperturæ, & augmenti, instituit Parisiis in suo Observatorio præstantissimus Astronomus, & diligentissimus Observator Antonius Cagnolius, ac ad me humanissime transmisit. Ne exigui errorculi, qui nunquam penitus evitari possunt in verificatione divisionum quadrantis, & micrometri, in observationibus ipsis, in reducendis iisdem observationibus, quando institutæ sint diebus diversis, ad eandem

dem epocham, & ad eandem atmosphæræ constitutionem, nimis noceant exactitudini valorum, qui e formulis deduci debent, oportet, altera e binis fixis multo magis a polo distet, quam altera: oportet autem, illa prior non ita distet, ut, dum descendit infra polum, accedat ad horizontem multo magis, quam per gradus 20, si adhibendæ sint formulæ, in quibus negligatur illa diminutio per triplum refractionis incognitæ, quæ diminutio formulas reddit complicatiores, & calculum exigit operosiorem. In accessu majore ad horizontem diminutio ipsa omitti non potest, quia refractio ita crescit, ut illud triplum, quod deberet subtrahi, jam non sit satis exiguum respectu distantiæ a zenith: præterea prope horizontem omissio subtractionis etiam exiguæ ab arcu multo magis mutat valorem tangentis. Tangens quadrantis est infinita, dum tangens ipsius imminuti per arcum utcumque parvum est finita.

3. Hæ conditiones habentur in observationibus transmissis: eæ pertinent ad bina ternaria fixarum, quarum priores tres multo magis distant a polo, quam tres posteriores, ne priorum distantiæ a zenith pertingant ad gradus 72: accedunt autem ad eam mensuram quamproxime, quod itidem requiritur, ne numeri, qui in applicatione formularum adhibentur, sint nimis exigui, quod noceret exactitudini valorum, qui ex ipsis sunt eruendi. Per ea bina ternaria fixarum habentur novem binaria ad hunc usum idonea, conjungendo nimirum singulas e tribus prioribus cum singulis e posterioribus, quod nobis exhibebit uberem applicationem cum novem diversis determinationibus ejusdem altitudinis poli.

§. I.

Deductio formularum.

4. En formulas pro tangentibus distantiarum apparentium a zenith integrarum. Sint distantiæ a zenith observatæ infra, & supra polum pro altera e binis fixis a, & a', pro altera b, & b', & refractiones ipsis respondentes x, x', z, z'. Erunt distantiæ veræ $a+x$, $a'+x'$, $b+z$, $b'+z'$. Distantia poli a zenith debet

debet esse æqualis semisummæ distantiarum ab ipso cujusvis fixæ, quæ in appulsu superiore ad meridianum non abeat ad plagam oppositam ipsi polo, cum ipsius distantia ab hoc tantum addat distantiæ poli a zenith in appulsu inferiore, quantum aufert in superiore. Hinc summæ ejusmodi distantiarum pertinentium ad binas fixas debent esse æquales inter se, nimirum $a + x + a' + x' = b + z + b' + z'$, sive $x + x' - z - z' = b + b' - a - a'$. Porro e proportionalitate refractionum cum tangentibus distantiarum apparentium integrarum erunt $x' = \frac{x\,tan.a'}{tan.a}$, $z = \frac{x\,tan.b}{tan.a}$, $z' = \frac{x\,tan.b'}{tan.a}$. Iis valoribus substitutis, & factâ multiplicatione per $tan.a$, habebitur $x(tan.a + tan.a' - tan.b - tan.b') = (b + b' - a - a')\,tan.a$, & $x = \frac{(b + b' - a - a')tan.a}{tan.a + tan.a' - tan.b - tan.b'}$. Habitâ refractione x, habebuntur etiam x', z, z', e valoribus ipsarum, & inde dupla distantia poli a zenith $a + a' + x + x'$, vel $b + b' - a - a'$.

5. Inventis hoc pacto valoribus x, x', z, z' vero proximis, poterit restitui calculus subtrahendo a singulis valoribus a, a', b, b', valores $3x$, $3x'$, $3z$, $3z'$, & appellando residua m, m', n, n', invenietur valor correctus $x = \frac{(b + b' - a - a')tan.m}{tan.m + tan.m' - tan.n - tan.n'}$, unde profluet $x' = \frac{x\,tan.m'}{tan.m} = \frac{(b + b' - a - a')tan.m'}{tan.m + tan.m' - tan.n - tan.n'}$, & dupla distantia poli a zenith, ut prius, $a + a' + x + x'$.

6. Ubi agetur de unico binario, factis $b + b' - a - a' = c$, & $tan.a + tan.a' - tan.b - tan.b' = c'$, fiet $x = \frac{c\,tan.a}{c'}$. Hinc $x' = \frac{x\,tan.a'}{tan.a}$ erit $= \frac{c\,tan.a'}{c'}$, & eodem pacto $z = \frac{c\,tan.b}{c'}$, $z' = \frac{c\,tan.b'}{c'}$. Quare invento semel $\log.c - \log.c'$, addendo huic eidem logarithmo successive logarithmos valorum singulorum $tan.a$, $tan.a'$, $tan.b$, $tan.b'$ habebuntur valores x, x', z, z', quorum tripla abla-

ablata a valoribus a, a', b, b', exhibebunt m, m', n, n', unde eruentur eorum tangentes, & novus valor $c' = tan.m + tan.m' - tan.n - tan.n'$, ac novi valores $x = \frac{c\,tan.m}{c'}$, $x' = \frac{c\,tan.m'}{c'}$, & distantia poli a zenith complementum quæsitæ altitudinis poli $= \frac{1}{2}(a + a' + x + x')$, ubi si quis velit hanc distantiam sine novis valoribus x, & x' inventis singillatim; pro $x + x'$ adhibebit $\frac{c(tan.m + tan.m')}{c'}$, quod itidem locum habebit, ubi neglectâ illâ subtractione, ponatur a, & a' pro m, & m'.

7. Calculus reddi potest multo facilior, evitatâ primâ determinatione refractionum per formulas, assumendo e tabulis, quæ sunt in usu, eas, quæ respondent distantiis apparentibus a zenith, quarum tripla ablata ab ipsis distantiis exhibeant residua m, m', n, n' adhibenda pro tangentibus formulæ numeri præcedentis: nam eæ etiam debent esse parum abludentes a veris: at libuit proponere methodum, quæ nihil aliunde petitum requirat. Cæterum ex ipso neglectu subtractionis ejus tripli pro tangentibus oritur discrimen valorum ita exiguum, ut omnino negligi possit, quod satis patebit in exemplo proferendo in sequenti paragrapho pro unico binario. Hinc pro novem binariis desumptis a binis illis ternariis adhibebimus in exemplis ipsius paragraphi sequentis pro tangentibus distantias a zenith nihil curtatas, & quidem neglectis etiam secundis, vel computatis pro uno minuto, quod itidem mutationem inducit multo adhuc minus sensibilem. Qui velit, poterit instituere calculum primi binarii pro reliquis omnibus: sed inveniet discrimen multo minus illo, quod habebitur inter valores erutos e diversis binariis: accedit, quod in majore numero valorum ita erutorum errorculi debent se mutuo elidere, saltem magna ex parte, ubi accipiatur medium inter omnes ita inventos.

8. Porro formulæ evadent commodiores pro instituendo eo calculo, & efformandâ tabulâ ad eum enunciandum idoneâ, adhibitis sequentibus substitutionibus. Fiat $a + a' = p$, $b + b' = p'$, $tan.a = d$, $tan.a' = d'$, $d + d' = q$, $tan.b = e$, $tan.b' = e'$,

$= e'$, $e + e' = q'$, dupla distantia poli a zenith $2D$, altitudo poli A: tum erit $x = \frac{(p'-p)d}{q-q'}$, $x' = \frac{(p'-p)d'}{q-q'}$, $x + x' = \frac{(p'-p)q}{q-q'}$ (*) $= h$, $2D = p + h$, $A = 90° - D$.

9. Fixæ, quæ in appulsu superiore ad meridianum non accedant ad horizontem magis, quam per 18°, erunt eæ, quæ non habeant distantiam a polo, seu complementum latitudinis borealis in nostro hemisphærio boreali, australis in australi, majorem altitudine poli imminutâ per 18°, sive majorem A — 18°, quas idcirco facile erit seligere, cum altitudo poli innotescat satis proxime ad eam rem per latitudines locorum cognitas in Geographia; proderit autem, ut jam monuimus, assumere fixam alteram non multo minus distantem a zenith, quam pro ea mensura, & alteram non nimis distantem a polo. Per hyemem multo commodius, & cum multo minore errandi periculo res perficitur unicâ nocte: initio noctis directo quadrante in plano meridiani versus suum polum, & telescopio ad distantiam a zenith proximam 70°, vel ad plures parum remotas ab ea positione alias post alias, Observator determinabit tempus appulsu ad meridianum plurium fixarum utcumque incognitarum, & assumet distantiam apparentem a zenith uniuscujusque. Determinatio distantiæ apparentis a zenith debet esse, quammaxime fieri potest, accurata, quod facile obtinebitur ope micrometri, sed positio quadrantis in plano meridiani poterit assumi tantummodo non nimis remota a vera: nam exiguus error in ea positione nihil ad sensum turbabit distantiam apparentem a zenith, & parum admodum erronea obveniet determinatio temporis, quod requiritur tantummodo ad dignoscendam fixam eandem post horas 12 in appulsu superiore ad meridianum. Paullo ante intervallum horarum 12 dirigetur telescopium quadrantis relicti ibi per totam noctem, vel iterum collocati in plano

(*) Nam est $p' - p = b + b' - a - a'$, & $x + x' = \frac{(p'-p)d}{q-q'} + \frac{(p'-p)d'}{q-q'} = \frac{(p'-p)(d+d')}{q-q'} = \frac{(p'-p)q}{q-q'}$.

plano meridiani ad distantiam a zenith æqualem excessui duplæ distantiæ poli ab ipso zenith supra distantiam fixæ cujusvis observatam vespere : tempus appulsus, & distantia ita præcognita, parum admodum abludent ab iis, quæ habebuntur in illo reditu ad meridianum, summovebunt omne periculum erroris in cognoscenda fixa eadem: ipsa vero tum erit multo magis visibilis, trans atmosphæram nimirum multo minus crassam, & vaporosam in altitudine tanto majore.

10. Assumptis eodem pacto primo vespere pluribus fixis non nimis remotis a polo utut incognitis, & observatis tum, ac deinde iterum post horas 12, habebuntur intra unicam noctem plurium fixarum utriusque generis distantiæ tam infra polum, quam supra, nec ulla reductione opus erit ad eandem epocham, quod magnam laboris partem evitat, & vero etiam plerumque nullam, vel aliquando perquam exiguam requiret reductionem ad eandem atmosphæræ constitutionem, quæ post horas 12 ejusdem noctis in initio, & fine, fere nullam, vel perquam exiguam mutationem habebit in barometro, thermometro, hygrometro, quod multo tutiorem determinationem reddet valoris quæsiti. Licebit autem pluribus noctibus instituere observationes easdem adhibitis iisdem vel diversis fixis, ut pro singulis binariis in calculo quovis possint assumi observationes utriusque fixæ habitæ eadem nocte, ac plures haberi pro eodem etiam fixarum binario valores adhibendi.

11. In locis parum remotis ab æquatore, vel polo terrestri hæc methodus usui esse non poterit, cum in illis fixæ etiam polo proximæ in appulsu inferiore ad meridianum nimis parum distent ab horizonte, & in his differentia distantiarum a zenith sit nimis exigua. In locis intermediis, ut Parisiis, res optime procedet, ob diuturnitatem noctium hyemalium, & satis, sed non nimis magnam poli altitudinem, quæ exhibet differentias distantiarum satis magnas, ut mox patebit, & idcirco idoneas: nam ab iis differentiis res tota pendet. Si in locis minus remotis ab æquatore assumantur eodem modo primo vespere fixæ per 18 circiter gradus elevatæ supra horizontem, advenient post horas 12 ad quadrantem meridiani oppositum polo: tum satis erit di-

stantiam ejus appulsus, & tangentem, quæ ipsi respondet, habere pro negativa in formulis propositis. Idem accidet etiam in regionibus aliquanto magis remotis ab æquatore, si adhibeantur fixæ adhuc remotiores a polo, quæ in appulsu inferiore distent ab horizonte per numerum graduum nimis exiguum: sed eo casu pro tangentibus subtrahenda erunt tripla refractionum erutarum e tabulis, nam tangentes distantiarum integrarum majorem habebunt differentiam a tangentibus earundem imminutarum per ea tripla, quam ut adhiberi possint per se solæ, vel ad habendam primam determinationem refractionum pro calculi restitutione, saltem pro unica.

§. II.

Applicatio calculi arithmetici ad formulas, in quibus habetur ratio triplæ refractionis subtractæ a distantiis apparentibus a zenith.

12. FUNDAMENTUM totius applicationis sunt bina illa ternaria distantiarum a zenith eruta ex observationibus ad me transmissis, quæ idcirco proponam hic in tabella adjecta in fine hujus numeri. Eæ observationes institutæ sunt a diligentissimo Observatore non methodo, quam hic propono, nimirum eâdem nocte pro singulis binariis, sed ex occasione conficiendi amplum, & accuratum catalogum fixarum borealium, qui jamdiu ab Astronomis desideratur, diversis diebus pro singulis fixis, pro nonnullis binæ tantum, pro aliis, ubi minor habebatur consensus, sex vel etiam octo, quæ idirco requirebant reductiones ad eandem epocham, & ad eandem atmosphæræ constitutionem, assumptâ pro epocha die 1 Januarii ejusdem anni 1783, quo ipsæ observationes sunt institutæ, & pro constitutione atmosphæræ statu ejus medio indicato per barometrum, & thermometrum: nondum enim moris est apud Astronomos, ut hygrometri habeatur ratio pro refractionum determinatione, quod jam in Patavina Specula præstat rerum meteorologicarum in primis peritissimus, ac diligentissimus observator, & combinator Toaldus, qui cum præstantissi-

tissimo itidem sororis filio Cominellio, & in eadem Specula adjutore nuper præmium retulit ab Academia Manhemiensi inter eos divisum pro dissertationibus a singulis seorsum transmissis de optima constructione hygrometri.

13. Nonnullæ ex iis observationibus consentiebant intra unicum etiam secundum, quas deinde aliis adjectis suspectas habuit intra tria, vel quatuor: sunt quæ dissentiant intra sex vel septem, sed admodum paucæ, quod tribui debet partim difficultati determinandi secunda singula in quadrante pedum trium, partim reductionibus ipsis potissimum ad eandem atmosphæræ constitutionem, in quibus nulla habita est ratio hygrometri. Quamobrem ego quidem præferrem observationes eadem nocte institutas, licet optimum factu sit, si pluribus noctibus, ut innui, instituantur pro iisdem, vel etiam pro diversis fixis, ut medium e magno determinationum numero assumptum sit accuratius, & tutius. Media hic exhibeo, uti habentur in primis schedis ad me transmissis, quorum aliqua pro primo binario nonnihil immutata adhibui in schediasmate ea de re ad ipsum Observatorem transmisso, & is in calculis nonnullis in eandem rem institutis adhibuit pro prima e fixis in hac tabella positis majus per tria secunda. Sed cum deinde binariis tribus reductis ad novem, calculos numericos instituerim illis primis mediis innixos, quos in scheda separata conservaveram, censui retinendos eosdem numeros potius, quam omnem eum calculum repetendum. Discrimen inter media adhibita provenit ab omissione aliarum ex observationibus, potius quam aliarum: in hisce hic exhibitis adhibentur omnes. In primis numerus ipse binariorum novem auget correctionem mutuam errorculorum: deinde hæc abunde sunt pro specimine calculi instituti ad illustrandam methodum. Ipse doctissimus, & laboriosissimus Observator promisit mihi per litteras, se adhibiturum ingentem numerum binariorum, quorum multiplicitate discrimina observationum, assumpto omnium medio, compensabuntur. Priorum trium binariorum, quæ hic proponuntur, fixæ notantur de more litteris græcis, in postremo altera est 42.ª Ursæ Majoris, altera Ursæ Minoris fixa, cujus Ascensionem rectam is notat $= 243°$: declina-

tio ex his ipsis observationibus deduci facile potest: sed methodus admittit, ut supra monui, fixas quascumque, utcumque incognitas, quarum tantummodo requiritur distantia a zenith supra, & infra polum.

Fixæ	Distantiæ apparentes a zenith infra, & supra polum.
α Draconis	infra ... 69°. 5'. 2",4
	supra ... 13. 8.27,2
β Ursæ Minoris	infra ... 53. 2.57,2
	supra ... 29.11.23,2
ι Draconis	infra ... 71.21.26,8
	supra ... 10.51.49,1
ζ Ursæ Minoris	infra ... 52.39.42,8
	supra ... 29.34.43,2
42.ª Ursæ Majoris ...	infra ... 70.37.33,4
	supra ... 11.35.43,9
Fixa Ursæ Minoris ..	infra ... 53.44.56,7
	supra ... 28.29.26,5

14. Applicabimus calculum numericum formulis numerorum 4, 5, 6 pro primo binario tabulæ præcedentis in tabula sequenti, in qua habentur tres divisiones, quarum prima habens tres columnas exhibet primum calculum pro valoribus numericis refractionum x, x', z, z' determinandis per tangentes distantiarum integrarum a zenith juxta num. 4, & 5, secunda subtractionem triplæ refractionis a quavis distantia ad inveniendos valores m, m', n, n' juxta numerum 6, tertia restitutionem calculi pro inveniendis novis valoribus x, & x', ac eorum ope duplâ distantiâ poli a zenith, & altitudine poli, quæ est complementum dimidii ejus valoris. En ipsam tabulam.

a =

a = 69°. 5'. 2'',4	tan.a = 2,616	 0,417714
a' = 13 . 8 . 27 , 2	tan.a' = 0,233	 9,367953
b = 53 . 2 . 57 , 2	tan.b = 1,329	 0,123674
b' = 29 . 11 . 23 , 2	tan.b' = 0,558	 9,747023
a + a' = 82 . 13 . 29 , 6	2,849	 1,722689
b + b' = 82 . 14 . 20 , 4	1,887	x = 138,2 2,140403
c = 0. 0 . 50 , 8	. c' = 0,962 . . 0̄,016825	x' = 12,3 1,090642
	c 1,705864	z = 70,2 1,846363
	c : c' 1,722689	z' = 29,5 1,469712

a = 69°. 5'. 2'',4	a' = 13°. 8'. 27'',2	b = 53°. 2'. 57'',2	b' = 29°. 11'. 23'',2
3x = 0. 6 . 54 , 6	3x' = 0 . 0 . 36 , 9	3z = 0. 3 . 30 , 6	3z' = 0. 1 . 28 , 5
m = 68 . 58 . 7 , 8	m' = 13 . 7 . 50 , 3	n = 52 . 59 . 26 , 6	n' = 29 . 9 . 54 , 7

tan . m = 2,6009	c 1,705864	a + a' = 82°. 13'. 29'',6
tan . m' = 0,2333	. 0,9495 . . . . . 0̄,022505	x + x' = 0. 2 . 31 , 7
tan . n = 1,3266	c : c' 1,728369	82 . 16 . 1 , 3
tan . n' = 0,5581	tan . m 0,415117	41 . 8 . 0 , 6
2,8342	tan . m' 9,367861	Alt. Poli . . 48 . 51 . 59 , 4
1,8847	x = 139,2 . . . 2,143486	
c' = 0,9495	x' = 12,5 . . . 1,096230	

15. Prima, & secunda linea columnæ 1 divisionis 1 habet distantias a zenith fixæ remotioris a, & a', tertia, & quarta fixæ propioris b, & b', quæ habentur in primis quatuor numeris tabulæ præcedentis, quinta summam binarum priorum $a + a'$, sexta summam posteriorum $b + b'$, septima differentiam binarum præcedentium, qui est valor $c = b + b' - a - a'$. Secunda columna habet in prioribus quatuor lineis tangentes naturales arcuum a, a', b, b' ad radium 1000, qui ex una parte sufficit ad usum præsentem, & ex altera cum non exhibeat valores abeuntes ultra quartam notam, non exigit usum partium proportionalium pro logarithmis eruendis e tabulis communibus. Porro in assumendis hisce tangentibus neglecta sunt secunda juxta numerum 7, vel, ubi erant plura, quam 30, computata pro uno minuto. Quinta linea habet itidem, ut in prima columna, summam priorum binarum linearum, sexta binarum posteriorum, septima harum differentiam, nimirum valorem $c' = tan.a + tan.a' - tan.b - tan.b'$. Valori c' adscribitur complementum arithmeticum sui logarithmi, valori c suus logarithmus: eorum summa in linea

linea 7 est logarithmus fractionis $\frac{c}{c'}$, quæ exprimitur per $c:c'$: ea summa in linea 5 columnæ 3 habetur post logarithmos tangentium valorum a, a', b, b', quæ tangentes ductæ in eam fractionem debent exhibere juxta num. 6 refractiones x, x', z, z': hinc summa valoris logarithmici lineæ 5 cum singulis quatuor linearum præcedentium exhibet in quatuor sequentibus logarithmos singulorum ex ipsis x, x', z, z', quibus adscripti sunt horum valores numerici exprimentes numerum secundorum. Logarithmi priorum quatuor linearum columnæ tertiæ non respondent accurate numeris columnæ secundæ, quia utrique assumpti sunt e tabulis pro suis arcubus, & quidem cum neglectu secundorum: hinc ii sunt veris proximi, non accurati ob neglectum fractionum inferiorum.

16. Secundæ divisionis calculus patet e suis titulis: tripla valorum x, x', z, z' inventorum in fine divisionis primæ, quæ habentur in lineis secundis columnæ cujusvis, subtracta a valoribus a, a', b, b', quæ habentur in columna prima ejusdem divisionis primæ, relinquunt in lineis tertiis valores m, m', n, n' adhibendos in divisione tertia. In prima columna hujus habentur tangentes horum valorum erutæ e tabulis paullo accuratiores, nimirum pro radio 10000, & adhibitis etiam secundis, quod requirit partes proportionales, sed facili calculo. Habetur itidem in linea quinta summa priorum duarum e quatuor præcedentibus, in linea sexta summa duarum posteriorum, quorum numerorum differentia, nimirum novus valor c' habetur in linea 7. In secunda columna habetur valor c, qui remanet idem cum suo logarithmo, novus c' cum suo complemento logarithmico, e quorum logarithmorum summa oritur in tertia linea logarithmus novæ fractionis $\frac{c}{c'}$: in binis sequentibus lineis habentur logarithmi tangentium valorum m, & m', quorum singulorum summa cum eo lineæ tertiæ exhibet in binis lineis sequentibus logarithmos valorum x, x' correctorum cum iis ipsis valoribus. In columna postrema hujus divisionis habetur valor $a+a'$ e linea 5 columnæ 1 divi-

divisionis 1, cui adjunguntur valores inventi x, & x' reducti ad minuta, & secunda: summa eorum trium valorum exhibet in linea quarta duplam distantiam poli a zenith, cui subjungitur ipsius dimidium, ac demum complementum hujus, quod est ipsa poli altitudo quæsita.

17. Comparando inter se valores x, & x' inventos in columna 2 divisionis 3 post calculi restitutionem cum inventis in tertia divisionis 1 per calculum usque adeo faciliorem, patet, priorem non esse mutatum, nisi per unicum secundum, posteriorem nonnisi per $\frac{3}{10}$ unius secundi, unde in dupla distantia poli a zenith non provenit nisi discrimen $= 1'', 3$, quod in ejus dimidio, adeoque & in altitudine poli, reducitur ad $0'', 6$. Quamobrem supervacaneum videtur adeo prolixiore calculo uti pro tam levi discrimine, potissimum ubi plura binaria adhibenda sint, quæ multitudo ipsa majores fere semper inducit errorum compensationes. Ratio exiguæ differentiæ valoris provenientis e mutatione tangentium est duplex: in primis, quia, ut supra etiam innuimus, illa tripla refractionum sunt exigua respectu arcuum, a quibus demenda sunt pro calculi restitutione, adeoque & differentiæ tangentium exiguæ respectu tangentium ipsarum, ubi non nimis acceditur ad quadrantem: deinde, quia mutatio omnium maxima fit in distantia maxima a, & ejus tangente: ipsa autem in valore $x = \frac{c\,tan.a}{c'}$ dum mutatur in numeratore, mutatur simul in denominatore ob $c' = tan.a + tan.a' - tan.b - tan.b'$. Cura maxima collocanda est in determinatione distantiarum apparentium a zenith, quæ exhibet valorem $c = b + b' - a - a'$. Error unius secundi in eo valore secum trahit in exemplo hujus paragraphi errorem $1''\frac{1}{3}$ in altitudine poli: nam is est in tabula superiore $= 50''$, & summa valorum $x + x'$, qui per ipsum multiplicantur, est $= 150''$: cum ea addenda sit valori $a + a'$ ad habendam duplam distantiam poli a zenith, inducitur in ipsam error $= 3''$ per errorem $= 1''$ valoris c, adeoque ejus dimidium in distantiam simplicem, & in altitudinem poli: is autem error potest tam augeri, quam minui a reliquis valoribus adhibitis in toto calculo. Eæ distantiæ ma-

majoribus instrumentis haberi possunt etiam intra unum secundum, & vero etiam intra fractionem unius secundi, potissimum si omnes quatuor distantiæ assumantur eâdem nocte, ut nulla reductione sit opus. Tum vero etiam unicum binarium exhibebit valores parum abludentes a veris etiam sine ulla calculi restitutione: ingens autem binariorum numerus, assumpto valore medio, avertet omne periculum erroris sensibilis. Si observentur quinque fixæ remotiores a polo, & totidem propiores; habebuntur 25 binaria: denæ fixæ præbebunt 100 cum totidem determinationibus eâdem methodo, qua hîc ternæ exhibebunt calculo expeditissimo determinationes 9 in paragrapho sequenti, ad quem jam progredimur.

§. III.

Applicatio calculi numerici ad formulas simpliciores, in quibus ea subtractio negligitur.

17. FORMULÆ pro hac methodo habentur num. 8. Retinentur in ipsis valores a, a', b, b', quorum priores duo pertinent ad fixam remotiorem a polo, duo reliqui ad propiorem: sed ut combinari possit quæcumque e tribus remotioribus cum quavis e tribus propioribus, posuimus ibi $p = a + a'$, & $p' = b + b'$: eo pacto valor $b + b' - a - a'$, qui erat $= c$, evasit $= (p'-p)$, tangentes priorum duarum appellatæ sunt d, d', duarum posteriorum e, e', & illarum summa q, summa harum q': sic denominator c', qui erat $tan.a + tan.a' - tan.b - tan.b'$, evasit $= q - q'$. Hinc valor $x = \frac{c\,tan.a}{c'}$, & $x' = \frac{c\,tan.a'}{c'}$, evasit $\frac{(p'-p)d}{q-q'}$, & $\frac{(p'-p)d'}{q-q'}$, ac eorum summa $x + x'$ facta $= h$, & addita summæ $a + a' = p$, reliquit duplam distantiam poli a zenith $2D = \frac{(p'-p)q}{q-q'}$, unde profluit ejus dimidium D, & altitudo poli A, quæ est ipsius supplementum.

Pars I.

PARS I.

	a, a', p	d, d', q	b, b', p'	e, e', q'
I	69°. 5'. 2'',4	2,616	53 . 2 . 57,2	1,329
	13 . 8 . 27,2	0,233	29 . 11 . 23,2	0,558
	82 . 13 . 29,6	2,849	82 . 14 . 20,4	1,887
II	71 . 21 . 26,8	2,963	52 . 39 . 42,8	1,311
	10 . 51 . 49,1	0,192	29 . 34 . 43,2	0,568
	82 . 13 . 15,9	3,155	82 . 14 . 26,0	1,879
III	70 . 37 . 33,4	2,845	53 . 44 . 56,7	1,364
	11 . 35 . 43,9	0,205	28 . 29 . 26,5	0,543
	82 . 13 . 17,3	3,050	82 . 14 . 23,2	1,907

PARS III.

52'. 0'',0	+ 3'',9
51 . 52,4	− 3,7
51 . 54,2	− 1,9
52 . 1,8	+ 5,7
51 . 55,4	− 0,7
51 . 57,0	+ 0,9
51 . 58,6	+ 2,6
51 . 51,9	− 4,2
51 . 53,5	− 2,6
504,8	
51 . 56,1	

PARS II.

I I	I II	I III
q = 2,849 .. 0,454692	 0,454692	 0,454692
p' − p = 50'',8 . . . 1,705864	56'',4 . . . 1,751279	53'',6 . . . 1,729165
q − q' = 0,962 .. $\bar{0}$,016825	0,970 .. $\bar{0}$,013228	0,942 .. $\bar{0}$,025949
h = 150'',4 . . . 2,177381	165'',7 . . . 2,219199	162'',1 . . . 2,209806
p = 82°. 13'. 29'',6	82°. 13'. 29'',6	82°. 13'. 29'',6
h = 0 . 2 . 30,4	0 . 2 . 45,7	0 . 2 . 42,1
2D = 82 . 16 . 0,0	82 . 16 . 15,3	82 . 16 . 11,7
D = 41 . 8 . 0,0	41 . 8 . 7,6	41 . 8 . 5,8
A = 48 . 52 . 0,0	48 . 51 . 52,4	48 . 51 . 54,2
II I	**II . . . . . II**	**II . . . . . III**
q = 3,155 . . . 0,498999	 0,498999	 0,498999
p' − p = 64'',5 . . . 1,809560	70'',1 . . . 1,845718	67'',3 . . . 1,828015
q − q' = 1,268 .. $\bar{9}$,896881	1,276 .. $\bar{9}$,894149	1,248 .. $\bar{9}$,903785
160'',5 . . . 2,205440	173'',3 . . . 2,238866	170'',1 . . . 2,230799
p = 82°. 13'. 15'',9	82°. 13'. 15'',9	82°. 13'. 15'',9
h = 0 . 2 . 40,5	0 . 2 . 53,3	2 . 50,1
2D = 82 . 15 . 56,4	82 . 16 . 9,2	82 . 16 . 6,0
D = 41 . 7 . 58,2	41 . 8 . 4,6	41 . 8 . 3,0
A = 48 . 52 . 1,8	48 . 51 . 55,4	48 . 51 . 57,0
III I	**III . . . . . II**	**III . . . . III**
q = 3,050 . . 0,484300	 0,484300	 0,484300
p' − p = 63'',1 . . . 1,800029	68'',7 . . . 1,836957	65'',9 . . . 1,818885
q − q' = 1,163 .. $\bar{9}$,934420	1,171 .. $\bar{9}$,931443	1,143 .. $\bar{9}$,941954
165'',5 . . . 2,218749	178'',9 . . . 2,252700	175'',8 . . . 2,245139
p = 82°. 13'. 17'',3	82°. 13'. 17'',3	82°. 13 . 17,3
h = 0 . 2 . 45,5	0 . 2 . 58,9	2 . 55,8
2D = 82 . 16 . 2,8	82 . 16 . 16,2	82 . 16 . 13,1
D = 41 . 8 . 1,4	41 . 8 . 8,1	41 . 8 . 6,5
A = 48 . 51 . 58,6	48 . 51 . 51,9	48 . 51 . 53,5

18. Pro applicando calculo composita est tabula posita in pagina præcedente, quæ habet partes tres. Prima pro fixis remotioribus a polo continet in columna prima valores a, a', p, & in columna secunda valores d, d', q, ac pro fixis propioribus in columna tertia valores b, b', p', in quarta e, e', q': cum tres habeantur fixæ utriusque speciei, habentur pro quavis ex iis valores numerici respondentes iis tribus litteris in tribus lineis cujusvis e tribus divisionibus designatis per numeros I, II, III. In secunda linea columnæ primæ, & tertiæ cujusvis divisionis habentur valores numerici pro a, & b, in tertia pro a', & b', qui valores desumuntur e prima columna primæ divisionis tabulæ numeri 13, quarta eos habet pro p, & p', qui obtinentur per summam præcedentium: secunda linea columnæ secundæ, & quartæ habet valores numericos tangentium assumptarum e tabulis pro arcubus a, & b ad radium 1000, & negligendo eorundem arcuum secunda, vel ea computando pro uno minuto, tertia habet similes valores tangentium eodem modo erutarum pro arcubus a', & b': quarta demum habet q, & q' summas eorum, qui habentur in binis lineis præcedentibus.

19. Ope hujus partis primæ efformatur secunda, quæ habet divisiones novem: priores tres designatæ per I.... I, I.... II, I.... III continent tres combinationes primæ e tribus fixis remotioribus cum tribus propioribus: tres sequentes designatæ per II.... I, II.... II, II.... III continent tres alias secundæ e remotioribus cum iisdem tribus propioribus: postremæ tres designatæ per III.... I, III.... II, III.... III continent tres combinationes postremas tertiæ e remotioribus itidem cum tribus prioribus.

20. Prima linea in quavis divisione continet valorem q desumptum e secunda columna partis primæ: secunda linea habet valorem $p' - p$, qui efformatur subtrahendo valorem p respondentem illi combinationi erutum e columna prima tabulæ præcedentis a valore p' respondente eidem combinationi in columna tertia ipsius: is autem, etiam ubi excedit minutum primum, reducitur ad numerum secundorum. Linea tertia habet valorem $q - q'$, qui efformatur subtrahendo valorem q' respondentem illi combinatio-

ni

ni erutum e columna quarta ejus tabulæ a valore q ejus socio, qui habetur ibidem in columna secunda. Priores bini valores habent sibi adscriptum suum logarithmum, tertius suum complementum logarithmicum, quod indicatur, ut in præcedentibus Opusculis, per punctum præfixum valori $q - q'$, & lineolam superpositam characteristicæ ejus valoris logarithmici.

22. Summa numerorum logarithmicorum, qui habentur in præcedentibus tribus lineis, exhibet in quarta logarithmum valoris $x + x' = \frac{(p'-p)q}{q-q'}$, cujus numerus est h ipsi præmissus in secundis, in quibus habebatur $p' - p$. In linea quinta habetur valor p, in sexta idem h reductus ad prima, & secunda, qui additus ipsi p efficit in septima valorem 2D, cujus habetur in octava dimidium $=$ D, & in nona demum A altitudo poli quæsita.

23. Eo pacto habentur novem determinationes altitudinis poli, quæ omnes conveniunt in gradibus 48, & itidem omnes a numero minutorum 51 non differunt, nisi per pauca secunda. Singulæ ex iis determinationibus habentur in prima e binis columnis partis tertiæ hujus tabulæ, quæ adjecta est, ut unico intuitu appareat, quantum a se invicem differant, ac eruto medio arithmetico, habeatur valor, qui censeri possit parum admodum discrepans a vero, ac eo invento in fine columnæ primæ, appareat in secunda, quantum singulæ determinationes differant ab ipso per differentias adscriptas singulis. Summa secundorum contentorum in novem valoribus inventis, adjectis 120 ob binas determinationes, primam, & quartam, habentes 52', nimirum 51' + 60'', invenitur in linea decima, ubi ea est 504,8, quæ divisa per 9 exhibet 56'',1. Hinc altitudo poli deducta ex iis observationibus evadit in Observatorio Cagnoliano 48°. 51'. 56'',1. Dissensus in columna secunda pertingit ex parte negativa ad 4'',2, & ex parte positiva ad 5, & 7. Is dissensus non est nimis magnus, adhuc tamen si distantiæ ejusdem fixæ a polo consentirent inter se intra unum, vel alterum secundum, redderent maxime suspectam regulam Bradleyanam, & æqualitatem vis refringentis: verum cum inter nonnullas ex observationibus ipsis habeatur dissensus

etiam secundorum 8, huic ipsi dissensui tribui possunt differentiæ inventæ, & assumi illud medium interea, donec e multo majore binariorum numero, quem sibi Cagnolius proposuit, is ipse, calculis etiam accuratius subductis, accuratiorem, & magis certam determinationem prodiderit.

24. Porro id medium satis proxime congruit cum eo, quod deducitur e latitudine Observatorii Regii Parisiensis, & positione Observatorii Cagnoliani respectu ipsius. Id Observatorium per plures observationes terrestres consentientes intra unicum secundum is invenit borealius Observatorio Regio per 1'.40", ut habeo ex ejus epistola diei 22 Junii hujusce ipsius anni 1783, & altitudo poli ejusdem Observatorii Regii censetur = 48°. 50'. 14". Inde eadem pro ipso Observatorio Cagnoliano esset 48°. 51'. 54", nonnisi duobus secundis discrepans ab inventa. Constabit aliquid multo certius per multo plura binaria, quorum ipse laboriosissimus Observator habere poterit, ut diximus, centum per observationes decem exiguarum etiam fixarum remotiorum a polo, & totidem propiorum, quæ observationes omnes admodum commode haberi poterunt per hyemem impendendo unam horam vespertinam, & alteram matutinam. Semel enim collocato quadrante in plano meridiani, facile, adhibito etiam motu exiguo alidadæ ad variandas positiones, obtineri poterunt ope micrometri distantiæ a zenith stellularum temere advenientium ad telescopium per intervalla minora minutis tribus: telescopicis stellulis cælum ubique est confertum. Erutâ eo pacto altitudine poli, quæ satis certo respondeat hypothesi vis refringentis proxime constantis, poterit per methodum, quam proponemus in sequenti paragrapho, inquiri in refractiones reliquas, ut appareat, an omnia satis congruant cum hypothesi eadem.

§. IV.

§. IV.

De refractionum tabula conficienda, & ejus comparatione cum observationibus.

25. STATIM occurrit primo intuitu, posse methodo paragraphi 2 determinari pro singulis binariis valorem cujusvis e quatuor refractionibus x, x', z, z' singillatim, quarum eæ, quæ pertinent ad unam quamvis e fixis remotioribus a polo, possunt habere tot determinationes, quot observatæ sunt fixæ ipsi polo propiores, quæ determinationum multitudo, assumpto medio, tollit omne periculum erroris sensibilis in valore singularum respondente hypothesi vis proxime constantis. Una ex ipsis semel determinata sufficit ad computandam totam tabulam adhibendo regulam Bradleyi, vel Simpsoni. Assumpto $n = 6$, vel $= 5,5$, haberetur $m = \frac{sin.(a-nr)}{sin.a}$ juxta numerum 21 Opusculi superioris per a, & r pertinentes ad eam distantiam a zenith: tum pro alio quovis valore a haberetur $sin.(a-nr) = m sin.a$, & facto $f = a - nr$, esset $r = \frac{a-f}{n}$. Omnium aptissimus ad eam rem esset valor x refractionis maximæ e sic inventis, cum error refractionis assumptæ minuatur quidem, dum ex ea deducuntur refractiones minores, sed augeatur, dum deducuntur majores. Sine suppositione valoris n, posset & is, & m inveniri per binas refractiones ita accurate determinatas methodo numeri 33 ejusdem Opusculi, tum erui valor r pro quovis alio a ex eadem formula $sin.(a-nr) = m sin.a$.

26. Ad minuendum errorem potest pro refractione, e qua eruantur cæteræ ope valoris n suppositi, vel pro altera e binis, per quas determinentur valores m, & n, adhiberi ea, quæ pertinet ad distantiam a zenith multo majorem iis, quæ adhibitæ sunt pro determinanda altitudine poli, quæ nimirum non excedebant gradus 72, & vero etiam refractio horizontalis. Nam determinatâ

natâ semel per tot combinationes duplâ distantiâ poli a zenith $= 2D$, e qua profluxit altitudo poli A, potest determinari quævis ex iis refractionibus majoribus, & ipsa refractio horizontalis sine metu erroris novi præter eum, qui committatur in observationibus fixæ ad eam determinationem adhibendæ, ejus nimirum, quæ in appulsu inferiore ad meridianum descendat ad eam distantiam a zenith. Habitâ ejus distantiâ ibi, & in appulsu superiore, ac appellatis a, & a' iis distantiis, x, & x' refractionibus, quæ ipsis respondent, erit itidem $2D = a + a' + x + x'$: hinc $x = 2D - a - a' - x'$. In valore x' refractionis pertinentis ad distantiam a', quæ erit paucorum omnino graduum, nullus error sensibilis timeri poterit, sive ipsa desumatur e tabula refractionum quacunque, sive determinetur methodo numeri superioris ex iis, quæ sunt inventæ in determinanda poli altitudine. Quin immo si occurrat fixa, quæ in appulsu superiore ad meridianum ascendat ad ipsum zenith, evanescet pro ea tam a', quam x', relictâ $x = 2D - a$. Sed nonnisi casu fortuito in immensum improbabili inveniri potest accuratus appulsus ad ipsum zenith: potest facile haberi accessus ad distantiam minorem uno gradu, in qua tota refractio x' sit minor uno secundo. Pro distantiis a majoribus, quam $2D$ fixa in appulsu ad meridianum superiore abibit ad partes oppositas polo respectu zenith, adeoque valores a', & x' habendi erunt pro negativis. Verum satis patet, posse eâ methodo haberi admodum accuratum valorem refractionis pertinentis ad altitudines supra horizontem utcumque exiguas, & ipsam refractionem horizontalem, quod si fiat pluribus vicibus tam in diversis atmosphæræ constitutionibus, quam in eadem, licebit videre variationes ejusmodi refractionum admodum magnas, & assumere mediam pro ea, quæ censeri debeat horizontalis, ac deprehendere variationes, quas in ejusmodi refractiones inducit diversa constitutio stratorum superiorum atmosphæræ, dum pro altitudinibus majoribus supra horizontem refractio, ut vidimus in Opusculo superiore, pendet tantummodo a constitutione atmosphæræ prope telescopium, ad quod radius appellit. Verum variationes ejusmodi facilius invenientur per solam determinationem distan-

distantiæ a apparentis a polo ejusdem fixæ factam diversis diebus, quæ sine ejusmodi variatione deberet esse semper eadem.

27. Potest igitur computari methodo numeri 25 tota refractionum tabula ex unica refractione accurate determinata, vel e binis. Sed potest itidem haberi tota, determinando per observationes respondentes plurimis distantiis a zenith parum a se invicem differentibus refractiones, quæ ipsis conveniunt, methodo numeri 26, & inde computando tabulam ordinatam per interpolationem. Potest itidem computari tabula integra per observationes in excursu ab appulsu inferiore ad meridianum usque ad appulsum superiorem binarum fixarum, quarum altera accedat proxime ad horizontem in appulsu priore, altera ad zenith in posteriore. Determinatis earum refractionibus x' per appulsum ad meridianum, habebitur earum distantia vera a zenith $= a' + x'$, adeoque distantia vera a polo $= D - a' - x'$. Expectando adventum ipsius ad quemvis numerum graduum, vel graduum, & denorum minutorum a zenith, habebitur momentum ejusdem adventus, adeoque intervallum temporis ab appulsu ad meridianum usque ad id momentum. Quodvis ex his intervallis exhibebit angulum in polo trianguli terminati ad ipsum polum, ad zenith, & ad eam fixam. In eo triangulo habebuntur præterea bina latera, nimirum distantia poli a zenith, & ejus fixæ a polo, adeoque invenietur & tertium latus, quod est distantia ejusdem fixæ a zenith: ea collata cum observata exhibebit refractionem, quæ est earum distantiarum differentia. Hoc etiam pacto poterit haberi integra refractionum tabula, exhibente priore ex iis binis fixis refractiones debitas altitudinibus ab horizonte usque ad differentiam duplæ altitudinis poli a quadrante, quæ differentia erit ejus minima distantia a zenith in suo appulsu superiore ad meridianum, & exhibente reliquas posteriore inde usque ad zenith, præter plurimas altitudinum utrique communium: & quidem ita res habebitur per unicam distantiam apparentem a zenith pro quavis refractione, dum pro priore methodo requirebatur duplex appulsus infra, & supra polum. Conferendo hanc tabulam cum præcedentibus binis, innotescet, an phænomena respondeant conse-

ctariis

ctariis deductis ex illa suppositione, e qua derivavimus ea omnia.

28. Ea suppositio est hypothesis illa vis refractivæ constantis obnoxia difficultatibus, quas exposuimus in fine præcedentis Opusculi, quæ quidem sunt non ita leves. In sequenti Opusculo proponemus, uti promisimus, methodum determinandi refractiones innixam soli suppositioni æquabilitatis motus diurni fixarum in intervallo unius conversionis integræ, & figuram atmosphæræ ita proxime sphæricam, ut refractiones non agant ad sensum nisi elevando astra in plano verticali, de quibus nullum dubium videtur haberi posse. Id autem Opusculum erit brevissimum, reservatâ descriptione, collocatione, verificatione instrumenti ad id requisiti alii volumini.

OPU-

OPUSCULUM IX.

METHODUS DETERMINANDI REFRACTIONES ASTRONOMICAS SINE ULLA SUPPOSITIONE PHYSICA, QUÆ NON VIDEATUR OMNINO CERTA, OPE INSTRUMENTI HABENTIS UTILITATEM GENERALEM IN TOTA ASTRONOMIA.

1. INSTRUMENTUM, quod in hoc titulo innuitur, erit argumentum Opusculi VI Tomi IV, ubi id sic exprimitur: *De collocatione, & verificatione ingentis quadrantis verticalis mobilis circa axem verticalem cum alidada, quæ in ingenti circulo horizontali notet azimutha*. Habentur quidem ejusmodi quadrantes verticales mobiles circa axem verticalem cum circulo horizontali pro azimuthis: sed in omnibus ejusmodi instrumentis, quæ ego vidi, circuli horizontales sunt nimis exigui. Jam a longo tempore pluribus occasionibus proposui ingentia commoda instrumenti ejus generis, quod habeat & quadrantem verticalem, & eum horizontalem circulum ejus magnitudinis, quæ possit exhibere tam altitudines, quam azimutha intra unum secundum, quod quidem censeo facile obtineri posse, si radius circuli utriusque sit pedum octo, vel ad minimum sex, & constructio, divisio, verificatio fiat methodis idoneis, quas etiam propono nec pretiosas plus æquo, nec operosas. Pluribus itidem in locis ejus constructionem proposui cum spe successus, qua tamen huc usque semper frustratus sum. Summam ejus utilitatem pro hac refractionum determinatione hic exponam, in qua ipsa expositione patebunt alia ipsius commoda sane ingentia: paucis autem me expediam ita, ut hoc potius breve schediasma futurum sit, quam justum Opusculum.

2. Suppositiones physicæ, quibus methodus proponenda innititur, sunt eæ, quas innui in fine paragraphi præcedentis, æqualitas motus diurni fixarum saltem intra tempus unius conversionis, & figura atmosphæræ proxime sphærica, qua fiat, ut astra per re-

fractionem non dimoveantur ad sensum a plano verticali, sed tantummodo eleventur intra ipsum id planum, de quibus binis theorematis nemo sane dubitare potest cum probabili fundamento. Accedit æqualitas horologii saltem intra unam conversionem diurnam, quod pertinet ad qualitatem instrumentorum: habentur autem passim in observatoriis, quæ eam conditionem impleant, ex quo effectus dilatationis virgæ penduli corrigi cœpit per conjunctionem binorum metallorum diversæ dilatabilitatis.

3. Ope ejusmodi instrumenti determinabuntur refractiones post determinatam independenter a refractionibus distantiam poli a zenith, & distantiam saltem binarum fixarum a polo methodo, quam proponemus, qua poterit haberi vera distantia ab ipso fixæ cujusvis itidem independenter a refractionibus. Sit in fig. 6 (Tab. X) AZB meridianus cum zenith Z, & polo P, ac semicirculus DGH descriptus motu diurno vero a fixa quapiam notabili non nimis proxima polo, qui semicirculus occurrat ipsi meridiano supra polum in D, infra ipsum in G. Adducatur quadrans mobilis primo ad meridianum in ZB, & notetur momentum transitus ejus fixæ ad ipsum meridianum in D: tum idem quadrans adducatur ad positionem quampiam ZC, in qua is ita secet ipsum semicirculum in punctis E, F, ut abscindat ejus arcum EHF non nimis exiguum, & ad evitandos magis errorculos subdivisionum terminetur ad certum quempiam numerum graduum in puncto C indicato ab alidada horizontali, nec nimis proximo puncto B: notetur momentum appulsus ad eum quadrantem in E, & regressus ad ipsum in F: status autem horologii haberi poterit vel per appulsum ejusdem fixæ ad punctum meridiani G factum eodem die, qui exhibebit tempus horologii ipsius respondens semicirculo, vel per regressum ad punctum D factum die sequenti, ex quo habebitur tempus ipsius pro integro circulo, vel per telescopium fixum collocatum alibi, & directum ad fixam quampiam, vel per transitum unius, aut plurium fixarum per telescopium meridianum vulgo *instrument des passages*, ut multiplicitas observationum tutiorem reddat determinationem temporis notati ab horologio pro conversione diurna integra: quanquam abunde erit unica ejus-

modi

modi determinatio, si horologium sit satis accurate isochronum.

4. Tum vero, factis de more, ut tempus indicatum ab horologio pro integra conversione diurna, ad tempus notatum pro arcubus DE, DF, ita 360° ad quartum, habebuntur anguli ZPE, ZPF, adeoque & eorum semisumma, cui erit æqualis angulus ZPI contentus arcu PZ, & arcu PI perpendiculari ad basim EF trianguli EPF isoscelii secantis bifariam tam ipsam basim, quam angulum EPF, ut idcirco ipse angulus ZPI sit medius arithmetice proportionalis inter ipsos angulos ZPE, ZPF. In triangulo ZPI habebuntur omnes tres anguli, nimirum in P per illa tempora notata ab horologio, in Z per circulum horizontalem cum angulo in I recto. Hinc habebitur arcus ZP distantia poli a zenith per formulam, quæ sponte fluit e theorematis Trigonometriæ sphæricæ, $cos.PZ = cot.PZI \times cot.ZPI$, atque id independenter a refractionibus: nam eæ non afficiunt tempus appulsus ad circulum verticalem, adeoque tempora, a quibus solis pendet determinatio anguli ad P notata in observatione, sunt illa ipsa, quibus astrum appellit ad veram intersectionem paralleli motu vero descripti, quem circulum figura exprimit, non ad curvam apparenti motu diurno descriptam, quæ per refractionem deflectitur a forma accurate circulari.

5. Invento arcu PZ, habetur tam in triangulo PZE, quam in triangulo PZF angulus ad P, cum quo, & angulo ad Z, ac eo latere habetur independenter a refractionibus duplex determinatio distantiæ veræ PE = PF fixæ a polo. Habentur etiam distantiæ veræ a zenith ZE, ZF: possunt autem determinari per ipsum quadrantem mobilem distantiæ apparentes, quarum differentiæ ab iis veris inventis per calculum trigonometricum exhibebunt duas refractiones. Sed integra refractionum tabula habebitur adhibendo duas fixas, quarum altera appellat ad horizontem, altera ascendat proxime ad zenith. Si determinentur tempora, quibus eæ transeunt per meridianum, tum ea, quibus eæ appellunt ad diversas distantias apparentes ad zenith, pro quibus quærantur refractiones adhibendæ pro tabula; in primis habebuntur earum distantiæ veræ a polo independenter a refractionibus, atque id

quidem per totidem determinationes, quot habebuntur observationes appulsuum ad eas distantias apparentes. Nam in quovis triangulo ZPF habebitur arcus PZ jam inventus, tum angulus ad Z per circulum azimuthalem, in P per tempus horologii, uterque independenter a refractionibus. Quare invenietur latus PF distantia vera fixæ a polo, & ZF distantia vera a zenith, cujus differentia ab apparente exhibebit refractionem. Et quidem inventâ semel distantiâ earum fixarum a polo per ingentem numerum determinationum, quæ eas assumpto medio exhibebunt satis accuratas, refractiones invenientur multo accuratius independenter ab angulo ad P per sola latera PZ, PF cum angulo ad Z, qui multo accuratius determinatur per circulum azimuthalem: unde erutâ distantiâ verâ ZF obtinetur refractio.

6. Hinc ut in Opusculo præcedente per alteram ex iis fixis habebuntur refractiones ab horizonte usque ad minimam ejus distantiam a zenith, per alteram a zenith usque ad maximam ejus distantiam ab ipso, ubi maxima earum pars habebitur per utranque fixam: & quidem ubi altitudo poli est major dimidio quadrante, ut Parisiis, fixa, quæ ascendat ad zenith, vel prope ipsum, non poterit pertingere ad horizontem, & quæ pertingit ad horizontem, abibit ultra zenith ad partem oppositam polo, nec accedet ad ipsum zenith, nisi per excessum suæ distantiæ a polo ipso supra distantiam poli a zenith, adeoque ad habendam totam tabulam necessario adhibendæ erunt binæ fixæ. At ubi altitudo poli est æqualis semiquadranti, vel minor, fixa, quæ ascendat ad ipsum zenith, pervenit etiam ad horizontem, ac proinde unica fixa ibi satis erit pro habenda tabula tota refractionum.

7. Non debet adhiberi pro invenienda per methodum expositam numero 2, & 3 altitudine poli arcus BC nimis exiguus, ne angulus ad Z, cujus adhiberi debet cotangens, evadat exiguus: nam exigua differentia anguli parum distantis a quadrante inducit differentiam nimis magnam in tangentem, adeoque error exiguus in determinatione ejus arcus per observationem inducit errorem nimis magnum in valore per ipsum determinato: nec vero arcus idem debet accedere nimis ad quadrantem, quia cotangens evadit exi-

exigua, adeoque differentia tangentis inducta ab errore arcus habet rationem nimis magnam ad ipsam tangentem. Omnium aptissimus est arcus graduum 45. Nam e formulis trigonometricis, & ex ipsa geometria lineari habentur sequentes formulæ: facto arcu $= x$, est $sin.x\, cos.x = \frac{1}{2} sin.2x$, $tan.x = \frac{sin.x}{cos.x}$, $d\,tan.x = \frac{dx}{cos.x^2}$. Hinc $\frac{d\,tan.x}{tan.x} = \frac{d\,tan.x \times cos.x}{sin.x} = \frac{dx}{sin.x\, cos.x} = \frac{2dx}{sin.2x}$. Quare pro eodem errore dx ratio erroris, qui habetur in tangente, ad tangentem adhibendam evadit minima, ubi sinus dupli arcus x evadit maximus, nimirum ubi is arcus evadit quadrans. Porro pro valore $cos.ZP = cot.PZI \times cot.ZPI = \frac{cot.ZPI}{tan.PZI}$, adhibetur tangens ipsius anguli ad Z, sive ipsius arcus BC, cujus error idcirco inducet errorem minimum, ubi is erit $= 45^\circ$.

8. Hinc non potest adhiberi fixa parum remota a polo, quia si ipsa esset minor, quam arcus perpendiculi PI ducti in id azimuthum, semicirculus DHG non pertingeret ad ipsum. Debet autem adhiberi fixa multo magis remota, ne arcus EHF existat nimis exiguus, adeoque nimis oblique incurrat in arcum EIF: nam eo casu nimis lente per ipsum transiret, quod redderet minus exactam determinationem momenti ejus transitus. Angulus, quem tangens arcus ED continet cum radio PE, est complementum anguli PEI, adeoque æqualis angulo EPI, sive FPI. Porro is angulus eo erit major, quo fuerit major hypothenusa PF, maximus autem, ubi punctum F abierit in C. Tum vero PF evadit hypothenusa trianguli rectanguli, cujus latera erunt arcus $BC = 45^\circ$, & BP altitudo poli. Est autem e formulis trigonometriæ sphæricæ cosinus hypothenusæ æqualis producto e cosinubus laterum: adeoque fixa omnium aptissima ad eam rem erit ea, cujus distantiæ a polo cosinus, sive sinus latitudinis, erit æqualis cosinui altitudinis poli, sive sinui distantiæ poli a zenith, ducto in cosinum anguli semirecti, qui æquatur ejus sinui $= 0,7071$, nisi præstet adhibere fixam aliquanto propiorem polo ad evitandos ni-

nimios vapores horizontis, & ipsorum irregularitatem, quæ inducit etiam motus irregulares, & tremorem in astris horizonti proximis.

9. In locis habentibus altitudinem poli majorem 35°. 16' pro fixa, quæ adveniat ad horizontem in C, punctum E abibit ultra zenith Z. Nam ibi, ubi distantia ejus fixæ a polo evadet jam = PZ, quo casu abibit E in Z, fiet $cos.BC \times cos.BP = cos.PZ = sin.BP$, adeoque $cos.BC = \frac{sin.BP}{cos.BP} = tan.BP$, nimirum $tan.BP = 0,7071$, & BP = 35°. 16'. In altitudine poli paullo majore abibunt ultra zenith fixæ etiam aliquanto propiores polo. Poterunt autem adhiberi etiam ipsæ cum hoc solo discrimine, quod oportebit quadrantem pro appulsibus ad E, & F dirigere ad puncta horizontis e diametro opposita, & pro angulo ZPI assumere non semisummam, sed semidifferentiam angulorum ZPE, ZPF.

10. Etiam adhibito arcu BC = 45°, & fixâ satis distante a polo, oportebit instituere ingentem numerum ejusmodi observationum, & assumere medium, nam in singulis determinationibus committetur error non exiguus ob angulum ZPI deductum a tribus observationibus appulsuum fixæ ad D, E, F. In singulis facile committitur error dimidii secundi temporis, qui secum trahit errorem secundorum $7\frac{1}{2}$ in angulo, & error ipse augetur, ubi ad determinandum arcum PZ adhibetur ejus cosinus æqualis facto e cotangentibus ipsius anguli ZPI, & anguli Z. Sed cum & observatio, & calculus sit usque adeo facilis, & simplex, possunt utique etiam eodem die adhiberi plurimæ fixæ, & pluribus mensibus haberi etiam mille determinationes, quæ multiplicitate sua tollant omne dubium de mensura accuratissima altitudinis poli, quod est præcipuum elementum pro maxima parte observationum instituendarum, præter determinationem refractionum debitarum loco Observatorii, ac id elementum semel accurate determinatum remanet semper idem, nec ullâ indiget novarum observationum, & calculorum repetitione.

11. Porro eo semel accurate determinato, potest per exiguum numerum observationum methodis supra expositis inveniri admodum accurata distantia vera a polo fixarum quotcumque libuerit, & ope

& ope uniuscujusque ex iis, vel duarum in altitudinibus poli majoribus, determinari tota tabula refractionum independenter ab angulo ad P, inveniendo ope intervallorum temporis per sola latera PZ, PF cum angulo ad Z distantias veras ZF comparandas cum apparentibus observatis simul eodem instrumento ad habendam refractionem, quæ est earum distantiarum differentia. Quin etiam determinatio accurata semel facta in uno loco distantiæ veræ a polo aliquot fixarum exhibebit modum obtinendi ope hujus instrumenti in aliis locis quibuscumque altitudinem poli ope singularum ex ipsis independenter a refractionibus habito latere PF ex determinatione facta in illo priore loco, & angulis ad Z, & P determinatis in hoc novo: tum refractiones omnes ope unius fixæ, vel duarum, & quidem etiam sine determinatione anguli ad P, per sola nimirum latera ZP, ZF cum angulo ad Z.

12. Cum possint instituti satis commode plurimis temporibus intra annum observationes pro determinationibus refractionum notando statum barometri, thermometri, hygrometri, poterit per observationes definiri nexus inter eum statum atmosphæræ, & refractiones adhibendus deinde pro refractionibus, per quas corrigi debebunt altitudines supra horizontem definitæ per sequentes observationes.

13. Ex iis, quæ diximus, satis patet, quantæ utilitatis esse debeat in universa Astronomia instrumentum ejus generis satis magnum, affabre constructum, & satis accurate verificatum, tam quod pertinet ad divisiones, quam quod pertinet ad collocationem axium, & plani quadrantis in situ verticali. Ejus ope haberi potest altitudo poli sine ulla hypothesi physica, de cujus veritate dubitari possit, & independenter a refractionibus, tum distantia a polo, adeoque etiam declinatio fixarum quotcumque independenter & a refractione, & ab angulo in polo determinando per mensuram temporis: earum ascensio recta obtineri potest ope quadrantis ejusdem instrumenti collocati in plano meridiani per differentias temporum, quibus aliæ post alias appellunt ad ipsum, & quidem inventâ semel accuratâ altitudine poli in uno loco, & ope ipsius distantiâ verâ a polo exigui numeri fixarum parum distantium ab æquatore, ut idcirco conspicuæ sint ubique alibi,

alibi, & distantium a se invicem per quadrantem circiter ipsius æquatoris, ut quovis anni tempore saltem una ex ipsis commode observari possit, invenietur, itidem independenter a refractionibus, altitudo poli cujusvis alterius loci independenter ab angulo in polo, & tota tabella refractionum pro eo loco, cum variationibus, quæ respondeant diversæ constitutioni atmosphæræ. Ope autem ejusdem tabulæ multo facilius definiri possunt declinationes fixarum in earum appulsu ad meridianum. Verum ipsarum catalogus accurate factus in uno loco inserviet pro locis omnibus. Maximus autem usus instrumenti ipsius erit in determinandis locis planetarum, & potissimum cometarum. Satis erit videre cometam tempore utcumque brevi, quo ad ipsum dirigi possit telescopium, ut habeatur observatio completa. Nam in triangulo ZPF habebitur latus PZ complementum altitudinis poli: tum alidada quadrantis exhibebit distantiam apparentem a zenith, cui additâ refractione jam cognitâ per tabulam jam computatam, & constitutionem atmosphæræ indicatam a barometro, thermometro, hygrometro, habebitur distantia vera, nimirum latus alterum ZF: arcus autem BC exhibebit angulum ad Z. Inde eruetur arcus PF complementum declinationis, & angulus ad P, ex quo, & horâ observationis, deducetur per notas methodos differentia ascensionis rectæ ipsius cometæ, & solis, adeoque ipsa ascensio recta illius. Nunc oportet expectare appulsum ad telescopium fixæ alicujus cognitæ, & multo sæpius fixæ incognitæ comparandæ deinde cum cognita, quod ipsum exigit moram majorem: sæpe autem ante appulsum fixæ nubecula superveniens reddit inutilem observationem præcedentem, ut idcirco sæpe vix obtineri possit unica determinatio loci toto vespere, aliquando nulla, licet cometa pluribus vicibus videndum se præbeat. Ope hujus instrumenti possunt commode momento temporis haberi determinationes completæ, adeoque intra unam horam etiam viginti, quarum redactarum ad eandem horam medium erit accuratissimum: tanta est hujusce instrumenti utilitas per totam Astronomiam, quam hic proposuimus occasione ejus utilitatis maximæ pro determinandis refractionibus, quod est postremum ex argumentis hujus collectionis pertinentibus ad Opticam.

EX-

EXTRAIT

DE CE SECOND VOLUME.

§. I.

Notice générale de son sujet.

1. Ce volume contient neuf Opuscules : le premier, qui fait lui seul avec son supplément la moitié de son total, est une continuation de l'objet de la seconde partie du premier appartenante à la perfection de la théorie des lunettes particulièrement des acromatiques : dans celle-là l' objet principal étoient les objectifs, & il y avoit très-peu sur les oculaires mis à l' occasion des formules relatives généralement aux lentilles acromatiques : dans celui-ci l' objet principal sont les oculaires, & il n' y a qu' une petite addition sur les objectifs. Là les formules pour les lentilles étoient beaucoup plus composées & tirées d' une théorie plus compliquée par un calcul plus long, parcequ' on y a embrassé à la fois ce qui appartient à l' erreur de réfrangibilité & de sphéricité pour faire la correction dans les objectifs de tous les deux ensemble : ici on traite séparément ce qui appartient à ces deux erreurs : ainsi la théorie des lentilles pour en tirer ce qui appartient particulièrement à la correction de l' erreur de réfrangibilité dans les oculaires, est tiré de celle des prismes à petits angles, & devient beaucoup plus simple. Ici on se borne à la diminution seule de l' erreur de sphéricité dans la combinaison des oculaires, & à la correction totale dans les seuls objectifs, & on y employe les formules trouvées dans le premier volume par rapport à cette erreur dans une seule lentille, ou dans deux lentilles contigues, la correction pour une seule simple étant impossible, & pour le système des oculaires détachés exigeant des formules trop compliquées.

 2. Son

2. Son supplément est très-intéressant : c' est une réimpression d' une de mes anciennes dissertations, mais avec des petits changements, & avec la correction de plusieurs fautes, qui s' étoient glissées dans la première impression faite à Vienne en Autriche en mon absence. Il s' y agit de la distribution de la lumière dans les petits cercles, qui contiennent tous les rayons dispersés par les deux erreurs de réfrangibilité, & de sphéricité: on y fait voir, que dans celui-ci la densité de la lumière, infinie au centre, après avoir diminué jusqu' à la distance dont le quarré est la moitié du quarré du rayon, où elle a son minimum, augmente de nouveau & redevient infinie à la circonférence, tandis que dans l' autre elle est bien infinie aussi au centre, mais en allant vers la circonférence diminue continuellement jusqu'à s' évanouir sur la circonférence même, ce qui rend l'effet de l' erreur de sphéricité beaucoup plus fort par rapport à l' autre de réfrangibilité, qu' on ne l' avoit pas cru d' après Newton, qui avoit déterminé les rapports de cette densité seulement dans celle-ci, & les seuls diamètres dans toutes les deux.

3. Dans le second Opuscule il y a la détermination de trois cercles dans lesquels se trouvent dispersés les rayons, qu' une grande lentille brûlante tend à réunir par trois causes particulières, l' erreur de réfrangibilité, celle de sphéricité, & le diamètre apparent du soleil, ce qui diminue beaucoup son effet: on en détermine les diamètres & on trouve celui de l' erreur de sphéricité bien peu inférieur à celui de réfrangibilité, tandis que dans l' exemple employé par Newton celui-là étoit plus que cinq mille fois plus petit que celui-ci.

4. Le troisième contient un objet nouveau, & autant curieux qu' intéressant : il y a la description d' une nouvelle espèce de lunette, qui dans son tube est remplie d' eau : on fait voir que l' aberration de la lumière, qui forme l' aberration annuelle des étoiles fixes, par cette espèce de lunette doit devenir plus grande ou plus petite en raison réciproque de la vîtesse de la lumière dans l' eau à la vîtesse dans l' air, ce qui doit décider, si la vîtesse de la même lumière est plus grande dans les milieux plus den-

denses, comme l' exige la théorie de Newton, qui y reconnoit une progression de particules lumineuses, ou si elle diminue, comme ils ont cru d'autres, qui la font consister en des ondes d'un fluide élastique. On fait voir comment en plaçant une lunette ordinaire avec une de cette espèce sur un même secteur on peut voir la différence, & décider cette question par des observations faites dans une seule nuit, ou au moins dans deux. Mais il y a de plus: l' aberration en fixant une lunette ordinaire sur un objet terrestre s' évanouit: mais en y fixant une lunette de cette espèce, on doit y voir un mouvement périodique de chaque jour dans un cercle, ou une ellipse, ou une autre ligne ovale, ou une droite, selon la différente position de l'axe de la même lunette, & les différents jours de l' année.

5. Le quatrième Opuscule a pour objet une espèce de micromètre, & mégamètre, qui étoit nouveau, & absolument inconnu tel qu'on le voit ici, quand j'ai fait les deux Mémoires qu'on y trouve. Il est formé par deux, que quoiqu' à base ronde on peut appéller, comme je le fais aussi, prismes circulaires, parcequ'ils ont les deux surfaces planes opposées inclinées l' une à l' autre: ils sont placés sur l' objectif de manière, qu' ayant le diamètre plus petit, ils ne couvrent, qu'une moitié de sa surface: l'une est fixe, l'autre mobile autour de son centre, & dans ce mouvement l'angle que la première surface contient avec la dernière devient variable: les rayons d' un point de l' objet quelconque qui passent par la partie découverte de l'objectif forment une image de l' objet à la même place, qu' elle seroit formée par l' objectif entier tout découvert, les autres qui tombent sur la première surface du prisme composé détournés par sa réfraction arrivent avec une autre direction à la partie de l'objectif couvert, & forment une seconde image qui par la variation de l'angle s' approche de la première & s'en éloigne. Il y a la description de la machine pour l'adapter à la lunette, le faire tourner, & en connoître les angles, & la valeur, comme aussi la manière de le faire servir pour la mesure des grands angles, ce qui le rend mégamètre: il y a encore ce qui doit servir pour avoir les divisions, & subdi-

visions des angles observés. Cet instrument a excité de grandes contestations quand je l'ai proposé: j'en dis un mot dans l'Opuscule même; mais j'ajouterai sur cela une petite note ici dans son extrait.

6. Il y a dans le cinquième la théorie d'une lunette, qui donne deux images égales d'un même objet à la fois avec des mouvements opposés & égaux. On en fait voir l'imperfection nécessaire, & une totale inutilité: dans le sixième l'explication d'un phénomène observé par le très-célèbre Astronome M. Messier, d'une grande quantité de petites taches noires rondes, qui pendant un demi-quart d'heure ont traversé ce disque avec une grande vîtesse en montant en apparence: on y fait voir, que ce devoit être absolument des grêlons d'une grandeur extraordinaire.

7. Jusqu'à présent tout étoit analogue aux lunettes: mais comme les réfractions astronomiques appartiennent aussi à l'Optique; on les a prises pour sujet des trois derniers Opuscules de ce volume. Dans le premier de ces trois il y a leur théorie d'après la considération de la courbe, que le rayon parcourt dans l'atmosphère: on détermine d'abord sa nature en général qui répond à une loi quelconque de la force réfringente: mais on s'arrête à la supposition des forces très-peu inégales, qui étoit celle de Simpson, & on trouve par une méthode beaucoup plus simple, & élémentaire, que dans cette hypothèse la courbe doit être sensiblement circulaire: on en tire la règle donnée par le même Simpson pour les réfractions astronomiques, & par un procédé bien simple on en déduit la règle de Bradley assez généralement adoptée par les Astronomes, qui les fait proportionelles aux tangentes des distances apparentes au zenith diminuées du triple de la réfraction même: mais on trouve aussi, que tout ce qu'ont trouvé le premier Cassini, & Bouguer sur les réfractions astronomiques, tout cela dérive de l'égalité des forces réfringentes par toute l'atmosphère. On tire beaucoup de formules appartenantes à la comparaison des réfractions entre elles, & avec la distance apparente au zenith: on fait voir comment on trouve par deux réfractions données les coefficients numériques de ces formules, qui donnent

nent après les réfractions appartenantes à une distance apparente au zenith quelconque, pour former les tables.

8. On trouve que pour les hauteurs au-dessus de l'horizon pas trop petites, la réfraction dépend seulement de la constitution de l'atmosphère dans la dernière couche, qui est à côté de la lunette, par laquelle on voit l'astre indépendamment de son état intermédiaire, ce qui rend ces réfractions beaucoup moins variables, que les horizontales. On trouve aussi la hauteur de l'atmosphère, qui répond à cette hypothèse de l'égalité constante des forces réfringentes tant par le moyen de ces formules, qu'on en a tiré, que par le rapport entre les réfractions horizontales observées à différentes élévations au dessus de la surface de la mer, qu'on tire aussi de la forme circulaire de cette courbe. Mais ces hauteurs viennent trop petites, ce qui forme une difficulté contre cette loi des forces réfringentes constantes, comme aussi le passage brusque de la force nulle à une force finie constante, & d'un mouvement rectiligne hors de l'atmosphère à un circulaire d'une courbure finie, ce qui est contraire à la loi de continuité observée généralement dans la nature, en forme une autre : on indique le seul moyen qu'il y a de dissoudre ces difficultés, mais il ne paroit pas bien satisfaisant.

9. Pourtant comme la règle de Bradley est très-généralement adoptée, on donne dans le huitième Opuscule le moyen de trouver la hauteur du pole par les distances au zenith de deux étoiles fixes au-dessous, & au-dessus du pole dépendamment de cette règle, & même d'après la seule supposition de la proportion des réfractions avec les tangentes de la distance apparente au zenith diminuée d'une quantité quelconque, mais petite, ce qu'on tire aussi plus directement de la susdite supposition de la force constante : en négligeant cette diminution on trouve les formules beaucoup plus simples. Il y a l'application du calcul numérique à plusieurs binaires d'étoiles observées au-dessous, & au-dessus du pole, où la plus grande distance ne dépasse pas les 72 degrés, & dans une qui s'approche de 70 on trouve, qu'il n'y a pas une seconde entière de différence entre la hauteur du pole déterminée

avec,

avec, & sans cette diminution. Huit binaires ne s' accordent pas mal dans leurs résultats : on donne la manière de déterminer toutes les réfractions des différentes distances au zenith d' après deux trouvées, & d' en former les tables, ce qui donne le moyen de voir si réellement les observations sont d' accord avec cette supposition : si celles-ci se trouvent contraires, cela suffira pour démontrer la fausseté de l' hypothèse : si l' accord s' y trouve, ce lui sera bien favorable; mais ne suffit pas pour la démontrer. L' accord d' une hypothèse avec les phénomènes n' en démontre jamais la vérité.

10. Pour cela il y a dans le dernier Opuscule une méthode pour déterminer indépendamment des réfractions la hauteur du pole, & même la distance réelle au même pole d' un nombre d'étoiles fixes quelconque, & cela dépendamment de deux seules suppositions physiques, dont il ne peut pas y avoir aucun doute, l' égalité du mouvement diurne des étoiles fixes, au moins dans une révolution de 24 heures, & la sphéricité sensible de l' atmosphère, qui fait que les réfractions ne font qu' élever les astres dans le cercle vertical, sans les pousser latéralement hors de son plan. Pour remplir cet objet, il faut avoir un instrument, qui exécuté en grand dans un Observatoire auroit une utilité immense dans toute l' Astronomie, mais le premier avantage qu'on en tireroit seroit celui d' établir sans aucune supposition arbitraire, ou incertaine cet élément qui est le fondement principal de cette science, la hauteur exacte du pole de cet Observatoire, comme aussi les distances des étoiles fixes au pole, & les réfractions locales, avec leurs variations correlatives aux changements de l' atmosphère. C' est un grand quart de cercle mobile autour d' un axe vertical avec une alidade, qui dans un grand cercle horizontal donneroit les azimuths, tandis que celui-là donneroit les hauteurs, mais cela avec une très-grande exactitude, à une seconde près, ou encore plus.

11. Par un instrument de cette espèce bien vérifié dans ses divisions, & dans la position verticale de cet axe & du plan de ce quart de cercle, & bien orienté, on pourroit placer exacte-

ment

ment l' alidade à un point bien connu du cercle horizontal, & prendre exactement l' heure de l' arrivée d' une étoile fixe assez éloignée du pole, même d' une inconnue, à l' azimuth marqué par cette position de l' alidade, & son retour au même azimuth : ayant aussi l' arrivée au méridien de la même fixe, & l' état de la pendule par le retour au méridien de la même fixe, ou par l' instrument des passages, on auroit les angles au pole contenus par les deux arcs tirés du même pole aux deux intersections de cet azimuth avec le cercle du mouvement diurne de l' étoile, qui avec l' arc du même azimuth intercepté dans ce cercle formeroient un triangle isocèle : l' angle au pole de celui-ci, & cet arc de l' azimuth seroient coupés en deux parties égales par un arc tiré perpendiculairement sur cet arc, qui seroit la base de ce triangle isocèle. On auroit alors un triangle sphérique rectangle terminé au zenith, au pole, & à ce milieu de cette base, dans lequel on auroit l' angle au zenith marqué par la position de l' alidade, & l' angle au pole, qui seroit la demi-somme de ceux, que le méridien contient avec les deux côtés de ce triangle isocèle, qui seroient donnés par l' intervalle de temps entre les arrivées de l' étoile au méridien, & à l' azimuth. Ces deux angles avec l' angle droit donneroient dans un triangle rectangle l' hypothenuse, qui seroit la vraie distance du pole au zenith, qui est le complement de la hauteur du pole. Son cosinus seroit égal au produit des cotangentes de ses deux angles connus. Comme la réfraction ne change point le temps de l' arrivée de l' étoile au méridien, elle n' entreroit pour rien dans cette détermination, & n' en dérangeroit pas le résultat.

12. Comme il faut déterminer l' angle au pole par le temps, & une seconde d' erreur dans celui-ci porte 15 secondes d' erreur dans l' angle, une seule détermination seroit assez fautive : mais comme il s'agit d'un élément si essentiel, qui une fois bien déterminé sert pour toujours, & l' observation & ce calcul numérique sont si simples & aisés, on pourroit bien dans un, ou deux mois avoir même mille déterminations de ce même premier élément, dont le milieu donneroit toute l' exactitude. Après l' avoir

avoir bien déterminé une fois, on trouve très-aisément tout le reste par les méthodes exposées dans le même Opuscule, qui quoique très-court fait voir assez clairement les grands avantages de cet instrument, & de cette méthode dans toute l' Astronomie.

§. II.

Premier chapitre du premier Opuscule.

13. L' objet de ce chapitre sont les couleurs produites par les oculaires, & leurs remèdes. Dans le paragraphe 1 on expose l' origine de ces couleurs. La fig. 1 de la planche I représente en ACA l' objectif, en BGB l' oculaire simple d' une lunette qui renverse les objets. Le rayon qui arrive par l' axe DC passe sans réfraction par sa continuation CGL, ceux qui arrivent a l' extrémité de l' ouverture de l' objectif par les lignes *d*A, *d*A parallèles au même axe sont détournés vers le milieu de manière qu' en faisant abstraction de l' erreur de sphéricité les moins réfrangibles comme les premiers rouges vont se réunir dans un foyer F le plus éloigné de l' objectif, & si le même point est le foyer de l' oculaire, ils arrivent à l' oculaire en H, H, & ils en sortent parallélement au même axe par les lignes HM, HM: les plus réfrangibles, comme les derniers violets, ont un foyer *f* le moins éloigné: ils arrivent à l' oculaire en *h*, *h* & ils en sortent par des lignes *hm*, *hm* peu éloignées du parallélisme avec le même axe, à cause du voisinage des foyers F, *f*: mais le rayon qui arrive d' un point de l' objet éloigné de l' axe par une ligne oblique D'C, & sort de l' objectif par la même direction CF' après être arrivé à l' oculaire en G' en est détourné par la réfraction vers l' axe & divisé de manière, que la partie rouge moins réfractée va par la direction GIL' moins inclinée, & la partie violette par la plus oblique G*il*: les compagnons de celui-ci, qui arrivent par des lignes *d'*A, *d'*A parallèles à la ligne D'C, le suivent aussi, & leur partie rouge sort de l' oculaire par les lignes H'M', H'M', la violette par les *h'm'*, *h'm'*. Cette division des rayons rouges, & violets est l' origine principale des couleurs, qu' on

on voit dans cette espèce des lunettes. Si l' on conçoit les rayons IG', *i*G' prolongés en N, *n* l' angle NG'*n* est celui qui mesure la séparation des couleurs, & cet angle s' évanouit, quand le point G' va au centre G, c' est-à-dire quand le point de l' objet est au centre du champ de la lunette, & il augmente à mesure qu' il s' en éloigne. Par cette séparation de couleurs un petit objet bien lumineux, comme une planète, regardé par une lunette de cette espèce dans un fond obscur placé vers le bord du champ paroit coloré de manière, qu' il est rouge du côté tourné vers le centre du même champ, & violet sur son bord extérieur. L' acromatisme de l' objectif n' empêche pas cette espèce de couleurs. Si l' on conçoit l' acromatisme le plus parfait de manière que toutes les différentes espèces de rayons colorés soient rassemblés dans les mêmes points F, F', le rayon CF' seroit décomposé par l' oculaire en G'I, & G'*i*, & feroit voir le même objet par les rayons rouges dans la direction G'N, par les violets dans la direction G'*n*.

14. La même chose arrive à une lunette à oculaire concave, qui répond à la fig. 2. Le rayon D'CG' est décomposé par l' oculaire en G'L', G'*l*. Pour radresser l'objet par des oculaires convexes on en employe trois (fig. 3) BB, HH, MM, qui dans les lunettes les plus ordinaires sont égaux, & disposés de manière, que le point F est le foyer commun de l'objectif, & du premier oculaire, I des deux premiers, O des deux derniers. Le rayon D'CG' est décomposé par le premier oculaire en G'IL, G'*il*: le second envoie le rayon rouge par la ligne LO'Q parallèle à l' axe, & le violet par une autre *l*O'*q* convergente, qui coupe la précédente en O': le troisième les fait sortir par les lignes QR, *qr*, & on voit l'objet par ses rayons rouges dans la direction QST, & par les violets dans l' autre *q*S*t*. Tout cela est beaucoup plus clairement détaillé dans l' Opuscule même, & il s' agit dans ce premier chapitre d' expliquer au long la théorie de tout cela, & de déduire les théorèmes nécessaires pour pouvoir y appliquer les remèdes. On ne peut pas suivre dans cet extrait tout ce procédé: j' indiquerai seulement ce qu' il y a de plus essentiel, & de plus remarquable.

15. Dans le paragraphe 2 il y a la théorie d' un rayon, qui passe avec une petite obliquité par un prisme à angle petit, qui est représenté à la fig.4 (planche II), avec son application au passage par une lentille, qu' on voit à la fig. 5, par deux arcs de cercle, & à la fig. 6 par la seule corde BGB commune. On a donné dans le premier volume l' idée de la valeur m, qui exprime la raison du sinus de l' angle d' incidence au sinus de l' angle rompu, dm étant la différence des deux valeurs de cette espèce appartenantes aux rayons premiers rouges, & derniers violets, comme aussi on s' est servi des valeurs m, dm pour le passage par le verre commun, qui a moins de force dispersive, & des m', dm' pour celui qui en a plus comme le flint, ou strass, & on employe ici les mêmes expressions. Or on trouve, que pour le rayon, qui entre avec peu d' obliquité dans un prisme à angle petit, la réfraction est égale à-peu-près à cet angle multiplié par $m - 1$, & la différence des réfractions des rayons rouges & violets entrés avec la même direction dans ce prisme est égale aussi à-peu-près à la réfraction de la plus petite multipliée par $\frac{dm}{m-1}$. Cette valeur pour l' eau, & pour le verre commun est à-peu-près $= \frac{1}{27}$, & pour le flint $= \frac{1}{18}$.

16. Dans la fig. 5 on considère le rayon, qui traverse la lentille par la ligne EG'I, comme s' il passoit par un prisme qui auroit les surfaces réfringentes dans la position des tangentes EA, IA, avec l' angle EAI, qu' on appelle prisme équivalent, & en y appliquant ce qu' on avoit trouvé pour ce prisme, & le transportant à la fig. 6, on trouve ce théorème, qu' on avoit trouvé par une méthode plus compliquée dans le volume précédent, que si l' ont conçoit la première surface convexe, la seconde concave avec les rayons de sphéricité a & b, & les rayons de lumière convergents vers un point éloigné de la lentille d' un intervalle p, & qu' on appelle x la distance de la lentille au point, vers lequel elle rend convergents les rayons qui en sortent, en faisant $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ on aura $\frac{1}{x} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$: comme pour les

les rayons parallèles, la distance p devenant infinie, on a $\frac{1}{p} = 0$, si l'on appelle distance focale ce qui devient x dans cette occasion, & on la nomme h, on oura $\frac{1}{h} = \frac{m-1}{f}$, & pour toutes les valeurs p finies on a alors $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$. Ce sont les valeurs primitives, dont on fait usage très-souvent. On déduit dans ce paragraphe beaucoup d' autres théorèmes appartenants aux réfractions des lentilles qu' on avoit déjà démontré dans le même premier volume par l' autre méthode.

17. Dans le paragraphe 3 on tire de ces valeurs les théorèmes qui appartiennent aux lentilles acromatiques composées de deux espèces de verre ayant égard à la correction de la seule erreur de réfrangibilité, & les formules pour en calculer les sphéricités. On voit déterminé tout cela par l' autre méthode dans le volume précédent, & il n'y a ici aucun résultat essentiellement différent, quoique il y a quelque petite différence dans les expressions des valeurs. On mettra ici le seul dernier résultat. Au num. 75 on a les théorèmes suivants : *Une lentille acromatique ne peut pas être simple : elle ne peut pas être composée des lentilles d' une même espèce de verre : elle exige deux verres, qui portent une séparation de couleurs pas petite à parité de réfraction, c' est-à-dire, qui aient assez différentes les valeurs* $\frac{dm}{m-1}$ *: plus il y aura de différence entre les deux verres, & plus ils seront propres pour en composer une lentille acromatique : pour faire une lentille acromatique convexe il faudra faire la lentille convexe de ce verre qui fait moins de séparation de couleurs, comme du verre commun, & la concave de celui qui en fait plus, comme de flint ou stras, & employer les rayons de sphéricité des lentilles équivalentes (ce sont les lentilles, qui étant isocèles ont la même distance focale) proportionels à leurs valeurs dm.* On a les dénominations & les formules au num. 84. On mettra ici aussi seulement le dernier résultat tiré du numero 85 pour la

la lentille composée de verre commun & de flint en supposant leur rapport $\frac{dm}{dm'} = \frac{2}{3}$, comme on le trouve presque toujours au moins à-peu-près dans le verre commun, & le flint d'Angleterre, & il est assez pour l'effet dont il s'agit ici, de l'avoir par un à-peu-près : *La lentille de flint doit être isocèle concave de tous les deux côtés, & on doit faire son rayon de sphéricité égal à la moitié de la distance focale de la lentille composée qu'on veut avoir : la lentille de verre commun doit être convexe de tous les deux côtés : si l'on veut la composée seulement de deux & celle-ci aussi isocèle, on fera son rayon de sphéricité égal à $\frac{2}{3}$ de celui de la concave, $\frac{1}{3}$ de la distance focale : si l'on veut les surfaces internes en contact total, le rayon de sphéricité de la surface intérieure sera égal à celui de la lentille concave, & celui de la surface extérieure égal à la moitié de l'autre de la surface intérieure. Mais si l'on veut la composée de trois, on en fera deux convexes de verre commun, entre lesquelles on placera la même concave de flint : & pour celles-là, si l'on les veut isocèles, on fera chacun des quatre rayons de sphéricité égal à un quart de celui de la concave : si l'on veut les surfaces intérieures au contact total, on fera le rayon des surfaces internes des deux convexes égal au rayon de la concave, la moitié de la distance focale, & le rayon des externes égal au double de celui de l'interne.*

18. Si l'on veut une lentille acromatique concave, on retiendra le même ordre, & la même longueur des rayons de sphéricité en changeant seulement les concavités en convexités, & viceversa. Cet arrangement est excellent pour les oculaires de ces petites lorgnettes à la main qu'on employe aux spectacles. Il n'y reste qu'à ajouter, que comme il ne s'agit ici, que de la seule combinaison des distances focales pour la correction de l'erreur de réfrangibilité sans égard à celle de sphéricité, on peut tourner ou chaque lentille, ou tout le système comme on veut sans aucun changement par rapport aux couleurs qui en seront corrigées toujours de même, mais pas exactement, parce que, com-

comme on l' a vu dans plusieurs endroits du premier volume, deux seules substances ne peuvent réunir, que deux seules espèces de rayons colorés.

19. Dans la méthode proposée on a besoin de cette espèce de verre, qui fait plus de séparation à parité de réfraction moyenne comme du flint : presque dans tout le reste de cet Opuscule on peut faire tout avec une seule espèce de verre commun. On commence par corriger dans le paragraphe 4 l' erreur de sphéricité, & empêcher les couleurs par la combinaison de deux oculaires simples. Quand (fig.7) le premier oculaire BB a séparé les rayons rouges des violets par les lignes G'I, G'i, si on les fait tomber sur une autre lentille HH placée à quelque distance, le rayon rouge rencontrera cette lentille plus près de son bord en L, où l' inclinaison des deux surfaces forme un angle plus grand, & le violet en l plus vers le milieu, où cet angle est plus petit, & cette différence est d' autant plus grande, que la même seconde lentille est plus éloignée de la première. On a cherché, s' il n' y auroit quelque distance combinée avec les distances focales des deux lentilles, qui feroit une compensation de l' excès de réfrangibilité du rayon violet sur le rouge faite par l' excès de l' angle rencontré par le rouge, qui feroit sortir ces deux rayons par des lignes LM, lm parallèles, ce qui porteroit la même direction apparente de l' objet formée par ces rayons extrêmes, & on a trouvé d'abord par une analyse linéaire, qu' on auroit cet effet par une seconde lentille, dont la distance focale seroit égale à un tiers de celle de la première, placée à la distance de deux tiers de la même distance focale de la première lentille de manière, que le foyer de toutes les deux soit commun, dans lequel cas le grossissement devient double de celui qu' on auroit par la seule première lentille. C' est une combinaison très-commode pour les lunettes astronomiques communes, qui fait disparoître les couleurs produites par les oculaires, qui sont les sensibles, sans aucun secours de flint.

20. On y a cherché après par le calcul algébrique la solution générale même pour le cas, où le deux lentilles sont de différen-

tes

tes substances : on a trouvé une formule, qui a deux quantités indéterminés pour la seconde lentille à ajouter à la première déterminée, c'est-à-dire la distance focale de cette seconde, & sa distance à la première, ce qui donne un nombre infini de solutions. En faisant les valeurs des deux substances m, & m', la distance focale de la première lentille h, de la seconde h', la distance de la seconde à la première z, on trouve $\frac{zdm}{h'(m-1)}$ $-\frac{dm}{m-1} = \frac{dm'}{h'(m'-1)} \times (h+h'-z) - \frac{dm'}{m-1}$. En employant la même espèce de verre la formule devient très-simple : on y a $m' = m$, les termes $\frac{dm}{m-1}$ se détruisent, le diviseur $h'(m-1)$ devient commun, & s'en va : il n'y reste que $z = h + h' - z$, ou $2z = h + h'$, d'où l'on tire ce beau théorème : *Les couleurs des oculaires seront corrigées, si l'on employe la seconde lentille du même verre d'une distance focale quelconque en la plaçant à une distance de la première, qui soit égale à la demi-somme des deux distances focales* : mais il faut prendre garde, qu'une détermination arbitraire ne fasse approcher trop la première de ces deux lentilles de l'objectif, quand on détermine la position de ce système, qui est nécessaire pour en faire sortir parallèles les rayons partis du même point de l'objet par la méthode indiquée dans ce paragraphe, ce qui rendroit fausse la supposition, qu'on a fait d'un grand éloignement de la première lentille au même objectif, nécessaire pour pouvoir négliger plusieurs quantités devenues petites par cette supposition. Cet inconvenient n'arrive pas dans le système, qu'on avoit trouvé avant: celui-là est un cas particulier de cette solution générale, parcequ'en faisant $h' = \frac{1}{3}h$, on a $2z = h + h' = \frac{4}{3}h$, & $z = \frac{2}{3}h$, comme on avoit pris. On trouve, qu'alors il faut placer ce système de manière par rapport à l'objectif, que le foyer de celui-ci tombe au milieu entre les deux lentilles.

21. La lunette à deux oculaires, dont on a parlé dans ce paragraphe, renverse les objets : on peut en avoir une de même à deux ocu-

oculaires, qui les représente droits: on en fait mention à la fin du même paragraphe sur la fig. 8, où on fait voir ses imperfections très-grandes par rapport aussi aux couleurs, & on passe dans le paragraphe 5 aux lunettes à trois oculaires qui le redressent. On voit ces trois oculaires à la fig. 9 représentés par trois lignes droites BGB, HKH, MPM, puisqu'on y néglige l'épaisseur, & on n'y a aucun égard à l'erreur de sphéricité, mais seulement à l'autre de réfrangibilité qui dépend des seules distances focales, & distances mutuelles entre eux. Le foyer de l'objectif pour les rayons partis d'un point de l'axe est en F, de ceux qui partent d'un point pris hors de l'axe en F', & ceux qui ont passé par le milieu de l'objectif arrivent au premier en G, G': on parle ici d'abord du cas de deux premiers oculaires simples, où le foyer des rayons rouges en F est commun pour l'objectif, & pour le premier oculaire: ainsi GF est la distance focale de celui-ci pour les rayons rouges, GI un peu plus grande, le point I étant celui, qui doit recevoir les rayons rouges passés par le centre de l'objectif, KI, KO les distances focales du second oculaire aussi pour les rayons rouges. Le rayon oblique F'G' se décompose comme à la fig. 1, & 3, & la partie rouge va par I au second oculaire en L, la violette par *i* en *l*: celle-là en sort parallélement à l'axe par la ligne LO'Q, celle-ci par une ligne *lq*, qui s'incline vers l'axe, & coupe la première en O'. On y trouve ce beau théorème, que la distance LO' de cette réunion des rayons colorés, qui ont été séparés par le premier oculaire en G', sont réunis par le second de la même espèce de verre en O' à une distance égale à sa distance focale KO, & cela leurs distances focales étant ou égales, ou inégales.

22. De-là il s'en suit, que si l'on employe le troisième oculaire MPM composé acromatique avec son foyer antérieur en O, les rayons LO'Q rouge, & *l*O'*q* violet en sortiront par des lignes QR, *qr* parallèles à la ligne O'P, & arriveront à l'œil avec une même direction: parceque comme les rayons de toute espèce, qui arriveroient à une lentille acromatique par des lignes parallèles à la ligne RP, devroient se réunir en O, & ceux qui arriveroient par des lignes

gnes parallèles à PO' en O', ce qui est porté par la nature de l' acromatisme, ainsi tous les rayons de toute espèce partis des points O, O' doivent sortir de la lentille acromatique par des lignes parallèles aux lignes OP, O'P. Ainsi en employant trois oculaires de distances focales quelconque égales, ou inégales, dont les deux premières soient simples d' une même qualité de verre quelconque, & la troisième composée acromatique, & en les plaçant de manière que la distance mutuelle tant des deux premières, que des deux dernières soit égale à la somme de leurs distances focales, on corrigera l' erreur de réfrangibilité, & empêchera l' apparence des couleurs.

23. Ici aussi il y a l' usage du flint réuni avec le verre commun pour empêcher les couleurs produites par les oculaires: dans tout le reste de cet Opuscule on donne le moyen d' obtenir la même correction sans aucun besoin de cette espèce de verre, employant seulement le verre commun: on l' a fait ci-devant pour la lunette à deux oculaires simples, ce qui est un grand avantage. Dans le paragraphe *6* on employe à cet effet trois lentilles simples: voici le résultat le plus essentiel, & intéressant de toutes les recherches qu' on y trouve. Premièrement pour le système qu' on trouve ordinairement dans les lunettes communes de trois oculaires simples de même verre égaux, & placés à des distances respectives de la somme des leurs deux distances focales, on y fait la comparaison des angles (fig. 3 planche I) NG'*n*, TS*t*, qui sont les divergences des couleurs extrêmes produites par la première lentille seule, & par le système des toutes les trois en employant $\frac{1}{27}$ pour la valeur de $\frac{dm}{m-1}$: on trouve ce second angle plus petit que le premier d' un huitième du total. Cette diminution remarquée a donné l' espérance de pouvoir faire la correction totale pour les rayons extrêmes par des lentilles de la même espèce de verre, & en a fait faire la recherche, qui à la fin a donné des résultats bien satisfaisants.

24. Voici la règle qu' on en a tiré au num. *161*: *Pour avoir la destruction des couleurs on peut employer trois lentilles de la même*

même espèce de verre avec des distances focales quelconques : ayant placé les deux premières à la distance égale à-peu-près à la somme des leurs distances focales on placera la troisième à une distance de la seconde plus grande que la somme des leurs distances focales par un excès à-peu-près troisième continuellement proportionnel après la distance des deux premières entre elles , & la distance focale de la seconde. On y ajoute dans les num. suivants d' autres déterminations , & au num. 164 les dénominations & les formules , qui répondent à tout cela. Si l'on nomme b , h , h' , h'' les distances focales de l' objectif , & des trois oculaires , on aura la distance de la première lentille à la seconde $= h + h'$, de la seconde à la troisième $h' + h'' + \frac{h'^2}{h + h'}$, de la première au foyer de l' objectif placé entre ces deux $= \frac{hh'}{h + h'}$, le grossissement $= \frac{bh'}{hh''}$, la distance focale de la lentille simple , qui fera le même grossissement $= \frac{hh''}{h'}$, la distance de l' œil à la troisième lentille h'', la longueur du système total des oculaires $h + 3h' + 2h''$, la longueur de toute la lunette depuis l'objectif jusqu'à l'œil $b + h + 3h' + 2h''$. En appellant e , e' , e'' les diamètres de l' ouverture des trois oculaires le premier étant plus grand ou plus petit selon la bonté de l' objectif , pour l' ouverture utile des autres on aura $e' = e''$, $e = \frac{he'}{h'}$, l' ouverture du diaphragme a un peu plus petite que l' ouverture e , le champ $= \frac{3438'a}{b}$.

25. On tire de cette règle générale deux combinaisons bien simples : toutes les deux ont les deux premiers oculaires égaux avec la distance de l' une à l' autre égale à la somme de leurs distances focales , qui est le double d' une entre elles , & pour la distance du second au troisième la quantité à ajouter à la somme des leurs distances focales est la moitié d' une de ces mêmes distances : le troisième oculaire dans la première combinaison est aussi égal aux précédents , & par conséquent éloigné de la seconde à

deux distances focales & demi : dans la seconde combinaison il a la distance focale égale à la moitié des précédentes, & sa distance au troisième doit être égale à celle des deux premiers. Dans cette seconde combinaison le grossissement est double, mais le champ doit être la moitié, parce que sa courbure plus grande rend l'ouverture qu'on peut lui donner au double plus petite, ce qui diminue de la moitié les ouvertures utiles des précédents.

26. Comme en mettant deux lentilles égales en contact, on diminue la distance focale de la moitié, & on forme un assemblage équivalent à une seule du troisième oculaire de la seconde des deux combinaisons précédentes pour la correction des couleurs & pour le grossissement, & pourtant susceptible d' une ouverture double, qui double le champ; la meilleure combinaison sera celle de quatre lentilles de distances focales égales avec les distances de la première à la seconde, & de la seconde à la troisième double d' une seule de ces distances focales, la quatrième étant adossée à la troisième. Cette combinaison réellement de quatre, mais équivalente à une de trois, pour les objets terrestres, qui les fait voir droits, & l' autre des deux pour les lunettes astronomiques, qui les renversent, où la seconde a la distance focale égale à un tiers de celle de la première éloignée d' elle à la distance de deux tiers, sont les meilleures étant encore les plus susceptibles d'une très-grande diminution de l' erreur de sphéricité faite par une méthode aussi bien simple, comme on verra dans l' extrait du second chapitre, où on déterminera aussi leur forme la plus propre pour cet effet.

27. Dans le §. 7 il y a la recherche du remède aux couleurs par quatre oculaires simples : après tous les différents essais on ne trouve rien mieux que la combinaison qu' on vient de proposer du quatrième adossé au troisième. On tombe sur elle, quand ayant déterminé l' erreur de réfrangibilité, qui se trouve dans la combinaison de la figure 3 de trois oculaires de distances focales égales, on cherche par une méthode analogue à celle du paragraphe 4 un quatrième oculaire à ajouter aux trois premiers, capable de corriger cette erreur déjà connue. On passe après à faire la re-

recherche de la quantité de l'erreur qui se trouve dans une combinaison donnée, en déterminant dans les figures 10 les ouvertures utiles, dont le rapport dépend de leurs distances focales, & de distances relatives de l'une à l'autre, ce qu'on fait en déterminant le concours avec l'axe d'un rayon, qui arrive à l'objectif parallélement au même axe: dans la fig. 11 on détermine l'angle qui contient en sortant du dernier oculaire la partie rouge avec la violette d'un rayon, qui arrive au centre de l'objectif avec une obliquité quelconque, pour pouvoir corriger cette divergence par le changement de la distance focale du quatrième oculaire, ou de sa distance au troisième.

28. On applique la méthode à une combinaison de quatre oculaires qu'on avoit proposée comme trouvée très-bonne par expérience pour un objectif de six pieds : les distances focales de ces oculaires sont de 14, 21, 27, 32 lignes, les intervalles 23, 44, 40, les ouvertures 9, 13, 11, 12. On trouve, que la troisième lentille est celle, à laquelle on doit donner toute l'ouverture qu'on peut ayant égard à sa courbure, & que la lui ayant donnée il y a dans les autres trop de superflu inutile: que son grossissement est $= 55$, assez grand pour une lunette qui n'est pas acromatique, le champ $= 22'$ un peu trop petit, & pourtant on y trouve une séparation de couleurs $= 7'', 16$. La distance focale d'un oculaire, qui étant seul donneroit le même grossissement, se trouve en lignes $= 15\frac{2}{3}$. En lui donnant une ouverture égale à la moitié de sa distance focale, ce qu'on a pris pour convenable dans tous les calculs de ce chapitre, celle-ci seroit en lignes $= 7,83$, le champ seroit $= 30'.36''$, & feroit une séparation de couleurs $= 31'', 14$: ainsi on voit que cette combinaison diminue beaucoup les couleurs, mais elle en laisse presqu'un quart.

29. En cherchant la correction de ce reste par des changements à faire à la seule quatrième lentille, on trouve qu'on auroit cette correction en lui donnant pour distance focale 19,78, avec la distance de la précédente $= 27,70$, ou en faisant cette distance focale $= 19,53$, & sa distance de la précédente $= 27,95$.

 Le

Le premier de ces deux changements donneroit pour le grossissement 89, ce qui seroit trop fort pour une lunette non acromatique. On y a toutes les formules détaillées au long, & la forme du calcul numérique couché sur la table mise à la fin de ce chapitre page 128, avec son explication ligne par ligne, ce qui peut servir pour l'application à un autre combinaison quelconque : mais le meilleur parti est celui de quatre lentilles à distances focales égales, les deux dernières contigues faisant le service de la troisième seule. Comme dans toutes ces recherches on a négligé beaucoup de petites quantités, il y a une méthode aisée pour suppléer à tout le défaut, qui peut en provenir. On peut placer dans un petit tube le premier oculaire, quand ils sont deux, ou les deux premiers quand ils sont trois, & le dernier dans un autre un peu plus étroit, qui entrera dans le premier. En poussant ce second dans celui-là en avant en arrière, tandis qu'on regarde un petit objet bien lumineux, comme une planète, placé sur le bord du champ, on verra les couleurs de manière que tantôt le rouge sera vers le centre du même champ, & le violet en dehors, les couleurs n'étant assez corrigées, tantôt elles passeront du côté opposé étant plus que corrigées: on prendra la position de ce passage pour fixer la distance de ce dernier oculaire au précédent, qui fera la correction autant juste qu'on peut l'avoir : un mouvement donné au premier petit tuyau approchera tout le système à l'objectif, ou l'en éloignera pour la distinction des différentes qualités des yeux.

30. Dans ce chapitre on a parlé aussi d'un inconvenient qu'on trouve dans des différentes lunettes, & on en parle aussi après. C'est que le petits grains de poussière, ou petits vices du verre, restent trop visibles & empêchent la netteté de l'image, quand le lieu où elle est formée par la réunion de tous les rayons qui appartiennent au même point de l'objet, se trouve trop près de la lentille suivante. Dans la fig. 1 ces rayons occupent sur l'oculaire l'espace *hh*, ou *hh'*, qui est d'autant plus grand que le foyer *Ff* est plus éloigné de la lentille BB. Quand le grain de poussière n'occupe pas tout cet espace, il y a tou-

toujours une partie de ces rayons qui passent en avant, & arrivent à l' œil, & si l' excès de cet espace sur le grain est assez grand, on ne s' aperçoit pas de la perte de ceux qui sont interceptés : on voit ce défaut seulement, quand cet excès est petit, c' est-à-dire quand le foyer est trop peu éloigné de la lentille suivante. Dans la figure 3 il y a deux de ces images, une en F, l' autre en O, & la dernière est toujours au foyer antérieur du dernier oculaire, qui doit envoyer à l' œil ces rayons parallèles, ou peu éloignés du parallélisme. On ne peut pas diminuer cette distance, qu' en diminuant la distance focale de ce dernier oculaire, ce qui par l' ordinaire diminue le grossissement. Mais pour la distance de celle qui se forme au foyer de l' objectif, quand il y a plusieurs oculaires, s' il y en a une, il faut y avoir égard pour l' éviter, & on a déterminé ici plusieurs fois cette distance par un calcul qu' il y est expliqué aux occasions.

§. III.

Second chapitre sur l' erreur de sphéricité.

31. ON a expliqué dans le Tome I en quoi consiste l' erreur de sphéricité. La figure sphérique ne réunit pas en un seul point tous les rayons ni les parallèles ni les divergents d' un même point, ou convergents à un même point, pas même les homogènes, qui tombent sur toute l' ouverture, mais plus près de l' objectif ceux qui arrivent à son bord, que ceux qui arrivent à côté de l' axe. Cela produit une confusion de l' image de l' objet par la dispersion, qui fait tomber les uns sur les autres les rayons appartenants à des différents points de l' objet, ce qui est commun tant aux oculaires, qu' aux objectifs : mais il y a un autre mauvais effet, qui appartient aux oculaires seuls, & qu' on voit dans certaines lunettes, quand il y a un grossissement trop grand réuni avec un grand champ, c' est de forcer l' objet en défigurant leur image par une courbure introduite dans ces lignes droites : l' un & l' autre défaut est varié selon la différente

rente combinaison des deux sphéricités dans des différentes lentilles, qui donnent une même distance focale. Comme ce qui appartient aux couleurs dépend seulement des distances focales des lentilles, & il y a un nombre infini de combinaisons des deux sphéricités, qui donnent la même distance focale, les mauvais effets de l' erreur de sphéricité sont tout-à-fait indépendants de l' acromatisme, & ils peuvent se trouver dans les lunettes les plus acromatiques.

32. Il est bien aisé de concevoir le premier effet de la confusion, qui dérive de la dispersion des rayons, même des homogènes, appartenants à un point de l' objet quelconque : mais il a plus besoin d' explication l'autre de la courbure des lignes droites de l' objet dans son image. Celui-ci est produit par les rayons appartenants aux différents points de l' objet, qui passent par le centre de l' objectif & arrivent aux différents points de l' image en y guidant, pour ainsi dire, leurs compagnons chacun ceux de son pinceau de tous les rayons partis ensemble du même point de l' objet. On fait voir l' origine de ce défaut dans le paragraphe 1 de ce chapitre sur les figures 12, & 13 (planche IV). Le rayon DC (fig. 12) qui part d' un point D de l' objet placé dans le centre du champ va par l'axe au centre C de l' objectif AA, & G de l' oculaire BB : un autre, qui part d' un point E de l' objet moins éloigné de ce centre du champ, va par la ligne CH au même oculaire, & il en est détourné vers un point I de l' axe moins éloigné du point G, que le rayon E'CH' parti d' un point E' plus éloigné, & détourné vers le point I'. Que les lignes Ie, $I'e'$, Ih parallèles aux lignes CH, CH', I'H' rencontrent l' oculaire en e, e', h : on voit bien que la ligne Gh sera plus grande que GH'.

33. Que le point G (fig. 13) soit le centre du champ, OO' le diamètre perpendiculaire à l' image qu' on auroit en regardant une ligne droite de l' objet directement du point I de la fig. 12 à l' œil simple par ses directions Ie, Ie' parallèles à CE, CE' de la même figure, & Ge, Ge', GH, GH', Gh de la fig. 13 soient égales aux lignes marquées par les mêmes lettres à la fig. 12 : l' ima-

image de cette ligne renversée, & augmentée par la lunette à la place d' être une ligne droite MHH'N sera une ligne courbe mHhn, qui tournera la convexité au centre G. Parceque dans toutes les deux figures on aura cette même proportion Ge:Ge':: GH:GH', & par conséquent les trois premières lignes étant les mêmes dans ces deux figures, la dernière le sera aussi : la ligne Gh étant plus longue que la GH' dans la première, le sera encore dans la seconde, & le point h ira au de-là du point H' de la ligne droite MN. Il est aisé de voir, & on le démontre dans ce paragraphe, que ce débordement de tous le points e' formera une ligne courbe qui aura la ligne droite MHN pour tangente. Ainsi cette courbure ne paroîtra pas, si le débordement est petit à cause de la petitesse du grossissement, ou du champ assez petit, parceque dans le premier cas la courbure sera petite en elle même, & dans le second on aura un petit arc, qui ne diffère pas sensiblement de la ligne droite, quand il est assez petit, quoiqu' il appartienne à une courbe d' une courbure assez grande.

34. Pour détruire, ou au moins diminuer beaucoup cette erreur, on employe, comme on a dit au §. 1, les formules du second Opuscule du Tome I, & dans le §. 2 on cherche ce qu' on peut faire avec une seule lentille. On trouve d' abord, qu' on ne peut pas détruire cette erreur, que pour les rayons divergents, ou convergents, qui ont les points de leur divergence ou convergence renfermés entre des limites bien étroites, mais un peu différentes selon la différente valeur m qui exprime leur qualité réfractive. Voici l' expression générale de ces limites : soit à l' ordinaire h la distance focale de la lentille, p la distance de la limite cherchée positive pour la convergence, negative pour la divergence, $n = \frac{(m-1)p}{h}$ de manière que la raison $\frac{p}{h}$ de la distance p à la distance focale h soit $\frac{n}{m-1}$: on aura $n = -\frac{1}{2}(m-1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(m^2+2m)}$. Si l' on fait $m = \frac{3}{2}$, qui est à-peu-près la valeur pour les verres, sur-tout pour les communs, on trouve ce théorème au num. 25 de ce chapitre: *Si la distan-*

ce

ce du point de la convergence des rayons qui arrivent à la lentille est plus grande que $\frac{5}{9}$ *de la distance focale, ou la distance du point de la divergence plus grande que* $\frac{5}{14}$, *la combinaison des deux sphéricités d'une lentille ne pourra pas détruire l'erreur de sphéricité : le pourra bien, quand ces distances lui seront égales, ou en seront plus petites.*

35. Comme il n'arrive presque jamais le cas d'une si grande convergence, ou divergence, on y fait la recherche de la combinaison des deux surfaces, qui donne l'erreur de sphéricité d'une seule lentille pour toutes les directions des rayons, de la quantité qui reste dans la lentille du minimum, & de la quantité de l'erreur d'une lentille quelconque. On y donne les formules générales réduites pour calculer tout cela numériquement, c'est-à-dire les rayons de sphéricité de la lentille qui donne l'erreur la plus petite, quand on a la convergence ou divergence des rayons, & la valeur *m* de la qualité du verre, la quantité de l'erreur qui reste dans le minimum, & de celle qui se trouve dans une lentille donnée quelconque. Pour l'application numérique on se borne à deux directions des rayons incidents les parallèles, & les convergents vers le foyer de la même lentille : ce sont deux cas, qui arrivent dans les deux combinaisons qu'on a choisi, un pour les lunettes astronomiques à deux oculaires qui renversent l'objet, & l'autre de quatre pour les terrestres, qui le redressent, à distances focales égales, le quatrième adossé au troisième. Dans toutes ces deux combinaisons on considère comme parallèles les rayons appartenants aux différents points de l'objet qui arrivent au premier oculaire divergents du centre de l'objectif, dont la distance est grande par rapport à la distance focale de la lentille, & à la dernière de toutes les deux ils arrivent rendus convergents au foyer de cette lentille par sa précédente : dans la première de ces mêmes combinaisons la troisième les reçoit rendus parallèles par la seconde qui les a reçus divergents de son foyer, & cette seconde qui les doit envoyer parallèles à la troisième est dans le cas contraire à celui, où elle les recevroit parallèles : ainsi sa position est dans la même condition, que celle de l'autre pla-

cée

cée en sens contraire. Pour cela ce sont les deux positions de rayons, dont on avoit besoin ici.

36. On a mis dans la petite table du num. 37 tout le fruit de cette recherche dans le résultat des calculs numériques, dont on a dans plusieurs tables suivantes le long détail pour tout ce qui appartient aux rayons de sphéricité pour avoir le minimum de l' erreur & à l'erreur qui se trouve dans quatre espèces des lentilles tant pour les rayons de lumière qui arrivent parallèles, que pour ceux qui arrivent convergents au foyer de la lentille (*): ces espèces sont la lentille du minimum, la plano-convexe le plan tourné à l'œil, l'isocèle, la plano-convexe le plan tourné à l' objet: il y a le résultat relatif à trois valeurs m pour trois différentes espèces de verre: ce sont $m = 1{,}5, = 1{,}52, = 1{,}54$. Les verres communs ne s' éloignent pas beaucoup de quelqu' une de ces valeurs, qui sont encore peu différentes entre elles, & ont des résultats peu différents de manière que si l'on veut plus de précision pour chaque verre dont on a la valeur m, on peut l'avoir aisément par interpolation. On verra tous ces résultats d'un seul coup d'œil dans cette table.

37. On y a à la première ligne les trois valeurs m, & dans la colonne qui répond à chacune il y a le résultat correlatif: on a aux lignes 2 & 3 les rayons de sphéricité des deux surfaces a, & b du minimum de l' erreur pour les rayons parallèles, aux deux suivantes les a' & b' pour les convergents au foyer. Le signe positif du premier rayon de sphéricité & le négatif du second indique la convexité de la surface, le contraire la concavité: ainsi la dernière seule de ces quatre surfaces exige la concavité: pour les rayons parallèles la lentille du minimum doit être convexe de deux côtés, pour les convergents au foyer convexo-concave, la convexité tournée à l' objet. Les nombres exprimés pour chaque rayon de sphéricité ont pour unité la distance foca-

(*) On appelle ici quatre espèces de lentilles pour s'exprimer avec le même mot, quoique la quatrième n'a que la position différente: toutes les deux sont plano-convexes, le plan tourné dans celle-là à l'œil, dans celle-ci à l'objet.

le de la lentille : quand on la veut d' une mesure donnée, il faut réduire cette mesure en lignes, & multiplier ce nombre de lignes par la valeur marquée dans cette table : aux deux lignes suivantes il y a la raison du second rayon de sphéricité au premier pour ces deux directions des rayons de lumière incidents : dans les quatre binaires suivants la quantité des erreurs qui se trouvent étant les mêmes deux espèces de directions relativement aux quatre espéces de lentilles énoncées au numéro précédent.

38. On mettra ici les valeurs relatives aux verres de la réfrangibilité moyenne qui ont $m = 1,52$ tirées de cette table. Pour les rayons parallèles la lentille qui donne l' erreur la plus petite doit être convexe de deux côtés : les rayons de sphéricité des deux surfaces seront 0,596, & − 4,072, le second étant plus long que le premier en raison de 6,831 à 1 : pour les rayons convergents à son foyer la lentille sera convexo-concave : les rayons de sphéricité seront 0, 3216, & 0, 8431, le second étant plus long que le premier en raison de 2,621 à 1. Les erreurs de ces quatre espèces de lentilles pour les rayons parallèles sont 0,274; 0,293; 0,434; 1,155, & pour les convergents au foyer 0,039; 0,149; 0,400; 0,796. Les nombres dans la première, & troisième colonne de cette table qui répondent aux deux autres qualités de verre sont très-peu différents de ceux-ci : mais en comparant entre eux les nombres proposés ici pour les erreurs des différentes espèces de lentilles on voit que le 0,293 de la seconde espèce, qui est la lentille plano-convexe, le plan tourné à l' œil, diffère bien peu du 0,274, qui est le minimum : l' erreur de l' isocèle 0,434 en diffère un peu plus : celle de la plano-convexe le plan tourné à l' œil 1,155 diffère beaucoup plus, étant quatre fois plus grande : mais il n' y a pas l' excès énorme qu' on voit dans la valeur de cette dernière espèce pour les rayons convergents sur celle du minimum, qui est 0,039 presqu' anéantie, parcequ' on s' y trouve peu éloigné d' une des deux limites de la correction totale : l' erreur de la seconde espèce 0,149 en est quadruple, celle de la troisième 0,400 dix fois plus grande, la dernière de la quatrième 0,796 vingt fois plus grande.

39. Ainsi

39. Ainsi il faut bien prendre garde de ne pas employer pour la seconde lentille du premier des deux systèmes, qu' on a proposé pour les lunettes astronomiques, ou par la quatrième du second proposé pour les terrestres en l' adossant à la troisième, une lentille plano-convexe avec le plan tourné à l' objet, ni même un isocèle. Il n' y aura pas gran mal, si l' on employe tant pour celles-là, que pour toutes les autres la lentille plano-convexe le plan tourné à l' œil. Le meilleur parti sera de bien connoître par la méthode du premier Opuscule du premier volume la qualité du verre par sa valeur m : faire le calcul sur les formules, ou par interpolation fondée sur les nombres de la table du num. 37 pour trouver les rayons de sphéricité, qui donnent le minimum de cette erreur tant pour les rayons parallèles, que pour les convergents au foyer : employer cette seconde forme de lentille pour la dernière de tous les deux systèmes, l'astronomique, & le terrestre, & la première forme pour la première lentille de tous les deux aussi : la même première forme pour les deux intermédiaires du second système, mais tournant la seconde lentille de manière que sa seconde surface y devienne la première tournée à l' objet.

40. Pour donner aux artistes une règle simple, & pas trop éloignée de la meilleure, on fera faire toutes les lentilles de verre commun plano-convexes, & l' exécution ne sera pas difficile, parcequ' il ne sera pas nécessaire de former un plan exactement tel, ce qui est très-difficile, il y suffit un à-peu-près : on tournera toujours le plan à l' œil à l' exception de la seconde lentille, dont le plan doit être tourné vers l' objet. Cela fera une correction de l' erreur de sphéricité assez suffisante. Pour y joindre la correction de l' erreur de réfrangibilité, & rendre les couleurs peu, ou point du tout sensibles, on donnera pour les lunettes astronomiques à deux oculaires au premier une distance focale triple de celle du second, & on placera celui-ci à une distance de celui-là double de cette même distance focale du second, qui est égale à deux tiers de celle du premier, & pour les lunettes terrestres à quatre oculaires on les fera tous les quatre égaux, &

 on

on placera le second à la même distance du premier, & du troisième égale au double de la distance focale commune, en adossant le quatrième au troisième.

41. Après avoir examiné ce qui appartient à une seule lentille par rapport à une seule erreur de sphéricité il faudroit voir ce qui appartient à l' assemblage de plusieurs placés à des distances quelconques en prenant cet objet dans toute sa généralite on trouve des formules très-compliquées, & on ne parvient presque jamais par ce moyen à des résultats simples, & utiles pour la pratique qu' en négligeant un tel nombre de quantités pour sortir du labyrinthe des formules, qui remplissent des pages entières, dont les coefficients, & la multiplicité grossit les erreurs de manière que à la fin les résultats ne réussissent pas dans la pratique. Ici on s' est borné au §. 4 à voir comment on peut calculer la quantité de l' erreur finale en calculant celle de la lentille suivante d' après la précédente calculée par la méthode expliquée pour l' erreur appartenante à une lentille seule, & trouvant trop de complication dans les formules, qui embrasseroient l'erreur de plusieurs, & même de deux seules éloignées l' une de l' autre, pour déterminer le minimum possible de l' assemblage, on s'est borné précédemment au §. 3 à la recherche de la correction totale de l' erreur de sphéricité par deux lentilles contigues.

42. On avoit déjà déterminé ce qui appartient à cette correction dans le second Opuscule du premier volume même en réunissant cette erreur à celle de réfrangibilité pour les détruire toutes les deux à la fois par le moyen de deux espèces de verre. Ici on se borne à la destruction de l' erreur de réfrangibilité faite par deux lentilles seules contigues d' une seule espèce de verre commun, ce qui rend le problême plus indéterminé avec plus de liberté dans le choix du système des rayons de sphéricité, qui font le même effet. On trouve ces systèmes qui doivent être utiles pour les objectifs à verre commun en les composant de deux lentilles, & formant avec ce seul verre des lunettes beaucoup meilleures que les ordinaires: si l' on vouloit s' en servir pour chaqu' oculaire, on multiplieroit la perte de la lumière, & l' épais-

paisseur qui est beaucoup plus grande dans les oculaires tant en soi même, que plus encore par rapport à leur distance focale, qui est toujours très-courte, éloigneroit trop le résultat de l'objet des formules.

43. On a d'abord dans ce §. 3 les formules générales pour cet objet, & après avoir essayé quelqu' autre détermination arbitraire on s'arrête à une qui fait la première lentille isocèle, & sa distance focale la moitié de celle de la seconde, qui par-là reste égale à celle du système des deux réunies : ce qui est commode aux artistes, & donne des rayons de sphéricité assez grands par rapport aux distances focales. On a à la table du num. *69* les quatre rayons de sphéricité avec les trois distances focales de chacune des deux lentilles en particulier, & du système des deux réunies : de même pour le trois valeurs $m = 1,50$; $= 1,52$; $= 1,54$. En prenant la valeur du milieu on trouve les quatre rayons de sphéricité $0,52$; $-0,52$; $-0,4831$; $-6,8063$, où l'unité est la distance focale du système total, & de la seconde lentille double de la distance focale de la première. Ainsi la première lentille est isocèle convexe, & a le rayon de sphéricité tant soit peu plus long, que la moitié de la distance focale du total, la seconde concavo-convexe le rayon de sphéricité de la première surface concave étant un peu plus court que le rayon des convexités de la première, & la seconde convexe d'une convexité bien petite, dont le rayon est presque septuple de la distance focale commune.

44. Dans le §. 4 il y a des essais dont on a fait mention cidessus pour faire la correction par plusieurs oculaires, & n'ayant trouvé rien de mieux, que d'employer les deux systèmes, pour les lunettes astronomiques de deux, & pour les terrestres de quatre proposés ici aux num. 39 & 40, & on se tient là. Si l'on fait l'objectif de la forme proposée dans le num. précédent, & les oculaires de cette forme, on aura avec le seul verre commun des lunettes beaucoup meilleures des ordinaires, & qui s'approcheront des acromatiques : elles seront bien plus proprement acromatiques, que celles où il y a seulement l'objectif acromatique sans une combinaison convenable d'oculaires. Celles-ci n'auront aucu-

aucune couleur bien sensible à l' œil, parcequ' on aura empêché celles qui dérivent des oculaires, & qui sont les plus sensibles, & se trouvent très-souvent dans celles qu' on appelle acromatiques, & ne le sont pas à cause des couleurs produites par ces oculaires : de l'autre côté l'erreur de sphéricité des oculaires qui fait de la confusion dans l'image, & qui la défigure dans les lunettes d'un grand champ, & grand grossissement, y sera diminuée de manière à en rendre presqu'insensibles les effets : & de deux erreurs qui font tort aux lunettes communes celui de réfrangibilité, & l'autre de sphéricité on y aura détruit ce second, qui n'est pas si petit, & même il est très-considérable par rapport au premier, comme on le verra dans l'extrait du Supplément à cet Opuscule.

45. Après le §. 4 il y a un *Appendix* : on y fait voir combien y reste pour avoir un traité complet sur les oculaires, dont la théorie n'est qu'entamée dans cet Opuscule. Il y a une énumération de huit conditions que il faudroit remplir, pour avoir un système accompli d' oculaires, ou le moins défectueux, avec douze indéterminations dans le système de quatre lentilles : ainsi le problême est bien indéterminé : mais si l' on vouloit embrasser tout à-la-fois, il y auroit une complication tout-à-fait inextricable avec la seule espérance de faire du chemin par la voie du tâtonnement.

§. IV.

Du supplément de cet Opuscule.

46. On a fait mention au §. 1 du supplément très-intéressant de cet Opuscule : on en donnera ici une légère idée. Il s' y agit de la distribution de la lumière par la surface de l' erreur circulaire de réfrangibilité, & son *Additamentum* a pour objet cette même distribution par la surface de cette erreur. Les deux recherches sont relatives aux figures de la planche V, où le six premières figures sont pour l'erreur de sphéricité, les deux dernières pour celle de réfrangibilité.

47. Pour

47. Pour la première on considère dans la fig. 1 les rayons qui arrivent parallélement à l' axe AI au bord de l' ouverture en F, F', avec un quelconque intermédiaire, qui y arrive en P: la réfraction fait aller ceux-là à un point de l' axe en B après avoir touché en D, D' une courbe DCI, D'C'I, qui s' appelle caustique : le rayon intermédiaire la touche en T, & arrive à l' axe en L : la dernière limite des attouchements & des rencontrés avec l' axe pour les rayons qui arrivent infiniment peu loin du point A de l' axe se fait en I, où la courbe touchée à la fois, & coupée par l' axe même a un point de rebroussement. La même courbe est coupée en C', C par les rayons extrêmes FB, F'B après l' attouchement D, D', & la rencontre B de l' axe : tous les attouchements T des rayons intermédiaires tombent sur les arcs DCI, D'C'I, & toutes les rencontres avec l' axe sur le segment BI du même axe : l' erreur longitudinale de sphéricité pour les rayons extrêmes est IB, pour l' intermédiaire IL, & on a tiré de son expression analytique (num. *99* supplém. II Opusc. II Tom. I) qu' elle est en raison directe du quarré de l' ouverture, & réciproque de la distance focale, ce qui a lieu tant pour une lentille simple, que pour une composée : ainsi pour la même lentille n'y reste que la seule première raison.

48. On en tire à la fig. 2 les proprietés de cette courbe. Dans la partie qui approche infiniment du point I elle s' approche infiniment de la parabole de troisième degré, qui a les quarrés des ordonnées TN comme les cubes des abscisses IN, & on peut considérer comme tel l' arc DID' de la fig. 1, où on a forcé la figure en le faisant si grand par rapport à la distance focale AI, pour y voir les contacts, & intersections nécessaires, tandis que l' abscisse IE, qui lui répond, doit être très-petite de manière à considérer même pour égales les lignes AE, AI : il faut suppléer avec l' imagination au défaut de la figure. En tirant la ligne CC', qui coupe l' axe en O, on voit bien que ce sera le diamètre du plus petit des cercles dans lesquels sont dispersés tous les rayons passés par l' objectif, parceque en s' approchant de la lentille s' augmente la distance des arcs de la caustique,

& en

& en s' éloignant s' augmente toujours plus l' ouverture de l' angle CBC' par le prolongement de ses côtés. Or on sait, & on le démontre encore ici, que dans cette courbe la subtangente LN est à l' abscisse IN comme 2 à 3 : ainsi EB est $= \frac{2}{3}$IE, & on trouve ici, que BO est $= \frac{1}{4}$BI, & par conséquent le diamètre de l'ouverture FF', qui est au diamètre de l'erreur circulaire CC' comme AB censée $=$ AI est à BO, sera comme 4 à 1, tandis que dans la fig. 8, où les rayons rouges arrivent à l' axe en M, & les violets en L, l' erreur longitudinale étant ML, & le diamètre de la circulaire A*a*, qui rencontre l' axe en C, & coupe ML sensiblement par le milieu, cette raison est celle de DE à A*a*, ou comme EC, qu' on doit prendre pour égale à la distance focale FM, à LC, c' est-à-dire comme la distance focale à la moitié de l' erreur longitudinale, & c' est une des différences entre les erreurs circulaires de sphéricité & de réfrangibilité un peu désavantageux à la première, dont on s' étoit servi au Sup. II, Opus. I Tom. I en la supposant démontrée ici.

49. Pour faire la recherche de la distribution de la lumière dans le petit cercle du diamètre CC', on a commencé par déterminer le point P de l' ouverture, qui envoie le rayon à un point H de ce cercle, & on le trouve par le moyen d' une équation de troisième degré, qui n' a pas son second terme, & a trois racines réelles, ce qui fait voir qu' à chaque point H de ce petit cercle arrivent trois rayons, qui passent par trois points P, P'', P', dont le premier y arrive après avoir touché l' arc DCI en T, le troisième avant de l' avoir touché en T', & le second après avoir touché l' autre arc D'C'I en T''. On trouve ces trois rayons en construisant cette équation à la trisection de l' arc circulaire, & heureusement la construction s' est trouvée de la dernière simplicité, & élégance. Que dans l' axe on prenne OR $=$ OI, ce qui laissera aussi ER $=$ RI, qu' on trace un cercle avec le centre C & le rayon OR $=$ OI, & qu' on y trouve le point K avec le centre R l' intervalle d' une ligne quatrième proportionnelle après OH^2, OC^2, IR : que l' on prenne l' arc RM $= \frac{1}{3}$RK, & avec

& avec le même centre R l'intervalle de la corde RM on trouve dans l'axe le point N : qu'on élève l'ordonnée NT à la courbe : la tangente HTP déterminera un des trois rayons cherchés : si l'on ne veut pas se servir de la courbe pour trouver le point T, on le trouvera par sa valeur, qui répond à la proportion des abscisses & ordonnées en prenant $NT = \sqrt{\frac{OC^2 \times IN^3}{IO^3}}$.

50. On sait par la nature de la construction de cette espèce d'équations de troisième degré, qu'en prenant MM', MM'' égales à un tiers de la circonférence, les cordes RM', RM'' seront les deux autres racines, qui transportées en RN', RN'' donneront par les deux autres points T', T'' les deux autres rayons $P'H$, $P''H$: on détermine dans le texte de ce Supplément quelles sont les racines positives, quelles les negatives, de quel côté on doit prendre les points M, M', M'', N, N', N'', quand il faudra prendre les points m, m', m'', n, n', n'', & dans une note on a tous les cas de la position du point H dans la ligne CC', ou du point d hors d'elle, dans lequel cas l'équation a une seule racine réelle, & appartient non à la trisection de l'arc circulaire, mais à l'invention des deux moyennes continuellement proportionnelles entre deux données : on y joint le cas, ou le point h est placé dans la fig. 4 dans une ligne perpendiculaire à l'axe, qui passe par I, ou le point H' dans une, qui passe au dessous du point I, & qu'il faut tirer par h, ou H' une tangente à la courbe. Dans la fig. 3 on avoit donné auparavant en général la construction de l'équation proposée de troisième degré, qui manque de son second terme, à la trisection de l'arc circulaire, quoique c'est une théorie élémentaire.

51. On sait que dans cette espèce d'équation une racine comme RM' dans le cas exprimé par la figure est égale à la somme des deux autres RM, RM'' : mais ici on s'est aperçu d'une autre propriété, qui a fait tout pour simplifier cette recherche, & qui peut être très-utile en beaucoup d'autres. Si l'arc RK est varié d'une petite quantité, la variation d'une des trois cordes RM, RM', RM'' doit être égale aux variations des deux autres, & ce

n' est pas la variation de celle corde, qui est égale à la somme des deux autres : dans le cas de la figure 1 c'est la corde RM', qui est égale aux deux autres cordes, & la variation égale aux deux autres est celle de RM, dont l' augmentation doit être égale a l'augmentation de RM', & à la diminution de RM'' prises ensemble ayant égard à la seule grandeur indépendemment des signes positifs, & negatifs. Or on trouve ici que le quarré de AP, & par conséquent le cercle de ce rayon, est comme l' abscisse IN. Si l'on conçoit un point *h* infiniment peu éloigné de H, il y aura trois points *p*, *p*', *p*'' de l' objectif, qui envoyeront les rayons au même point *h* : ainsi l' anneau, qui sera la différence des cercles des rayons OH, O*h*, recevra la lumière passée par trois anneaux de l' objectif, qui seront les différences des cercles des rayons AP, AP', AP'' aux cercles des rayons A*p*, A*p*', A*p*''. Les aires de ces cercles étant proportionnelles aux abscisses IN, IN', IN'', ces anneaux, qui sont leurs variations, seront proportionnels aux variations de ces abscisses : les variations de celle-ci sont les mêmes que les variations des cordes RM, RM', RM'' égales aux parties RN, RN', RN'' variables des celles-là : ainsi la variation d' une de ces cordes étant égale aux deux autres prises ensemble, un de ces trois anneaux de l' objectif qui se trouve ici celui, qui répond à P*p*, sera égal aux deux autres, & lui seul donnera autant de lumière à l' anneau H*h*, que les deux autres.

52. Ainsi pour déterminer la quantité totale envoyée à l' anneau H*h*, ce qui rendroit la recherche très-compliquée, il suffit de trouver celle, qui lui est envoyée par un seul. La densité de lumière en H, *h* est proportionnelle directement à cette quantité, & réciproquement à l' aire de cet anneau, c' est-à-dire comme l'anneau de P*p* divisé par l'autre de H*h*: ces anneaux sont entre eux comme leur longueurs, qui sont les circonférences des cercles des rayons AP, OH proportionnelles aux mêmes rayons ou aux lignes AL, OL, & leurs largeurs P*p*, H*h* proportionnelles aux lignes PT, TH, ou AN, NO. Après toutes les comparaisons des termes de ces raisons, qu' on ne peut pas suivre dans cet

cet Extrait, on trouve à la fin les théorèmes suivants très-essentiels pour l' objet en question. *La densité de la lumière dans ce cercle est infinie au centre: elle diminue en s' en éloignant jusqu' à une distance, dont le quarré est égal à la moitié du quarré du rayon: après cette limite elle augmente de nouveau de manière qu' à la circonférence elle redevient une autre fois infinie. Là où elle a son minimum, elle est encore bien forte étant égale à deux tiers de celle qu' il y auroit, s' il y avoit l' égalité totale par tout.*

53. Il y a dans ce Supplément plusieurs *scholium* bien intéressants même pour la Géométrie en général, mais sur-tout le dernier, où on expose en détail les longs détours, qui à la fin ont amené à cette solution si simple du probléme: on y indique une méthode qui auroit pu suivre en employant un détour extraordinaire de calcul différentiel; mais qui auroit été très-compliquée: la construction de l' équation du troisième degré à la trisection de l' arc du cercle, la propriété de la variation d' une de ses trois racines aux variations des deux autres, & quelqu' autre petit théorème de Géométrie linéaire ont réduit une recherche très-compliquée en elle même à une simplicité bien extraordinaire.

54. Dans l' *Additamentum* mis à la suite de ce Supplément il y a ce qui appartient à la distribution de la lumière par le cercle de l' erreur de réfrangibilité, où l' on démontre les théorèmes proposés sur cet objet par Newton: on fait voir que la densité infinie au centre diminue continuellement après jusqu' à la circonférence, où elle s' évanouit. On fait voir par-là que l' effet de l' erreur de sphéricité a un rapport à celui de l' erreur de réfrangibilité incomparablement plus grand que celui des grandeurs des leurs cercles, par lesquels on les a comparé jusqu' à présent.

§. V.

Du second Opuscule qui a pour objet les effets des lentilles brûlantes.

55. ON appelle ici lentille brûlante celle qui est destinée pour le même usage que le miroir qu'on appelle ardent, & beaucoup plus proprement brûlant, & on a en vue principalement la grande lunette du Louvre, qui a quatre pieds de diamètre, qui a fait des effets étonnants : pourtant ces effets sont bornés par trois causes, qu'on développe dans cet Opuscule, & on en détermine l'étendue : ce sont, le diamètre apparent du soleil, l'erreur de sphéricité, & celle de réfrangibilité : cet objet vient à propos après l'Opuscule précédent, où on a tous les éléments relatifs. Les trois figures de la planche VI sont destinées pour ces trois objets.

56. En faisant abstraction des deux erreurs suivantes les rayons, qui étant partis du centre du soleil S (fig. 1), & des bords L, L de son diamètre passent par le centre C de la lentille, & vont jusqu'à son foyer en F, E, E y rassemblent chacun tous ces compagnons arrivés à toute la surface de la lentille : mais eux mêmes y sont séparés, & à la place de rassembler la totalité de la lumière du soleil en un point, ils la dispersent par un cercle, dont le diamètre EE est déterminé par l'angle ECE, qui exprime le diamètre apparent du soleil, & par la distance focale CF. Les rayons homogènes qui sont partis du centre du disque du soleil, qui est un seul point, sont dispersés à la fig. 2 par la surface d'un cercle du diamètre EIE, & dans la fig. 3 le foyer des rouges partis du même centre du disque étant en F, & des violets en F', il y a une dispersion par un cercle qui a pour diamètre EIE.

57. On trouve que dans une lentille, qui a 10 pieds de distance focale, le diamètre EFE (fig. 1) est en lignes $= 12{,}98$: ses 4 pieds de diamètre en y supposant $m = 1{,}53$ comme on trouve à-peu-près dans beaucoup de verres communs, font (fig. 2) le diamètre EIE $= 9{,}10$: la valeur $m = 1{,}60$, qu'on trouve

ve à-peu-près dans le flint, le fait $= 8,18$: les valeurs $m =$ $1,60$, $dm = 0,027$ pour le flint, & $m = 1,53$, $dm = 0,018$ pour le verre commun donnent (fig. 3) le diamètre EIE pour celui-là $= 13$, pour celui-ci $= 9,78$. Ce sont les valeurs pour ce cas particulier d'une si grande lentille tirées des formules générales, qu'on y trouve bien détaillées, & on peut les appliquer à tous les autres.

58. On peut remarquer premièrement, que quand il s'agit de grandes ouvertures comme ici, il y a peu de différence, même entre les diamètres des erreurs circulaires de sphéricité, & de réfrangibilité : celui-là s'est trouvé dans le verre commun 9,10, & celui-ci 9,78, avec une différence si petite : dans le flint la différence est un peu plus grande, mais bien éloignée de celle que Newton avoit trouvé dans l'exemple d'une petite ouverture : le premier y est 8,18, & le second 13 : ici il n'est pas double, tandis que là il étoit plus que cinq-mille fois plus grand.

59. La seconde chose à remarquer est que l'excès de l'erreur de réfrangibilité dans le flint sur celui pour le verre commun, qui est de 13 sur 9,78, est beaucoup plus grand que l'excès de l'autre de sphéricité pour le verre commun de 9,10 sur 8,18 pour le flint. Ainsi on voit qu'il étoit mal imaginé, ce qu'on avoit proposé, de faire la grande lentille de flint. Sa grande force dispersive fait que le flint est beaucoup moins propre pour cet objet, que le verre commun. On peut encore ajouter sa gravité spécifique tant plus forte, qui augmente trop excessivement le poids de la machine.

§. VI.

De l'Opuscule III, qui a pour objet les avantages d'une espèce nouvelle de lunette remplie d'eau dans son tube.

60. LA planche VII est destinée à cet objet : on fait voir dans cette Opuscule, que par son moyen on peut décider la question, si la lumière va plus vîte dans un milieu plus dense, comme dans l'eau par rapport à l'air, ou plus lentement : on y voit mieux la

la nature, & les propriétés de l' aberration annuelle des étoiles fixes, & on doit voir un mouvement apparent journalier petit, mais bien sensible dans tous les objets terrestres regardés par une lunette de cette espèce.

61. La fig. 1. exprime deux petites lames DF, HK percées par deux petits trous M, N, & unies par une règle AB parallèle à la ligne MN, à l' usage des dioptres des anciens instruments d' Astronomie. Si l' on tourne cette règle vers un point d' objet dans la direction du rayon RM, qui arrive au premier trou, & qu' on conçoive la terre immobile avec l' instrument, le rayon entré en M passera par N, & frappera l' œil appliqué à ce trou: mais si le mouvement de la terre transporte l' instrument dans la direction AA' avec une vîtesse, qui ait un rapport sensible à celle de la lumière, le rayon ne trouvant plus le trou transporté en N' ne pourra pas sortir & frapper l' œil. Pour le faire sortir il faut incliner la règle comme à la fig. 2. dans le plan MN'N de manière que la raison des lignes MN', NN' soit celle de la vîtesse de la lumière à la vîtesse de la terre, & tandis que la direction du rayon visuel est MN', la direction apparente de l' objet marquée par la règle dans les divisions de l' instrument astronomique sera N'M', l' aberration est l' angle MN'M' qui se trouve dans la direction du mouvement de la terre, & dont le sinus est au sinus de l' angle N'M'M que la direction N'M' de sa position apparente fait avec MM' direction du mouvement de la terre, comme MM' est à N'M', c' est-à-dire comme la vîtesse de la terre est à la vîtesse de la lumière.

62. C' est la plus simple & naturelle idée de l' aberration de la lumière conforme à celle que s' en étoit formée le grand, & heureux Astronome Bradley, qui l' a découverte: elle ne dépend point de la théorie de la vision, ni de toutes les contestations sur la manière de l' impression que l' œil en mouvement reçoive de l' impulsion du rayon: elle dépend uniquement du rapport de la vîtesse du mouvement de la terre à la vîtesse que la lumière a dans l' intervalle entre les deux trous. On le voit encore mieux dans les dioptres télescopiques, où le centre de l' objectif succède au pre-

premier trou M, & l' intersection des fils du micromètre au second. Ceux-ci interceptent le rayon de manière qu' il n' arrive pas à l' œil, qui n' en reçoit aucun impression. Tout dépend de l' inclinaison qu' il faut donner à l' alidade qui porte la lunette, & marque dans les divisions de l' instrument la direction qu' on prend pour l' apparente, pour amener le rayon à l' intersection des fils, qui doivent cacher l' objet, & cette inclinaison nécessaire pour cet effet dépend du seul rapport de ces deux vîtesses. Le temps que la lumière employe pour aller du premier trou au second est immensement petit, & presque momentané, puisqu' elle n' employe qu' un demi-quart d' heure pour parcourir tant de millions de lieues qu' il y a du soleil à la terre. Mais cela n' empêche pas, que le rapport de la vîtesse du mouvement de la terre à celle de la lumière soit sensible. Celui du mouvement annuel est tel, que quand l' angle de la direction apparente de l' objet est perpendiculaire à celle de ce mouvement de la terre, l' aberration se trouve de 20", ce qui est d' accord avec la vîtesse de la lumière, qu' on avoit déjà tiré des éclipses des satellites de Jupiter qu' on voit plus-tôt ou plus-tard, selon que la terre se trouve plus près ou plus loin de cette planète. Le mouvement diurne n' arrive à faire qu' un tiers de seconde d' aberration, qui n' est pas sensible. L' autre à cause du changement continuel en tout sens, qui arrive à la direction de la tangente de l' orbe annuel de la terre, & de la vîtesse presque tout-à-fait constante de son mouvement forme un mouvement apparent de toute étoile fixe, comme si réellement il se faisoit dans un petit cercle parallèle à l' écliptique, qui dans sa projection sur la surface de la sphère céleste devient une ellipse qu' on voit à la fig. 8 en GLG'L' dont le grand axe GG' est de 40 secondes, & le petit LL' est au même en raison des sinus de la latitude EF de la fixe au rayon.

63. On voit clairement par cette théorie, que si la vîtesse de la lumière dans l' intervalle entre l' objectif & le foyer, où se forme l' image de l' objet, qui est le lieu du micromètre, est augmentée ou diminuée, l' inlinaison de la position de la lunette,

c'est-

c' est-à-dire l' aberration sera au contraire plus petite, ou plus grande en la même raison indépendemment de la théorie sur la direction de l' impression de la lumière dans l' œil, & si l' augmentation ou diminution de cette vîtesse est sensible, sera sensible son effet malgré la presqu' instantanéité du mouvement de la lumière dans l' intérieur du tube de la lunette. Selon Newton la vîtesse de la lumière dans l' eau est à la vîtesse dans l' air comme 4 à 3 : ainsi le mouvement total, qui dans l' intervalle de six mois par les deux aberrations en sens contraires dans le cas de la position perpendiculaire de la direction apparente de l' objet par rapport à celle du mouvement annuel de la terre doit être de 40" quand on l' observe avec une lunette ordinaire, qui a l' air dans le tube, doit devenir de 30", si l' on fait l' observation avec une lunette remplie d' eau.

64. On ne peut pas déterminer avec exactitude l' effet de l' aberration par observation immédiate que dans la différence en déclinaison par la distance au zenith : pour l'avoir total il faut attendre six mois, & il faut faire des réductions par des autres mouvements des étoiles fixes, la précession des équinoxes, & la nutation : il faut encore avoir égard au changement de la réfraction : on évite ce changement, si l'on employe des étoiles peu éloignées du zenith, où encore on peut déterminer beaucoup plus exactement les distances au zenith par des secteurs à grand rayon, ce qui a été pratiqué par Bradley, qui par ce moyen a fait cette grande découverte : alors on ne peut pas avoir l' effet entier de 40" beaucoup au de-çà du cercle polaire : mais dans la plus grande partie de l' Europe on peut avoir 36, & même 38, & on développe tout cela à la fig. *9* d' après la théorie des aberrations exposée à la fig. 8, en déterminant les fixes propres pour cet objet : on y détermine la courbe PFP' terminée aux deux pôles P, P' de l' écliptique, & de l' équateur qui passe par les points, où l' angle PFP' est droit, & les étoiles qui s' y rencontrent peuvent avoir l' aberration en déclinaison de 40". Dans une surface plane ce seroit un cercle, dans la surface sphérique c' est une courbe à double courbure, & on donne l' équation à l' autre MNS,

qui

qui est sa projection sur le plan de l' écliptique : mais il suffit bien l' effet de 36" pour avoir très-sensible la diminution de 9", qu' on doit avoir dans la théorie de Newton, & beaucoup plus encore la différence entre les deux théories de la vitesse augmentée dans l' eau, ou diminuée, en ajoutant à la diminution de la première l' augmentation de la seconde.

65. Pourtant pour voir cette différence entière par la méthode ordinaire on devroit attendre six mois, & faire les réductions relatives aux autres mouvements : mais ici on donne la manière de déterminer dans deux nuits consécutives, & peut-être dans une même immédiatement la différence de l' aberration produite par deux lunettes, une ordinaire remplie d'air dans le tube, & l'autre remplie d' eau. Il suffit de les appliquer toutes les deux ensemble à un même secteur de la fig. 3 en AB & AB'. Ce secteur est pareil à celui, qui a été employé pour la mesure du degré de Méridien dans l' État Ecclésiastique, dont on a la description dans l' ouvrage latin *de Expeditione litteraria per Pontificiam Ditionem*, réimprimé à Paris en françois avec le titre *Voyage Astronomique*, *&* *Géographique*. La ligne droite KK' au milieu de la règle GFF'G' poussée en avant, en arrière par la vis L donne par ses divisions les tangentes OI des distances apparentes ZCS au zenith sans aucun besoin de mouvement micrométrique intérieur, où il n' y a que deux fils qui se croisent à angles droits. En tournant l' instrument le fil à plomb marquera du côté opposé la tangente OI', & par la ligne droite II' on aura le double de la distance apparente au zenith. Cette distance sera la vraie augmentée ou diminuée de l' aberration : ainsi ne sachant pas ni la vraie distance au zenith, ni le total de l' une, & de l' autre aberration, par la seule différence de la ligne II' qui répondra aux observations faites par les deux lunettes marquée par l' index du micromètre extérieur on aura cette différence, qui dans une fixe bien choisie pour sa position, & le temps de l' année la donnera dans la théorie de Newton au moins de 9" très-sensible, malgré la presqu' instantanéité du mouvement de la lumière dans le tube.

66. Il n' y a qu' à voir comment on peut faire une lunette, qui ait de l' eau dans le tube. On le voit à la fig. 4, où au lieu de l' image il y a une plaque de verre plane, qui peut avoir des lignes droites à l'usage de micromètre, ou avoir un micromètre filaire adossé par-dessous : l' eau sera renfermée entre l' objectif CC' & cette plaque, & pour ne pas laisser aucun vide entre l' eau & la surface intérieure de l' objectif, ce qui gâteroit tout, & pour empêcher tout l' effet de la dilatation de l'eau par la chaleur, il suffit d'avoir la communication de l'intérieur du tube avec un petit récipient ML' par le canal HIK : la surface de l' eau NN' s' élevera & baissera en tenant toujours l'eau en contact complet avec l'objectif. En passant du verre à l' eau la réfraction sera plus petite, qu' en passant à l' air, ainsi la distance du foyer sera diminuée d' une quantité, qui dépendra de la qualité du verre, & de la courbure de la surface qui touche l'eau. On en fait la recherche à la fig. 5. On y démontre que si la lentille est isocèle & la valeur m pour le passage de l' air à ce verre $= \frac{3}{2}$, & de l' air à l' eau $= \frac{4}{3}$, le foyer de Q' ira en Q, la distance SQ' devenant double de SQ : ainsi un objectif isocèle de 4 pieds deviendra d' huit. On y fait voir les inconvénients qu' on auroit, si l' eau n' arrivoit pas jusqu'à l' objectif, la surface horizontale RR' dans la position oblique du tube détournant le foyer en Q''. On cherche, si dans le cas du remplissage entier on peut rendre la lunette acromatique par les deux passages de l' air au verre dans la premiere surface, du verre à l' eau dans la seconde : on trouve, que non, si c'est un verre commun, qu' on n' auroit rien de satisfaisant, si cela étoit du flint, & même du strass : mais on s'aperçoit, qu' on peut se servir d' un objectif déjà acromatique en y laissant sa distance focale la même & son acromatisme par l' addition d' un autre verre convexo-concave, qui auroit le rayon de sphéricité égal à la distance focale du même objectif, & celui de la seconde diminué seulement de l' épaisseur du même verre, ainsi presque le même. Alors tous les rayons passeroient par les deux surfaces de ce verre, sans aucune réfraction, &

iroient

iroient au même foyer comme s'il n'y avoit ni ce verre ni l'eau.

67. Comme il est nécessaire, que l'image tombe exactement sur les lignes tracées sur le verre plan DD' ou sur les fils du micromètre adossé, on avoit imaginé de placer l'objectif QQ' à la fig. *6* dans un tube séparé PQQ'P' qui entreroit dans un autre ABB'A' : en le poussant en avant en arrière, on feroit aller l'image à sa place, & on ôteroit par-là celle qu'on appelle parallaxe de l'œil. On avoit besoin de cela pour le passage immédiat de l'objectif à l'eau, où l'allongement du foyer dépendoit de la qualité du verre, de la courbure exacte de la dernière surface, & même de la qualité de l'eau : mais dans le cas de ce verre convexo-concave il n'y a besoin de cela, que pour le cas de quelque petit défaut dans les rayons de sphéricité de ce verre, qui sans changer sensiblement l'acromatisme changeroit la distance du foyer avec un peu de parallaxe de l'œil, qu'on corrigeroit par le mouvement de ce tube. Il faudra bien avoir le tube inférieur EFF'E' pour approcher l'oculaire GG' de la plaque DD', ou l'en éloigner selon la différente constitution de l'œil.

68. A' la fig. *7* on fait la recherche du changement qu'il y aura dans le grossissement produit par le passage de l'eau à l'air en traversant la plaque DD', qui ne change point, comme on le démontre, ce qu'on auroit, s'il y avoit le passage immédiat. On trouve qu'à parité d'oculaire le grossissement qu'on aura ici sera à celui qu'on auroit en l'air par un objectif de la distance focale SQ' comme 4 à 3, & à celui qui est employé ici en l'employant dans une lunette ordinaire, comme 2 à 3. Par conséquent quand on employe le verre convexo-concave, qui ne change pas la distance du foyer, il y aura la diminution du grossissement en raison de 4 à 3 : mais en changeant l'oculaire on pourra avoir le grossissement qu'on veut.

69. Tout cela étoit achevé, quand on s'est aperçu d'un objet le plus intéressant relatif aux observations à faire par cette espèce de lunette, & on y a ajouté le §. 4 sur l'aberration qu'elle doit produire en regardant des objets mobiles. Il y a deux aberrations produites par le mouvement progressif de la lumiè-

re, celle de l' inclinaison du tube à la direction du rayon qu' on a expliqué d' abord, & l' autre du mouvement de l' objet même dans le temps que la lumière employe depuis son départ jusqu' à son arrivée à l' œil, qui fait que l' objet ne se trouve pas, quand on le voit, là où il étoit, quand la lumière en est partie. Or on trouve que ces deux aberrations se détruisent l' une l' autre, quand on regarde cet objet par une lunette remplie d' air, la première étant corrigée par la seconde : mais quand on employe la lunette remplie d' eau, elle n' en est pas assez corrigée, si la vîtesse dans l'eau est plus grande, que dans l'air, & elle en est plus que corrigée y ayant encore un reste de son effet dans l' hypothèse contraire de la vîtesse diminuée dans l' eau.

70. Soient (fig. 2) R, r, R' les rencontres des lignes N'M, NM, N'M' avec la ligne parcourue par l' objet R attaché à la terre, qui doit être parallèle aux lignes MM', NN', & sa partie rR' doit être égale à celles-ci. La vîtesse de la lumière par l' air hors du tube, & dans son intérieur étant la même, dans le temps que les points M, N se sont avancés par les lignes égales MM', NN' l' objet R aura parcouru rR' après avoir passé par Rr dans le temps que la lumière aura employé par RM, puisque les lignes parcourues avec les deux vîtesses, celle de la terre & l' autre de la lumière continuée la même dans l' air, doivent être proportionnelles au temps, & les lignes RM, MN', Rr, rR' sont proportionnelles à cause du parallélisme des lignes Mr, NMR. Ainsi l' objet au moment qu' on le voit du point N' se trouvera réellement dans la direction apparente N'M'. Mais si la vîtesse de la lumière est augmentée dans l' intervalle MN', le temps sera diminué, & le trou M ne sera pas arrivé en M', mais à un point m par un intervalle Mm, qui sera plus petit, ou plus grand que l'autre MM' en raison inverse de la vîtesse dans l' air à celle dans l' eau, & la direction apparente sera N'm, l' aberration sera l'angle M'N'm différence de la direction vraie N'R', & de la apparente, qui sera N'm, parcequ' en faisant nN' $=$ Mm il faudra incliner la règle dans la direction des points nM pour voir l' objet

jet par le trou N', qui alors ira de n en N', tandis que M n'aura parcouru que Mm, & la ligne NM, qui sera devenue nM parallèle à la N'm sera la direction apparente. Cette différence sera à l'aberration précédente comme l'angle M'N'm est à l'angle M'N'M, c'est-à-dire sensiblement comme M'M à M'm, ou dans la théorie de Newton, dont nous parlerons dorénavant, comme 1 à 4. Elle se fera dans le même plan de la précédente, mais du côté opposé, tandis que dans la supposition de la vîtesse diminuée elle se feroit du même côté de la précédente : elle se fera dans le plan qui passe par l'axe de la lunette, & par la direction du mouvement de la terre, qui a la direction parallèle à la tangente de l'orbe annuel.

71. Quand la direction de la lunette sera parallèle à cette tangente l'aberration sera nulle, mais ce ne sera que dans un instant : le mouvement diurne de la terre, qui dans un jour change très-peu la direction du mouvement annuel de la terre, changera beaucoup celle de la position de la lunette, & en formant & augmentant l'angle de ces deux lignes fera naître, & augmentera l'aberration. Ce changement formera un mouvement apparent. Si l'on transporte le mouvement diurne au ciel, en concevant la lunette immobile, comme on fait dans la Gnomonique, où l'on conçoit immobile le style du quadrant solaire, c'est la direction de la tangente de l'orbe annuel, c'est-à-dire le rayon de la sphère dirigé au point de l'écliptique éloigné de trois signes vers l'Orient par rapport au lieu de la terre vue du soleil, & par conséquent vers l'Occident du lieu du soleil vu de la terre énoncé dans les éphémerides, qui fera son tour autour de l'axe de la terre, en décrivant un plan dans les solstices, ou ce rayon se trouve dirigé vers un des deux points équinoxiaux & fait avec l'axe de l'équateur un angle droit, & dans les autres jours de l'année une surface conique, en faisant avec l'axe un angle mesuré par le complément de la déclinaison.

72. On voit bien que si l'axe de la lunette est parallèle à l'axe de l'équateur, son angle avec ce rayon sera sensiblement constant dans cette journée avec l'aberration, qui sera aussi constan-

stante, & on aura le mouvement apparent circulaire, qui dans un micromètre réticulaire pratiqué ou imaginé dans le lieu de l'image se fera pour le point de l'objet, qui répond à l'axe de la lunette, autour du centre du champ, & aura pour rayon dans les solstices 5'', & dans les équinoxes, où il sera le plus petit, 4'', 58 qui répond au cosinus de 23°. 28': ainsi le diamètre du cercle dans les solstices sera de 10'', dans les équinoxes un peu au de-là de 9''. Pour les autres positions de l'axe de la lunette on détermine la ligne de ce mouvement apparent dans la même figure 9, qui a servi pour l'autre précédent pour ne pas multiplier les figures : ainsi il faudra forcer un peu l'imagination pour la faire servir ici. Le point P' seul y reste pour le pôle de l'équateur comme auparavant ; mais le cercle ABCD y est le parallèle décrit par le point E, qui est le point de l'écliptique éloigné du lieu du soleil de trois signes, c'est-à-dire celui qui répond à la direction du mouvement annuel de la terre, P le point qui répond à l'axe de la lunette, O'P'PO le cercle horaire qui passe par le point P placé entre P' & O'.

73. Si l'on fait $a = 5''$, & qu'on prenne de P vers O' un petit arc PQ $= a\,sin.$PO, & vers O un autre PR $= a\,sin.$PO', le lieu apparent se trouvera en Q, quand le point E sera en O, & en R, quand celui-là sera en O' : ces arcs seront égaux dans les solstices, parcequ'alors le cercle ABCE sera l'équateur, & les arcs PO', PO l'un supplément de l'autre auront les sinus égaux, dans les autres jours de l'année le point P ne tombera pas au milieu de l'arc QR. Si pour un autre point E quelconque du cercle ABCD on conçoit un arc de grand cercle EPE', qui passe par P, & qu'on prenne vers E' le petit arc PK $= a\,sin.$PE, le point K sera le lieu apparent. On fait voir dans l'Opuscule comme on peut trouver l'arc PP', qui mesure l'inclinaison de l'axe de la lunette à celui de l'équateur, & la distance au méridien du point E' du cercle horaire dans le parallèle ABCD, & par-là l'heure de l'arrivée du point E en O, & K en R, & l'angle OP'E pour une autre heure quelconque : ainsi dans le triangle PP'E on sait l'arc PP' trouvé, l'arc P'E complément de la déclinaison que

le

le soleil aura après trois mois, & l'angle en P', ce qui donnera l'arc PE, avec son sinus, qui multiplié par 5" donnera l'arc PK, & l'angle P'PE = KPR, qui en donnera la position par rapport à l'arc PR. De-là on tirera la construction de la courbe, & le point du lieu apparent pour toute heure donnée. En considérant cette petite partie de la surface sphérique comme un plan, on prendra sur une ligne droite tirée sur le papier de l'un & de l'autre la valeur des deux arcs PR, PQ en dixièmes de seconde tirée d'une ligne aussi grande que l'on voudra divisée en 50 parties, & à chaqu'angle RPK trouvé par cette heure on tirera une ligne droite, & on y prendra la valeur trouvée pour PK réduite en secondes. On aura ainsi pour une heure quelconque la quantité de l'aberration, & sa direction en dixièmes de seconde.

74. Mais on a cherché dans l'Opuscule la nature de cette courbe par son équation, & on l'a déterminée au num. 95 pour les jours des solstices par un calcul très-simple, & en la trouvant une ellipse, dont P est le centre, RQ le petit axe, qui devient égal au grand, quand le point P va en P', comme il devoit, la courbe alors devenant un cercle. Dans la note du num. 96 on donne deux équations, qui outre l'abscisse PL = x & l'ordonnée LK = y ont encore la PK = $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, d'où l'on peut tirer par les méthodes connues l'équation en x & y. On y voit, que cette équation doit être bien haute comme on pouvoit s'y attendre, le point P n'étant pas au milieu de l'arc RQ, qui est son axe : mais il est inutile de la chercher, quand par la construction qu'on a donnée, qui est si simple, on peut avoir les aberrations à un dixième de seconde, & si l'on veut même à un centième. Ce qu'on tire de ce calcul au num. 97 par une méthode très-simple est, que la plus grande ordonnée LK est généralement ici comme dans le cas de l'ellipse = 5"$\times$ *sin*.PE, & son double, qui est la longueur totale, = 10"$\times$ *cos*. decl. E : le petit axe RQ est à cette longueur, qui dans l'ellipse est son grand axe, en raison du cosinus de l'arc PP' au rayon.

75. Par-là on a toujours la même longueur, qui donnera dans les solstices un mouvement de 10", & dans tout le reste de l'année plus

plus de 9'', ce qui est si sensible, & si l'on trouve plus ou moins, on verra quelle est la vîtesse que la lumière a dans l'eau par rapport à celle qu'elle a dans l'air. L'axe RQ, qui est la largeur, sera d'autant plus petit, que l'inclinaison des deux axes mesurée par l'arc PP' s'éloignera plus de l'angle droit, & dans la position de la lunette perpendiculaire à l'axe de l'équateur cet axe s'évanouira, le perimètre de l'ellipse se changeant en ligne droite double : si dans le reste de l'année l'irrégularité de la courbe produit quelqu'écart de la ligne droite avec tout l'évanouissement de l'axe RQ, il ne pourra être que très-petit, à pouvoir prendre ce perimètre alors aussi pour une ligne droite.

76. Ainsi on aura tous les jours le moyen de faire une observation si facile, quand on aura une lunette d'un grand grossissement avec un bon micromètre à vis, ou réticulaire, & on pourra décider une question de physique si intéressante : on pourra choisir un petit objet terrestre bien illuminé, comme un petit cercle blanc sur un fond noir placé à une petite distance sans craindre les nuages ni les variations de la réfraction, en plaçant la lunette sur un appui bien ferme, ou si l'on craint quelque mouvement de cet appui avec toute la maison en y plaçant à côté une autre lunette ordinaire, qui indique ce mouvement pour en tenir compte, & savoir l'effet de l'eau par la différence des mouvements qu'on aura trouvé.

§. VII.

De l'Opuscule IV. Sur une nouvelle espèce de micromètre objectif.

77. CET Opuscule commence per une préface latine, où il y a un récit abrégé de ce qui est arrivé à Paris à l'occasion d'un Mémoire que j'ai présenté l'année 1777 à M. de Sartine, qui étoit alors Ministre de Marine, sur un nouveau Micromètre & Mégamètre objectif, qui a excité des grandes constestations dans le temps, dont j'ai parlé avec tout le ménagement possible, & seulement je

m'étois

m'étois borné à la narration très-fidelle, mais abrégée des faits principaux. Après cette préface il y a ce Mémoire en françois avec un autre que j'y avois promis, & que je fis d'abord, où il y a toute la théorie de cet instrument, & la description de la machine pour le monter. Quand ce volume étoit déjà préparé & donné aux imprimeurs, on m'a annoncé qu'il y avoit un ouvrage de M. l'Abbé Rochon sur cet objet: mais ici à Bassano il n'y en avoit aucun exemplaire, ce que j'ai dit à la fin de la même préface, en y ajoutant que quand j'aurois pû le voir, je donnerois des éclaircissements, si je les croyois nécessaires pour le bien de la chose sans des récriminations relatives à ce qui me regarderoit personnellement. Cet Opuscule étoit déjà imprimé, lorsque cet ouvrage m'est arrivé. J'ai vu que pourtant il y avoit une nécessité absolue de donner des éclaircissements tant sur la narration de ce qui me regarde pour le fait, que sur des points qui appartiennent à la nature de mes instruments mal attaqués dans le même ouvrage. Mais il faut qu'auparavant je donne ici au moins une légère idée de mon instrument pour le micromètre objectif qui se trouve dans cet Opuscule. Les Mémoires sont si courts, qu'on peut aisément les lire en entier. D'ailleurs ils sont écrits en françois, ce qui rend moins nécessaire leur extrait parmi ceux qu'on fait dans ces volumes en cette langue, principalement pour ceux qui n'aiment en France ce qui est écrit en d'autres langues, & qui ont particuliérement aujourd'hui abandonné le latin.

78. Soit (fig. 1 planche VIII) DEF un objectif, BAC un prisme placé hors de la lunette de manière à ne pas couvrir toute l'ouverture du même objectif. Les rayons partis d'un point éloigné d'un objet placé dans la continuation de l'axe de la lunette prolongé en EL, qui passeront hors de ce prisme en tombant sur la partie découverte de l'objectif, iront en former l'image dans le foyer H placé sur l'axe: mais ceux qui tomberont sur le prisme, comme LMN en seront détournés par des lignes inclinées à l'axe en un angle déterminé par celui du prisme, & par la qualité de sa matière. Si l'on conçoit la

 ligne

ligne L'EK, tous ces rayons arriveront à l' objectif parallélement à cette ligne, & par conséquent iront former une seconde image de cet objet en K dans le même point qui recevra l' image du point de l' objet éloigné de même qui se trouve dans la continuation de la ligne EL' éloigné de celui de l'axe par l'angle visuel LEL' = HEK égal à l' angle ENO qui répond à la force du prisme.

79. L' approche ou l' éloignement de ce prisme ne changera point l' angle ENO : ainsi il ne changera point le lieu de la seconde image K du point placé dans la direction de l' axe EL, ni de l'autre point placé dans la direction EL', dont l'image est réunie à celle de l' autre. Pour faire changer la seconde image K du point de l' axe & faire convenir celle-ci successivement à des images de différents points de l' objet, il n' y a que ces deux moyens, ou de changer l' angle A du prisme, ou de placer le prisme dans l' intérieur du tube en B'A'C', & le faire approcher du foyer H. Pour le premier objet j' ai suivi la méthode ingénieuse de M. l'Abbé Rochon, comme je lui ai rendu justice dans le premier des deux Mémoires de cet Opuscule, de former deux, qu' on peut bien appeller prismes à bases circulaires, puisqu' ils font le même effet, & que si l' on prend sur une des deux surfaces, qui forment un prisme, une base circulaire, & qu' on coupe le reste, on a cette figure. En faisant tourner un de ces deux prismes sur l' autre, on aura un angle formé par l' inclinaison de la première surface avec la troisième qui sera variable depuis la différence jusqu' à la somme de leur deux angles, ainsi, si ces angles sont égaux, depuis zero jusqu' au double d' un seul. J' ai donné dans la figure 4 la manière de le monter. Ils y sont placés en ONPQ dans un double anneau dont un est attaché à un des deux autres anneaux plus grands ABCD, IKLM, qui entourent le tube de la lunette, & celui-ci a un cercle plus grand EFGH, l'autre de ces deux premiers anneaux est attaché à l'autre prisme, qui doit tourner sur le premier, & à l' autre des deux anneaux contigus au tube de la lunette, & amener avec lui un nonius en G, ou encore un autre

en

en E pour plus de sureté. Ce second anneau sert pour varier l' angle en tournant autour du premier, & le premier pour faire tourner toute la machine autour du tube, & faire aller les deux images dans cette direction qu' on veut, comme il y a deux mouvements pareils dans le micromètre objectif ordinaire. J' ai donné aux figures 5, 6, 7 la solution du problême que j' avois promis de même dans ce premier Mémoire, où on a la quantité de l' angle du prisme composé par les angles des composants, & par leur position mutuelle, puisque son changement est bien éloigné de la proportionalité avec le mouvement circulaire du nonius: mais je n' ai pas manqué de faire remarquer qu' on n' aura jamais une mesure exacte par ce moyen: il faut déterminer la valeur des angles qui répondront aux divisions marquées par le nonius à l' aide des observations terrestres.

80. Pour le mouvement intérieur du prisme B'A'C' (fig. 1) j' en ai donné la théorie, qui est pareille au second moyen employé aussi par M. l' Abbé Rochon dans sa seconde espèce de micromètre, dont j' ai parlé encore dans le premier Mémoire en lui laissant tout l' honneur de la primauté de la découverte, quoique j' avois des raisons, comme j' ai indiqué après les contestations dans le second Mémoire, de croire de l' avoir imaginé avant lui, & de soupçonner, qu' on lui avoit communiqué mon idée. J' y ai ajouté la difficulté qui se rencontre en éloignant trop ce prisme de l' objectif; parceque les rayons DH, FH, qui étant tombés aux bords D, F de l' objectif vont au foyer H, s' approchent entre eux, & le prisme restant toujours de la même grandeur, l' espace SB', A'V, qui laisse le passage libre aux rayons hors du prisme, se rétrecit, & leur image devient toujours plus foible jusqu' à ce qu' à la fin elle s' évanouit. Je trouve le remède à ce défaut par le moyen de deux anneaux de la figure 2 & 3, où les petits cylindres du second entrent dans les trous du premier. Ces trous étant numérotés on doit trouver la valeur de chaque position par les observations terrestres pour avoir les intermédiaires par un petit mouvement intérieur de l' autre prisme en avant en arrière. J' y ai ajouté la méthode de mesurer les grands angles

 à l'

à l' aide de plusieurs binaires de prismes, dont un donnera les degrés, le second les minutes, le troisième les secondes, & encore les fractions des secondes, comme les différentes aiguilles donnent dans les montres ou pendules les heures, les minutes, & les secondes. On trouve tout cela beaucoup mieux détaillé dans le second Mémoire.

81. Pour ce qui appartient à l' ouvrage de M. l'Abbé Rochon je commencerai par une faute matérielle, qui s' est glissée dans la copie du texte de mon premier Mémoire, qui lui a servi dans l'impression qu'il en a donné, & comme on en a tiré plusieurs l'une de l' autre, elle se trouvera peut-être dans d'autres. Voici mon texte dans l' impression qui déjà avoit été faite ici avant que son ouvrage m'est arrivé avec cette faute, qui, comme je vois, a produit de l'embarras. Après avoir parlé du micromètre formé par le mouvement intérieur du cristal de roche le long de l'axe du tube j'ai dit: *Mais M. l'Ab. Rochon n' a employé pour son micromètre que la double réfraction du cristal de roche, & on m' a assuré, qu' il a dit, que son prisme ne pouvoit lui donner, que jusqu' à six minutes*. L' exemplaire imprimé dans son ouvrage *met 6 degrés*. On pourroit croire qu'il y a là une contradiction, parceque je dis que M. l' Ab. Rochon n' a employé que la double réfraction du cristal de roche, tandis que je ne pouvois pas ignorer que la petitesse de l'angle formé des deux réfractions du cristal de roche ne pouvoit pas donner *6* degrés. Quelqu' un encore au premier coup d'œil pourra tirer de-là, qu'alors je savois déjà, que M. l' Ab. Rochon avoit employé aussi les prismes de verre simple pour la mesure des angles. Mais l' on voit clairement, que je ne parlois que *de son prisme de cristal de roche*. On m'avoit assuré, qu'il avoit dit que son prisme ne pouvoit lui donner que jusqu'à *6* minutes, & je savois bien, que l'angle de la double réfraction du cristal de roche donne des angles toujours petits, mais différents de manière que quand les deux surfaces réfringentes sont également inclinées à l'axe de la forme naturelle hexagone de ces cristaux, cet angle s' évanouit. Il n' y avoit rien d'extraordinaire dans ce rapport. Tout l'embarras vient

vient de cette substitution fautive des degrés aux minutes. On peut voir dans mon Opuscule 7 de ce volume-ci, combien des faux raisonnements faits par M. Fontainelle dans les monuments de l'Académie & par d'autres après lui ont étés produits par une faute matérielle de même, qui s'est glissée dans une observation de M. Bouguer, où voyant les secondes substituées aux minutes on a cru de découvrir un saut subit dans les réfractions horizontales en passant de l'élévation sur l'horizon à la dépression au-dessous. Cette faute matérielle a fait faire tant de distinctions entre les réfractions célestes & terrestres, qui pourtant appartiennent à une même courbe continuée à travers de toute l'atmosphère pour les unes & les autres.

82. Au reste lorsque j'ai fait mon Mémoire je n'avois rien vu parmi ce qui avoit été publié comme donné par lui à l'Académie appartenant à la mesure des angles sans l'usage du cristal de roche. Il y avoit dans un autre de ses ouvrages, que je n'ai vu qu'après toutes ces contestations, l'emploi du prisme à verre simple, mais d'une manière bien différente de la mienne, & point du-tout susceptible de l'exactitude requise dans un micromètre : je vois à présent qu'il avoit lu quelque chose d'analogue à la séance publique de l'Académie dans le temps que je mettois au net mon Mémoire à présenter au Ministre; mais je n'avois pas assisté à cette lecture, m'étant déjà absenté de toutes les séances, même des hebdomadaires, de ce corps très-respectable, dont j'étois déjà un de plus anciens Correspondants, & pour lequel j'ai tout le respect, à cause des désagréments extraordinaires que plusieurs de ses membres remplis de l'esprit soi-disant philosophique se sont empressés de me donner tout de suite après mon établissement en France, où j'avois été fixé par les Bienfaits du Roi d'une manière bien flatteuse, & par la protection des Ministres continuée toujours, même au milieu de tous les changements arrivés dans l'un & l'autre Regne. Mais ce qu'on lit au milieu du grand bruit des assemblées publiques frappe bien peu, & s'échappe. D'ailleurs cela aussi qu'il a proposé alors est si peu susceptible de l'exactitude susdite, & il est si différent de ce que j'ai détaillé

taillé dans mon Mémoire, que le même Ab. Fontana, dont je parlerois d'abord, & M. de La-Lande, aux quels je le fis voir avant de le présenter au Ministre, l'ayant examiné me l'approuverent positivement, sans y appercevoir la moindre chose dans tout le récit des faits, qui auroit eu besoin de changement. C'est M. de La-Lande mon ancien Ami, qui en ayant reçu de moi une copie jugea à propos de le lire à l'Académie, quand j'étois déjà à la Campagne, tant il est vrai qu'il n'y voyoit rien de contraire à ce qu'il connoissoit des découvertes de M. l'Ab. Rochon.

83. Mais bien avant ce temps-là j'avois communiqué mes idées sur ces objets à plusieurs de mes Amis, & j'en avois écrit particuliérement en Italie. C'est pour cela que dans le Journal de Pise en donnant la version du texte de l'Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris du Volume imprimé l'an 1780 pour les Mémoires du 1777 sur les découvertes de M. l'Ab. Rochon ajoute cette note marginale: *Il Signor Ab. Boscovich aveva anche prima di quel tempo imaginato stromenti simili, e noi ne avevamo fin' allora delle sicure notizie*. J'avois aussi communiqué à M. l'Abbé Fontana mes idées pour rendre incomparablement meilleur l'usage des prismes tant par le mouvement rectiligne d'un seul de cristal de roche dans l'intérieur du tube avec toute sa théorie pour en avoir une échelle, que par l'emploi du verre simple pour des prismes qui couvriroient une seule moitié de l'objectif, & cela tant avec le mouvement circulaire en dehors, que avec le rectiligne en dedans: je lui avois communiqué tout cela, quand encore il n'avoit rien entendu d'aucune part sur cet objet que le seul mouvement circulaire extérieur des deux prismes de cristal de roche. La conversation avec M. Turgot, dont il parle dans son certificat imprimé par M. l'Ab. Rochon, a été postérieure à mes entretiens avec lui sur les mêmes objets. C'est son ami que j'ai indiqué dans mon Mémoire sans le nommer. Je le trouvai en allant ce jour-là chez-lui: il se retira peu après, & alors M. l'Ab. Fontana me dit, que M. Turgot venoit de lui donner comme une nouvelle toute récente, que M. l'Ab. Rochon avoit aussi imaginé le mouvement intérieur de son prisme, & qu'il alloit le commu-

mu-

muniquer à l'Académie à la première séance. Je lui dis, mais pourtant vous pouviez ajouter, que je vous avois déjà fait voir la théorie de ce mouvement. Je le vis un peu embarrassé: il me répondit à la fin, qu'il n'avoit pas voulu paroître de donner trop à l'amitié pour moi. Tout cela se passa avant toute contestation : pourtant dans le certificat qu'il a donné quelque temps après à M. l'Ab. Rochon en parlant de ce qui s'étoit passé ce jour-là, après avoir exposé comme M. Turgot lui avoit dit que M. l'Ab. Rochon lui avoit communiqué une lunette avec ce mouvement intérieur, il ajoute : *Ayant eu occasion par la suite de parler des découvertes physiques avec M. l'Ab. Boscovich, je lui communiquai celles de M. l'Ab. Rochon, comme étant déjà très-connues à Paris. M. l'Ab. Boscovich me dit qu'il avoit eu des idées analogues à celles-là, & que M. de La-Lande lui avoit déjà parlé des découvertes de M. l'Ab. Rochon, & de ce que ce dernier avoit lu à l'Académie des Sciences sur cette matière*. C'est le certificat, qui a fait tant de bruit & qui a donné l'occasion à un autre de M. de La-Lande.

84. M. l'Ab. Fontana ne dit rien de tous nos entretiens antérieurs en se contentant seulement d'ajouter que je lui dis alors, que j'avois eu des idées analogues, quand c'étoient non pas des idées analogues, mais le mêmes individuelles de ce mouvement intérieur, que c'étoit à lui même que bien antérieurement j'avois fait voir tout le détail de la théorie de son effet, que c'étoit lui, à qui j'avois fait voir sur sa lunette l'effet du prisme de verre simple, qui couvroit une partie de son objectif, sans se souvenir, ou sans réflechir, que c'étoit lui même qui avoit vu & approuvé le récit que je faisois de tout cela dans le Mémoire présenté au Ministre. Il confond ce qui appartient à la conversation que nous eûmes ce jour-là après le départ de M. Turgot avec nos conversations bien antérieures faites au premier commencement des idées de M. l'Ab. Rochon d'employer le cristal de roche avec le mouvement circulaire. C'est dans ces entretiens antérieurs, & non pas ce jour-là que je lui dis, que M. de La-Lande m'avoit parlé de ces premiers essais de M. l'Ab. Rochon,

dont

dont il avoit entendu la lecture. C' est cette confusion d' époques qui fait paroître au premier coup d'œil le certificat de M. de La-Lande contraire à mon récit, que le même Académicien avoit vu dans mon Mémoire, avoit approuvé, & lu à l'Académie lui même. Dans ces entretiens antérieurs entre M. de La-Lande & moi il ne s'agissoit que de ce mouvement circulaire. M. l'Ab. Fontana le jour de cette conversation avec M. Turgot ne me parla que de la manière que j'ai exposé ci-dessus: il me dit que celui-ci venoit de lui communiquer la découverte du mouvement rectiligne, comme toute nouvelle, en lui ajoutant qu' il alloit la porter à l'Académie à la séance prochaine. Je ne lui dis pas ce qu' il me fait dire, mais seulement je lui fis ce petit reproche à l' amiable de ce qu'il n'avoit pas dit à M. Turgot, qu'il avoit entendu antérieurement tout cela de moi, & comme je le vis embarrassé pour sa réponse, j' eus le soupçon, que lui même auroit déjà parlé antérieurement de mon idée au même M. Turgot sans me nommer, & que pour cela il n' avoit pas pû dire alors, que c' étoient mes idées. J' avois déjà non seulement achevé de préparer tous le matériaux pour mon Mémoire, mais je l' avois écrit en grande partie, & lui montré. En étouffant mon soupçon, je lui dis, que je changerai le texte en donnant à M. l' Ab. Rochon tout le mérite de cette découverte: je le fis avec toutes ces expressions si fortes qu' on voit dans le même Mémoire, aimant principalement ma tranquillité, & je lui fis voir ce changement & ces expressions si favorables à l' honneur de M. l' Ab. Rochon. Le Mémoire fini, c'est lui qui le vit le premier en entier, même avant qu' il fût mis au net, & il l'approuva fort, en croyant que M. l' Ab. Rochon en seroit très-content: moi aussi j' étois persuadé que même celui-ci me resteroit obligé.

85. Mais je me trouvai bien trompé dans mon attente. Tout au contraire on m' écrivit de Paris le grand bruit, que la lecture de mon Mémoire faite à l'Académie par M. de La-Lande avoit excité: on pressa M. l' Ab. Fontana pour avoir ce certificat. Comme il y avoit confondu les époques & l' objet de mes entretiens avec M. de La-Lande, on en demanda un autre à celui-ci.

lui-ci . On s' échauffa de manière à tâcher d' obtenir une députation au Ministre pour demander au nom de l' Académie qu' on m' otât les bienfaits du Roi . Ce corps si sage s' y refusa . Un de mes Amis tout épouvanté courut à la Campagne éloignée d' un bon nombre de lieues m' en avertir , & d' autres insisterent par plusieurs lettres sur le danger & sur la nécessité de prévenir l' orage . J' écrivis à M. de Sartine , qui me répondit avec des expressions pleines de bonté, que je n' avois rien à craindre, que mon caractère étoit très-bien connu . Comme on m' annonçoit aussi qu' on parloit de quelque certificat fait par M. l' Ab. Fontana contraire à mes assertions ; je lui écrivis en lui rappellant toutes les circonstances des nos entretiens , la communication que je lui avois fait de ce Mémoire & son approbation, en le priant de détromper ceux , qui sur son certificat auroient eu l' occasion d' être induits en erreur : il n' étoit point possible de ne pas se souvenir de tant de circonstances qu' on lui remettoit sous les yeux. Dans un bon nombre de lettres qu' il m' écrivit alors il n' a jamais dit qu' il n' en se souvenoit pas : il a même fait voir positivement le contraire : il s' est seulement excusé long-temps sous prétexte que son témoignage ne feroit pas une preuve légale . J' insistai toujours que ce n' étoit pas une preuve légale que je demandois pour avoir un jugement sur la primauté , à laquelle j' avois expressement renoncé : que je demandois seulement un témoignage pour la vérité de ce que j' avois avancé sur nos entretiens dans le Mémoire , que lui même avoit vu avant qu' il fut présenté : à la fin il m' avoit promis de faire cette démarche . J' ignore si M. l' Ab. Fontana a tenu sa parole , ou s' il a changé d' avis après . L' Académie avoit nommé des Commissaires à la requisition de M. l' Ab. Rochon , que pour moi je m' étois protesté dans une réponse que je donnai alors à une lettre de M. le Sécrétaire de l' Académie que je ne demandois rien d' eux , & que je n' avois pas donné la commission de lire mon Mémoire aux Assemblées . Ou M. l' Ab. Fontana n' a rien fait de ce qu' il avoit promis , ou MM. les Commissaires ont fait leur rapport avant cette nouvelle démarche de sa part , ou bien ils ont crû

devoir se tenir à son premier certificat donné par écrit : il faut dire dans le premier cas, que lorsque M. l' Ab. Fontana avoit été requis de donner ce certificat il ne se souvenoit point du détail de nos entretiens, & qu' après il a eu de la difficulté à faire voir ce manque de mémoire.

86. Je ne serois pas entré dans tout ce détail, si ce n'étoit ce certificat qui a fait tant de bruit alors, & que je vois ici pour la première fois, & je le trouve imprimé comme un monument authentique de la fausseté de mon récit, qui pourtant avoit été fait avant toute contestation. Il ne s' agit pas ici de réclamer l' honneur d' une découverte, espèce de gloire flatteuse à laquelle je n' affiche aucun prix, n'estimant que le vrai mérite de contribuer au bien publique : il s' agit de circonstances qui intéressent trop l' honnêteté de mon caractére. Que ce soit M. l' Ab. Rochon, ou M. Maskelyne, au moi l' inventeur, tout cela m' est égal. Il y a certainement au moins de la différence dans la manière d' adapter le prisme à un instrument que j' ai donné capable d' une très-grande exactitude : je serai très-content si cela porte quelque avantage à l' Astronomie.

87. Pour ce qui appartient à cette exactitude MM. les Commissaires n' en sont pas d' accord, parceque ils n' ont pas assez réflechi sur la force de ma méthode. Ils ont dit par rapport à ma manière de combiner le mouvement rectiligne avec le circulaire ce qui suit : *d' ailleurs dans cette dernière construction de M. l' Ab. Boscovich le mouvement rectiligne ajoute-t-il de la précision au mouvement circulaire ? car qu' importe qu' on mesure exactement les secondes par l' un, si l' on n' a pas la mesure exacte des minutes par l' autre ?* Voici comment on peut obtenir la plus grande exactitude : par le mouvement circulaire on a la variation de l' angle : on amène le petit cylindre ou cône de la fig. 3 dans les différents trous de la seconde. On détermine par des observations terrestres la valeur de chaque position en minutes, secondes, & même fractions d' une seconde : on y ajoute la valeur donnée par le mouvement rectiligne en secondes & fractions de seconde. C' est comme dans l' usage des hauteurs cher-

cherchées par un quart de cercle : on a par le fil à plomb qui tombe exactement sur le point zero de la division, & par l' inversion de l' instrument à l' aide d' un micromètre filaire la mesure précise de ce qu' il faut ajouter à toutes les autres valeurs données par le même fil à plomb, lorsqu' il tombe exactement sur d' autres points de la division, en y ajoutant encore ou retranchant l' erreur de chaque division trouvée par la méthode de la vérification en secondes : par le micromètre filaire intérieur on a en secondes & fractions de seconde la mesure de la hauteur cherchée. Il suffit de remettre le fil à plomb toujours exactement sur le même point pour avoir avec exactitude ce qu' on cherche. Il y a une différence essentielle entre cette méthode & la mienne, c' est qu' on remet très-difficilement dans l' usage commun le fil à plomb sur le même point avec une exactitude si précise ; mais on y parvient par d' autres moyens comme dans mon secteur qui se trouve ici à la planche VII fig. 3 : on amène le point de la division au fil à plomb par le moyen de la vis L, comme j' ai exposé dans l' Opuscule III. L' index N avec la correction des divisions trouvées par une vérification exacte, & par l' inversion de l' instrument donne une précision jusqu' aux fractions d' une seconde. J' ai obtenu de cette manière les fractions d' une seconde dans les mesures des distances des étoiles fixes au zenith pour le degré d' un Méridien en Italie, & plusieurs autres en suivant ma méthode ont trouvé la même exactitude par des instruments pareils. Ici quand on a fait tomber le petit cylindre ou cône de la fig. 3 dans le trou de la fig. 2, on revient toujours précisement au même : ainsi ayant une fois la précision par la vérification bien faite, on a par le mouvement rectiligne intérieur la valeur des angles avec des fractions d' une seconde.

88. Il y a dans le rapport de MM. les Commissaires & dans l' ouvrage de M. l' Ab. Rochon plusieurs autres articles ou expressions, qui mériteroient quelque réponse, ou auroient besoin de quelqu' éclaircissement ; mais comme cela me regarde personnellement sans avoir du rapport immédiat au bien des Sciences, je n' ennuyerai pas mon lecteur en suivant tout cela : par ce que

 j'ai

j' ai dit jusqu' à présent sur les points que j' ai éclairci ici, on peut juger du reste. Seulement j' ajouterai un article qui appartient à l' ouvrage de M. l' Ab. Rochon. Il y déprime au dernier point l'excellente idée du Père Abat pour le prisme composé de deux pièces, l' une plano-convexe, & l' autre plano-concave dont je me suis servi dans le premier Opuscule du premier Volume. Il ne savoit pas, que les deux pièces font un seul prisme à angle variable formé par deux surfaces planes qu' on compare avec un autre à angle fixe. On peut voir dans cet Opuscule l' exactitude à laquelle on peut arriver par son moyen dans la mesure de la qualité réfractive de chaque nuance de couleur en particulier, & de la distractive, comme je l' appelle, d' un binaire quelconque, comme aussi l' inversion successive du spectre, qui démontre l' impossibilité de réunir par deux seules espèces de substances plus de deux couleurs à la-fois. M. le Docteur Comparetti Professeur Publique de l' Université de Padoue, homme d' un très-grand mérite qui a fait un grand nombre d' observations avec mon instrument fondé sur cet excellent principe, donnera un long Mémoire sur cet objet, dont il a déjà les matériaux. Pour moi j' en ai assez de cette espèce de contestations; je suis même déterminé à ne rien répliquer à quelque nouvelle attaque sur ces objets: j' aime trop ma tranquillité sur-tout dans ces derniers jours de ma vie passée dans tant de travaux utiles en tant de genres, qui ne sont pas seulement ceux qui appartiennent aux Sciences & à la litterature.

§. VIII.

Des Opuscules V. & VI.

89. LE volume étant déjà trop grossi me force à donner une idée très-légère de ces deux Opuscules, comme aussi de m' étendre moins de ce que j' aurois voulu dans celui qui vient après (*). L' Opu-

(*) Cela vient beaucoup plus à propos après que les nouvelles circonstances m' ont obligé à allonger excessivement l' extrait précédent, qui étoit préparé de même très-court.

L' Opuscule V a pour objet une lunette, qui donne deux images d' un même objet avec leurs mouvements égaux en sens contraire. Ce sont comme deux lunettes réunies, l' une à deux objectifs qui donne l' image directe, l' autre à un objectif percé qui la donne renversée avec l' oculaire commun. D' ailleurs ces deux Opuscules sont écrits aussi en françois, & il ne sont pas si longs qu' on ne puisse les parcourir aisément, si on en a l' envie, dans le texte. A' la fig. 1 (planche IX) l' axe AH passe par les centres A, & B des deux premiers objectifs *aa'*, & *bb'* de la première lunette, C de l' objectif *cc'* de la seconde percé en *ee'*, & D de la lentille commune *dd'*. Les rayons *m'a'* qui étant partis d' un point de l' axe bien éloigné arrivent avec des directions sensiblement parallèles au même axe au premier objectif en *a'*, vont se réunir à un premier foyer sur l' axe en R, arrivent au second objectif en *b*, passent par le trou *ee'* du troisième, & après avoir formé un second foyer sur le même axe en F arrivent en *n* à l' oculaire, qui ayant le même foyer antérieur le renvoye à l' œil par des directions *nh* parallèles à l' axe. Les rayons *mc*, *pe* du même point de l' objet, qui arrivent au second objectif en *c*, *e* vont au même foyer F, arrivent à l' oculaire en *n'*, *n''*, qui les renvoye à l' œil par les directions *n'h'*, *n''h''* de même parallèles à l' axe.

90. Un rayon parti d' un point marginal du champ, qui arrive au centre du premier objectif par une direction oblique IA, continue avec la même direction jusqu' au second en *o*, passe par le centre C du troisième, & arrive avec ses compagnons tombés sur toute la surface du premier objectif à former l' image de ce point en *f'* vis-à-vis le point F : il continue son chemin jusqu' à l' oculaire, qui l' envoye à l' œil par *d'*G, les compagnons y allant par des lignes parallèles. Un autre rayon IC du même point de l' objet passe par le centre C du trou du troisième objectif, & après avoir formé avec ses compagnons tombés sur toute la surface de cet objectif l' image du même point du côté opposé en *f*, arrive en *d* à l' oculaire, qui l' envoye à l' œil par la ligne *d*G, les compagnons y allant aussi par des lignes parallèles.

91. L'

91. L'œil placé en G voit à gauche par la lunette extérieure selon la direction GK l'objet placé à droite selon la direction CI parallèle à la direction AI', & il voit le même objet à droite par la lunette intérieure selon la direction GK'. Au num. 3 on a quatre conditions à remplir : on en tire plusieurs formules, & on en examine le résultat : mais après toutes les réflexions on trouve qu'on ne peut avoir par ce moyen, que des lunettes de la dernière imperfection & tout-à-fait inutiles.

92. Dans l'Opuscule VI il y a l'explication d'un phénomène extraordinaire observé par le très-célèbre Astronome M. Messier. On a l'observation & son explication dans une longue lettre au même Académicien, qui forme tout l'Opuscule. Le soleil étant au méridien à la hauteur de 64 degrés il a vu passer par son disque pendant plusieurs minutes de temps une quantité prodigieuse de globules obscurs, & distincts, si peu éloignés les uns des autres, que le disque en étoit rempli, & de temps-en-temps les taches du soleil en étoient couvertes. La lunette qui renversoit les objets représentoit une descente oblique, ainsi la direction Optique de leur mouvement étoit une montée : son inclinaison au fil horizontal du micromètre étoit de 22 degrés, le vent O.S.O indiqué par un nuage blanchâtre, qui s'avançoit sensiblement dans la même direction. Les globules employerent environ deux secondes de temps à traverser le diamètre du disque : le diamètre de l'ouverture de l'objectif de son excellente lunette étoit de 40 lignes. Cette lunette étoit disposée pour observer les taches du soleil, qui paroissoient bien distinctes, & pourtant on voyoit distincts aussi les globules : il a tourné sa lunette à des objets terrestres, dont il a marqué les distances, qui étoient connues, comme aussi combien il falloit allonger la lunette pour voir ces objets avec distinction.

93. Il y a trois articles principaux dans cet Opuscule. 1°. On fait voir, que chacune de ces trois conditions apparentes, la montée, l'horizontalité, la descente peut se combiner avec chacune des trois réelles, & on trouve que si la direction du vent & l'inclinaison de la montée apparente étoit exactement telle, qu'

qu' on l'a estimé dans l'observation, il y auroit eu une montée réelle : mais comme la direction du vent a été estimée seulement par de rhombes de manière à pouvoir être différente de plusieurs degrés, & l' inclinaison de la montée apparente par un à-peu-près ; un petit changement dans ces données porteroit une descente réelle, qui est plus vraisemblable pour des masses, qui doivent être lourdes, ce qui appartient au second article, parceque on y démontre qu' un objet un peu plus petit que l' ouverture de l' objectif ne peut pas intercepter tous les rayons partis d' aucun point du disque du soleil : une partie en passe toujours de manière à tomber sur une partie du même objectif, & empêche de voir une tache noire dans le lieu de l' image de ce disque : comme l' ouverture de l' objectif étoit de 40 lignes, on voit bien que ce phénomène ne pouvoit pas être produit par des gouttes de pluie, que pour cela on ne voit jamais en forme de taches noires sur le disque du soleil même lorsqu' on l' observe à travers d' une pluie légère : on fait voir que ce ne pouvoit pas être produit par des oiseaux, qui ne pouvoient pas passer en si grand nombre, ni donner cette apparence de taches rondes : ainsi ce devoient être des grêlons d' une grandeur extraordinaire. Le troisième objet est la distance nécessaire pour voir ces taches d' une forme ronde assez distinctement tranchées sur le disque du soleil. On fait voir que la théorie de la distinction d' une tache formée par un corps obscur interposé entre la lunette & un fond bien éclairé beaucoup plus éloigné est très-différente de celle d' un objet éclairé lui même qu' on voit distinctement par une lunette. Celle-ci dépend de l' allongement du foyer des rayons partis d' un point de l' objet moins éloigné de l' objectif, & l' autre d' une espèce de pénombre qui se forme autour de la tache vue par la lunette & répond à cette partie de la surface lumineuse, dont on pourroit découvrir toute l' ouverture de l' objectif, & celle pour laquelle cette ouverture est cachée tout-à-fait : ainsi pour éviter cette pénombre il faut que le diamètre apparent de la même ouverture regardée de l' endroit où se trouve le corps interposé, qui doit former la tache, soit très-petit. Après plusieurs

sieurs considérations on trouve qu' on pouvoit avoir cette apparence par des grêlons éloignés environ de 860 toises d' une épaisseur au moins de trois pouces : mais la distance pouvoit encore être bien plus grande.

§. IX.

Des trois derniers Opuscules.

94. Ces Opuscules appartiennent aux réfractions astronomiques. Le premier, qui est le septième du volume, en contient la théorie avec les théorèmes, & les règles qui en dérivent. Pour la détermination de la courbe, que le rayon décrit dans l' atmosphère, on suppose avec Newton, que la lumière consiste en des particules, qui dans un milieu uniforme vont avec un mouvement rectiligne & uniforme, la réfraction étant produite par une force, qui agit perpendiculairement à la surface réfringente & courbe le rayon : cette force dans l' atmosphère, dont on conçoit les couches concentriques à la terre, est l' excès de la force attractive de la couche inférieure sur la supérieure. Simpson est parti de ce même principe, & est parvenu par une méthode beaucoup plus compliquée aux mêmes résultats, aux quels on arrive ici par un chemin beaucoup plus court & simple. Ainsi cette courbe a toutes les propriétés générales des trajectoires décrites par des forces centrales égales à des distances égales au centre. On considère ici une espèce quelconque de rayons colorés toujours la même.

95. On employe deux de ces propriétés : on suppose la première très-connue, que la vîtesse dans les différents points d' un même rayon est réciproquement proportionnelle à la ligne tirée du centre de la terre perpendiculairement sur la tangente qui passe par chaque point : on démontre la seconde, qu' à pareille augmentation ou diminution d' une même distance au centre l' augmentation ou diminution du quarré de la vîtesse sera toujours la même pour tous les rayons homogènes, dont on parle toujours dans cet Opuscule, ainsi leur vîtesse ayant été la même

avant

avant d' entrer dans l' atmosphère, quelque soit la direction avec laquelle ils y entrent, la vîtesse pour chacun d' eux à pareille distance du centre sera toujours la même. On suppose, comme connu d'ailleurs, que les réfractions sont petites par rapport à la distance apparente au zenith, & la hauteur de l' atmosphère par rapport au demi-diamètre de la terre.

96. La considération de la fig. 1. (planche X) donne plusieurs formules fondamentales pour les réfractions rapportées aux distances apparentes au zenith, & la fig. 2 la nature de la courbe par le diamètre de son cercle osculateur, dont on trouve d'abord l' expression générale pour toute hypothèse de la loi des forces, & on trouve que dans celle de la force sensiblement constante, qui à été suivie par Simpson, & Bradley, la courbe est sensiblement circulaire, comme déjà l'avoit considéré le premier de MM.[rs] les Cassini, & comme on trouve, que toutes les hypothèses employées par Bouguer, qui paroissoient très-différentes entr' elles, se réduisent à une force sensiblement constante, on y trouve toutes les règles données par tous ces quatre Auteurs.

97. Dans la fig. 1 C est le centre commun de la Terre ALM, & de l' atmosphère réfringente rencontrée en Z par la ligne CA prolongée & en F par la direction rectiligne DF du rayon parti d' un point éloigné sensiblement parallèle à la droite *dA*, l' arc FA sa continuation courbée continuellement par la force réfractive : DFH, BAG sont ses deux tangentes en F, & A, qui se rencontrent en I : ainsi ZA*d* est la distance vraie au zenith, ZAB l' apparente, BA*d* = BID = GIH la réfraction : CH, CG deux perpendiculaires tirées du centre C sur ces tangentes, qui doivent être comme les vîtesses en A, & F : AN est le diamètre du cercle osculateur en A perpendiculaire à la tangente AG, N' son centre, NR, N'R' deux lignes perpendiculaires au rayon AC. Dans la fig. 2 C est le même centre, AF une particule quelconque infiniment petite de la courbe, FN le diamètre de son cercle osculateur en F perpendiculaire à la tangente FH avec les perpendiculaires NR, CH sur le rayon FC, & sur la tangente FH.

98. Si l' on prend pour unité (fig. 1) le demi-diamètre de la terre

terre CA, & qu' on appelle e la hauteur de l' atmosphère AZ, a la distance apparente au zenith ZAB $=$ CAG, r la réfraction BAd $=$ BID $=$ GIH, x & x' les angles ACF, ACI, $1+b:1$ la raison de la vîtesse finale en A à l' initiale en F, qui est $=$ CH:CG; on trouve aisément ces trois valeurs CFH $= a - (x-r)$, & CIH $= a - (x'-r)$, CIG $= a - x'$, tandis qu' on a CAG $= a$, & la raison CF:CA $= 1+e:1$. Après avoir fait aussi $m = \frac{1+b}{1+e}$, on trouve les proportions suivantes $\frac{1+b}{1+e}$ $= m:1 :: \frac{CH}{CF}:\frac{CG}{CA} :: sin.CFH : sin.CAG :: sin.(a-(x-r)) : sin.a$, & $1+b:1 :: sin.CIH : sin.CIG :: sin.(a-(x'-r)) : sin.(a-x')$, d'où par la proportionalité de la somme & différence des sinus avec les tangentes de la demi-somme, & demi-différence des angles on tire ces deux autres, $1+m:1-m :: tan.(a-\frac{1}{2}(x-r)) : tan.\frac{1}{2}(x-r)$, & $2+b:b :: tan.(a-(x'-\frac{1}{2}r)) : tan.\frac{1}{2}r$.

99. Ces deux proportions avec la nature de la courbe, qu'on trouve après très-approchante du cercle dans l' hypothèse de la force constante donnent les deux règles de Simpson, & de Bradley : mais avant par le moyen des formules trigonométriques on tire de la seconde des mêmes proportions la formule $b = rcot.(a-x')$. La petitesse de la hauteur AZ de l' atmosphère fait que l' angle ACI $= x'$ soit assez petit par rapport à la distance apparente au zenith ZAB $= a$, quand cette distance ne s' approche trop de 90°: ainsi ayant une seule réfraction on aura une valeur b très-approchante de la véritable, en la faisant $= rcot.a$. En employant des réfractions prises des tables de Bradley, de Simpson, de l' Ab. de la Caille, une pour chacune, on a trouvé au num. 13 la valeur b pour le premier $=$ 0,000276, pour le second $=$ 0,000253, pour le troisième $=$ 0,000317. La réfraction du rayon à sa sortie du vide de la machine pneumatique à l' air libre sous l' angle de 45° trouvée dans les célèbres experiences d' Hauxbeï donne cette valeur $=$ 0,000264 qui s' éloigne bien peu des deux premières, & tombe presque précisement au milieu entre elles : mais celle de l' Ab. de la Caille s' en éloigne

assez

assez considérablement, & fait voir que ses réfractions sont trop fortes, comme on le croyoit déjà assez généralement.

100. L'expression $b = r\,cot.(a - x')$ donne $r = b\,tan.(a - x')$ d'où l'on tire, que la réfraction est proportionnelle à la tangente de la distance apparente au zenith diminuée d'un petit angle, ce qu'on tire aussi de la dernière proportion du numéro précédent; parceque la première raison y étant constante, le dernier terme $tan.\frac{1}{2}r$ doit être proportionnel au troisième $tan.(a - (x' - \frac{1}{2}r))$, & le petit angle r est proportionnel à sa tangente, tandis que la diminution $x' - \frac{1}{2}r$ est aussi petite, & même plus petite que x'. On voit par-là, que dans les distances au zenith pas trop approchantes de 90° on peut considérer les réfractions comme proportionnelles aux tangentes de ces distances: mais ce ne va pas dans les petites élévations sur l'horizon, parcequ'à la fin du quart de cercle, la tangente augmente à l'infini: ainsi quand même les différences des arcs y sont petites, les différences des tangentes sont très-grandes. Dans la table des réfractions de Simpson, & de Bradley on trouve cette proportionalité jusqu'à 70° sans avoir une erreur, qui aille au de-là d'une seconde. Dans les tables de l'Abbé de la Caille on ne le trouve, que jusqu'a 48°, mais on a déjà vu que ses réfractions sont trop fortes.

101. On voit aussi, que les réfractions dépendent généralement de la constitution de l'atmosphère seulement dans sa dernière couche qui se trouve où l'on observe; parceque cela dépend de la hauteur e de l'atmosphère, & de la raison $1 + b : 1$ de la vîtesse finale, & initiale. Près de l'horizon la route du rayon est trop longue à travers des vapeurs, qui s'y trouvent répandues en très-grande quantité, distribuées avec une très-grande irrégularité, & agitées par des mouvements très-irréguliers, ce qui produit beaucoup d'irrégularité aussi parmi les réfractions.

102. Tout ce que nous avons vu jusqu'à présent est indépendant de la nature particulière de la courbe. On détermine celle-ci au §. 2 sur la fig. 2, en déterminant le diamètre FN du cercle osculateur par rapport à la loi de la force réfringente. Si l'on fait la distance CF du point F de la courbe au centre $C = z$,

 la

la vîtesse en F $= c$, la vîtesse finale sur la surface de la terre $= c'$, la force $= u$; on trouve ce diamètre $= \frac{c'^2 z}{uc' sin.a}$. La vîtesse finale c' est la même pour tous les rayons, la distance apparente a au zenith pour un rayon particulier quelconque, la distance CF $= z$, & la vîtesse en F ont des variations très-petites par rapport au total, ainsi dans l'hypothèse que la variation de la force soit si petite, qu'on puisse la considérer comme constante, la variation du diamètre du cercle osculateur sera aussi très-petite, & on pourra considérer la courbe comme circulaire, comme elle a été considérée par Cassini, & c'est la forme, qui convient aux hypothèses de Simpson, Bradley, Bouguer, qui ont employé la force au moins sensiblement constante. Quoique cette hypothèse paroit tout-à-fait destituée de la vraisemblance (*); comme on croit communément, que les règles qui en dérivent soient conformes aux observations, on poursuit ici ce qu'elle donne, mais on ne peut que l'indiquer.

103. On tire de la forme circulaire, que dans la fig. 1 la réfraction GIH $= r$ doit être proportionnelle aux angles ACF $= x$, & ACI $= x'$, dont le premier doit être double du second. Ainsi la valeur $x - r$ sera proportionnelle à la réfraction r, & on aura ce théorème: *La réfraction est proportionnelle à la tangente de la distance apparente au zenith diminuée d'un petit angle multiple de la réfraction même, c'est-à-dire à la valeur tan.$(a - hr)$ où h doit être un nombre constant*, ce qui est la règle de Bradley, qui fait $h = 3$. La règle de Simpson se trouve dans cette formule $m \, sin.a = sin.(a - nr)$. Dans le §. 3 on compare ensemble ces

(*) Cette hypothèse a une très-grande difficulté dans le saut subit qu'elle exige de la force, & courbure nulle à une force & courbure finie: d'ailleurs on en tire, comme on le voit ci-après, une hauteur de l'atmosphère trop petite. Pour sauver le saut subit on peut dire seulement, que dans un très-petit espace la force, & la courbure passe du zero à une grandeur determinée, qui après reste constante, & si réellement la hauteur de l'atmosphère est beaucoup plus grande, il faut, que la force réfractive ne soit pas répandue par toute l'atmosphère, mais seulement depuis certaine hauteur, ce qui pourtant ne paroit point du tout vraisemblable.

ces deux règles, & on fait voir comment l'une se tire de l'autre. On démontre ces deux formules $\frac{1}{2}n = \frac{r' cot.a' - r cot.a}{r^2 - r'^2}$, ou r' & r sont deux réfractions, qui répondent à deux distances au zenith a' & a quelconque, & $m = \frac{sin.(a-nr)}{sin.a}$: si la réfraction r est horizontale, les formules deviennent plus simples $\frac{1}{2}n = \frac{r' cot.a'}{r^2 - r'^2}$, & $m = cos.nr$: on y ajoute les deux suivantes $b = \frac{1-m}{n}$, & $c = \frac{(n+1)b}{m}$.

104. A' l'aide de la première en employant deux réfractions prises de chacune des quatre tables de Bradley, Simpson, Cassini, Bouguer, on trouve au num. 34. la valeur n, & au numér. 38. les valeurs b, m, e, qu'on voit dans la petite table du num. 39. La valeur n est venue pour Simpson exactement $5,5 = \frac{11}{2}$, & pour Bradley presqu'exactement $= 6$, qui pour celui-ci est double de sa valeur h : la valeur b est aussi venue pour Bradley & Simpson la même que celle, qu'on a eu ici au numér. 99 tirée d'une seule réfraction par la formule $b = r cot.a$. La hauteur de l'atmosphère c est venue beaucoup plus différente dans les quatre déterminations, comme aussi la valeur n à cause de la différence des réfractions employées, qui n'ont pas été déterminées que par des hypothèses, ce qui fait voir toujours mieux la nécessité des méthodes, ou moins dépendantes des suppositions non tout-à-fait sûres, ou tout-à-fait indépendantes, qu'on donne ici dans les Opuscules VII, & IX. Si l'on suppose les valeurs m, n déjà trouvées, on forme aisément la table des réfractions par la règle de Simpson. On trouve pour chaque distance a au zenith l'angle $a-nr$ par son sinus $= m\ sin.a$, qui ôté de a laisse nr, dont on tire r en divisant ce reste par n. La règle de Bradley paroit plus simple, & n'a besoin que de la seule valeur h, mais on ne peut s'en servir immédiatement pour former la table des sinus.

105. Il y a plusieurs autres objets remarquables dans le même §. 3. On y donne la manière de déterminer la hauteur de l'atmosphère réfringente par une seule réfraction : on y remarque, que

que la réfraction est à l'angle formé par les deux lignes tirées de deux extrémités d'un arc de la courbe quelconque au centre de la terre comme 1 à $n+1$, qui est la raison de r à x : on y détermine la très-petite inégalité des rayons des cercles osculateurs de la courbe à son premier point sur le sommet de l'atmosphère réfringente, & dernier sur la surface de la terre : on y détermine le rapport que le demi-diamètre de la terre a au rayon du cercle osculateur de la courbe, qui appartient au rayon de lumière horizontal, qui est comme 1 à $n+1$.

106. Dans le §. 4 on détermine ce qui appartient aux réfractions célestes qu'on a (fig. 4) dans les lieux A' élevés sur les lieux A de la surface de la terre pour les objets placés à une distance immense hors de l'atmosphère, & aux terrestres pour les objets placés dans l'intérieur de l'atmosphére, comme quand (fig. 5) on regarde le sommet A' d'une montagne du sommet A d'une autre par le rayon AOA' courbé dans son trajet. On y démontre, que le rayon du cercle osculateur de la courbe, qui appartient aux rayons de lumière également inclinés, est sensiblement le même dans tous les lieux élevés au dessus de la surface de la terre, étant pour les rayons horizontales généralement au demi-diamètre de la terre comme $n+1$ à 1, & la valeur n par tout la même, & que ce rayon est généralement pour tous les rayons de lumière réciproquement proportionnel au sinus de l'angle qu'ils contiennent avec la ligne verticale, qui est l'angle de la distance apparente au zenith.

107. On trouve, que la valeur m, dont il y a l'usage dans les formules, est différente dans les différentes élévations au dessus de la surface de la terre, & on la trouve pour les différentes élévations dans lesquelles Bouguer a fait des observations sur les réfractions horizontales : pour les comparer avec les résultats des formules, on employe ces deux valeurs $\cos.q = m \cos.p$, & $r = \frac{q-p}{n}$, où p est la hauteur apparente de l'astre au dessus de l'horizon, qui devient négative, quand on le voit abaissé au dessous, & au num. 53 il y a une petite table avec le résul-

résultat des observations faites par Bouguer sur la montagne de Chimboraco élevée sur la surface de la mer de 2388 toises: la première & quatrième colonne a les hauteurs au dessus de l'horizon, & les dépressions au dessous, la seconde & cinquième les réfractions calculées, qui s'accordent suffisamment avec les observées, qu'on a à la troisième, & sixième colonne. C'est l'élévation marquée ici 0°. 31' à la première ligne de la quatrième colonne, qui étant marquée dans les Mémoires de l'Acad. des Sciences de Paris 31" par une faute d'écriture, ou d'impression a donné lieu à tant de faux raisonnements sur le saut des réfractions dans le passage par l'horizon, & sur la différence des réfractions célestes & terrestres, dont on a fait mention dans l'extrait de l'Opuscule IV au num. 81.

108. De-là on tire cette construction élégante pour la réfraction, qui répond à la distance apparente au zenith ZA'B, & dépend de la longueur de l'arc A'F', & du rayon de son cercle osculateur. Que l'on prenne AQ dans le demi-diamètre de la terre AC prolongé, qui soit au même demi-diamètre AC comme $n+1$ à 1: que l'on tire par Q, & par A' deux lignes perpendiculaires, qui se rencontrent en R: ayant tiré aussi F'R, l'angle A'RF' donnera la réfraction cherchée. Cela donne pour les réfractions horizontales le beau theorème, que pour cette espèce de réfractions dans des lieux différemment élevés au dessus de la surface de la terre Bouguer a trouvé confirmé par les observations. Il se réduit à faire la réfraction horizontale proportionnelle à la racine quarrée de la hauteur de l'atmosphère sur le lieu de l'observation. On le tire ici des formules appartenantes aux réfractions horizontales: mais on le voit d'un coup d'œil, si on considère l'arc A'F comme une ligne droite perpendiculaire au diamètre ZN, dont le quarré égal au rectangle de la hauteur A'Z, & du reste A'N, qui ne varie pas la raison, doit être sensiblement comme cette hauteur: ainsi cet arc, l'angle ACF, & la réfraction qui est au même angle comme 1 à $n+1$, seront comme la racine de la même hauteur.

109. Dépendamment de cette règle, on trouve la hauteur de l'atmosphère réfringente, en prenant le quatrième terme proportionnel après l'excès de la réfraction horizontale trouvée à la surface de

la

la mer, sur celle qu' on a trouvée dans une élévation donnée; cette seconde réfraction, & la même élévation. On voit le résultat de ce calcul dans la petite table du num. 59 de l' Opuscule, où la première colonne a les élévations des lieux avec la première = o, la seconde les réfractions observées, la troisième la hauteur de l' atmosphère tirée au num. 39 de deux réfractions du même Bouguer, & les trois déduites de la première réfraction horizontale de cette table-ci comparée avec les trois autres: on voit ces quatre résultats très-peu différents entre eux, ce qui est le plus fort appui de l'hypothèse de la force constante: mais cette hauteur est trop petite.

110. Dans ce qui appartient aux réfractions terrestres le plus remarquable, est que RIB égal à la somme des deux réfractions terrestres IAA', IA'A devroit être $= \frac{1}{n+1} \times ACA'$. C'est l'angle qu'on devroit soustraire de l' excès de 120° sur les deux angles CAI, CA'I trouvés par les directions apparentes AI, A'I à la place des vraies CAA', CA'A pour avoir l' angle ACA', & en déduire le degré & la circonférence de la terre par son rapport à la distance des deux montagnes. Mais l' irrégularité des réfractions d' un rayon, qui passe par un long espace vaporeux près de la surface de la terre, empêche d' employer cette méthode. Selon la valeur n trouvée ci-dessus par les réfractions de Bouguer $= 6,645$, la valeur $n+1$ devroit être $7\frac{2}{3}$; mais dans les résultats des observations faites par le même Bouguer pour la mesure d' un degré de Méridien, on trouve quelque fois l' angle BIR $= \frac{1}{9}$ ACA', & on trouve ailleurs des différences encore plus grandes: ainsi pour cet objet on se sert plutôt des distances au zenith des étoiles fixes, qui n' en sont pas beaucoup éloignées, où la réfraction est tres petite, & assez bien connue.

111. Il y a à la fin de cet Opuscule un *Scholium* avec des réflexions sur des différents objets de cet Opuscule: on a déjà indiqué les plus intéressantes dans cet extrait: il y reste seulement ce que j' ai indiqué à la fin sur deux méthodes pour déterminer les réfractions par les observations une dépendante de l' hypothèse de la force constante, & une autre dépendante seulement de

l'éga-

l' égalité du mouvement diurne de la terre dans l' intervalle de 24 heures, & de la sphéricité sensible des couches de l'atmosphère, qui borne tout l' effet sensible des réfractions dans le plan vertical, dont on ne sauroit douter : mais je me suis aperçu en faisant ce même extrait, que la première méthode encore, telle que je l' employe dans les exemples, est aussi indépendante de cette loi de forces, qui paroit trop destituée de toute vraisemblance. Ces deux méthodes sont l' objet des deux derniers Opuscules.

112. On a la première dans l' Opuscule VIII : elle prise dans sa généralité dépendroit de la règle de Bradley, que la réfraction est proportionnelle à la tangente de la distance apparente au zenith diminuée du triple de la réfraction même. Que la quantité, qu'il faut ôter de la distance apparente au zenith, soit un multiple de la réfraction, cela dépend de la supposition de la loi constante selon le num. 103 de cet extrait : mais qu' elle soit petite, c' en est indépendant, & on voit ici dans l' exemple, qu' en négligeant même tout-à-fait cette diminution jusqu' à *69* degrés de distance au zenith on a presque le même résultat. Voici cette méthode.

113 Que l' on prenne deux distances apparentes au zenith a, a', b, b' pour chacune de deux étoiles fixes au dessous, & au dessus du pôle : qu' on appelle x, x', z, z' leurs réfractions : en négligeant d' abord la diminution indiquée, on aura $x' = \frac{x \tan . a'}{\tan . a}$, $z = \frac{x \tan . b}{\tan . a}$, $z' = \frac{x \tan . b'}{\tan . a}$. Les distances vraies seront $a + x$, $a' + x'$, $b + z$, $b' + z'$. Comme la distance du pôle au zenith doit être moyenne arithmétiquement proportionnelle entre les deux appartenantes à chaque fixe, une des deux distances au pôle lui ajoutant autant, que l'autre en ôte; on aura $a + x + a' + x' = b + z + b' + z'$: & par conséquent $b + b' - a - a' = x + x'$, $- z - z' = x(\tan . a + \tan . a' - \tan . b - \tan . b') : \tan . a$, & $x = \frac{(b + b' - a - a')\tan . a}{\tan . a + \tan . a' - \tan . b - \tan . b'}$. Ayant trouvé x, on aura x', & la distance du pôle au zenith complément de la hauteur du pôle $= \frac{1}{2}(a + a' + x + x')$.

114. On peut employer la soustraction du triple de chaque ré-

fraction ainsi trouvée par x pour corriger la première détermination, qui ne peut pas être que très-peu fautive, quand la plus grand distance au zenith ne s'éloigne pas trop de 70°, & que la distance au pôle de la seconde n'est pas trop peu différente de celle de la première : on pourroit encore employer d'abord à cet effet les réfractions correspondantes à ces distances apparentes, qui sont assez connues pour cet effet dans les tables, & on fera $m = a - 3x$, $m' = a' - 3x'$, $n = b - 3z$, $n' = b' - 3z'$, & on prendra $x = \frac{(b + b' - a - a')\,tan.m}{tan.m + tan.m' - tan.n - tan.n'}$, qui sera assez bien corrigée, comme aussi $x' = \frac{x\,tan.m'}{tan.m}$, & on aura le complément de la hauteur du pôle corrigée $= \frac{1}{2}(a + a' + x + x')$.

115. On a appliqué la méthode à plusieurs binaires d'étoiles fixes observées à Paris par l'excellent Astronome M. Cagnoli, & on a tout le procédé du calcul à la table du num. 14 : on n'y trouve qu'une seule seconde de différence entre les valeurs de la réfraction la plus grande, qui répond à la distance de 69°, determinée par le premier binaire. On y avoit les observations pour trois fixes beaucoup moins, & trois autres plus éloignées du pôle : on y a 9 binaires de deux fixes prises une par espèce : le milieu de tous ces résultats n'est éloigné que de deux seules secondes de la hauteur du pôle de son Observatoire, trouvée par la différence que la position de cet Observatoire a par rapport à l'Observatoire Royal, & par la hauteur du pôle, qu'on donne à celui-ci. Cinq étoiles de l'une & de l'autre espèce donneroient 25 binaires, dix en donneroient 100, qui porteroient la plus grande exactitude en prenant le milieu.

116. On trouve par la valeur x', qui étant petite doit être bien exacte, la vraie distance de son étoile au zenith : dans le triangle sphérique terminé au zenith, au pôle, & à la même fixe, en déterminant le temps de son arrivée à une distance au zenith quelconque intermédiaire entre ces deux du méridien, & l'arrivée au même méridien, on trouvera l'angle au pôle, qui sera assez exact, si l'on fait les observations dans des azimuths assez éloignés du méridien : cet angle avec les deux côtés donnés, qui

qui sont les distances du zenith, & de la fixe au pôle, donnera la vraie distance au zenith, dont la différence à l' apparente observée donnera la réfraction pour ces distances. A' l' aide de ces réfractions on trouvera la distance vraie au pôle de deux fixes, dont une puisse arriver depuis l' horizon jusqu' à une certaine hauteur, & une autre depuis la même hauteur jusqu' auprès du zenith : alors à l' aide de ce même triangle sphérique on trouvera toutes les distances vraies au zenith depuis l' horizon jusqu' au même zenith à comparer avec les apparentes pour completer la table des réfractions. On trouvera aussi immédiatement la réfraction des étoiles, qui en arrivant au méridien s' approchent de l' horizon tant qu' on veut, & même la réfraction horizontale, à l' aide de la distance du pôle au zenith déjà trouvée. Si l' on prend sa distance apparente au zenith au dessous du pôle $= a$, & au dessus $= a'$, avec la réfraction x' au dessus, dans laquelle on n' aura pas une erreur de 1'' à cause de sa petitesse; en ôtant $a + a' + x'$ de la double distance du pôle au zenith, on aura x. On verra alors si les réfractions sont proportionnelles aux tangentes des distances apparentes au zenith diminuées du triple de chaque réfraction, où au moins d' un multiple de la réfraction même, jusqu' à l' horizon, comme exige l'hypothèse de la force réfractive constante.

117. La méthode exposée dans l' Opuscule IX suppose l' usage d' un instrument fait en grand pour avoir les distances apparentes au zenith, tournant autour d' un axe vertical avec son alidade pour avoir dans un cercle horizontal les azimuths avec une précision assez grande. Dans la fig. 6 (planche X) AZB est le méridien, qui passe par le zenith Z & le pôle P, ACB un demi-cercle de l' horizon rencontré en C par l' azimuth ZC, DHG le demi-cercle du mouvement diurne d' une étoile fixe, qui arrive au méridien en D & G au dessus, & au dessous du pôle, & à ce vertical en E & F. Si l' on détermine les moments de l' arrivée de cette étoile au méridien en D deux jours de suite, & au cercle vertical le même jour en E, & F, on aura les angles ZPE, ZPF: & si l' on conçoit l' arc PI perpendiculaire à la base EF du triangle EPF, qui coupera son angle en P par le milieu, on voit bien, que ZPI sera la demi-somme des angles ZPE, ZPF,

& par

& par conséquent connu. L'angle PZI sera déterminé par l'alidade horizontale, qui donnera l'arc BC. Ainsi dans le triangle ZPI rectangle en I, on aura les deux angles en P & Z, qui donneront l'hypothénuse PZ, dont le cosinus est égal au produit des cotangentes de ces deux angles.

118. C'est la vraie distance du pôle au zenith complément de la vraie hauteur du pôle, qu'on aura par-là indépendamment des réfractions. Il est bien vrai, que l'angle en P sera donné par le temps, où une seconde d'erreur dans la détermination du même temps porte 15" d'erreur dans l'angle. Mais comme quand on a une fois cet instrument bien placé, & bien vérifié, on peut faire aisément autant d'observations qu'on veut, qui sont si faciles, & le calcul numérique est aussi de la dernière simplicité; on peut bien employer même cent, & encore mille déterminations pour un élément si intéressant, qui trouvé une fois sert toujours, & a un très-grand usage continuel en Astronomie.

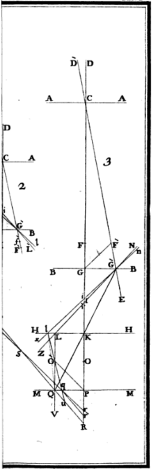
119. On démontre dans cet Opuscule que l'azimuth le plus avantageux est celui, qui fait un angle de 45° avec le méridien, & que les fixes les plus avantageuses sont celles, qui sont le plus éloignées du pôle; mais il faut éviter le trop grand voisinage de l'horizon, où il y a trop d'irrégularité dans les effets de l'agitation des vapeurs trop épaisses.

120. Ayant trouvé cet élément si essentiel, on peut avoir par le même instrument la vraie distance au zenith de tant d'étoiles fixes qu'on voudra, & la table entière des réfractions, & à l'aide de cette table la déclinaison, & ascension droite d'un astre quelconque par une seule observation momentanée, ce qui doit être d'un très-grand avantage sur-tout pour avoir un grand nombre de déterminations des lieux d'une comète dans une même soirée sans avoir besoin de comparer ses observations à celles des étoiles fixes; mais il suffit ici d'indiquer seulement ces grands avantages de cette méthode, & de cet instrument, dont la collocation, la vérification, & l'usage pour le bien de l'Astronomie feront le sujet d'un autre Opuscule, qui aura lieu dans le quatrième volume.

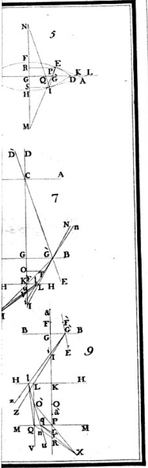
FIN DU TOME II.

pag.	lin.	ERRATA	CORRIGE.
136	31	cicellorum	circellorum.
157	14	11, & pro posteriore 13	ac pro posteriore 11, & 13.
390	21	objectif	oculaire.
450	25	idirco	idcirco.
456	27	$\frac{(p'-p)q}{q-q'}$	$p+h$.
469	14	ipsa	ejus distantia.
522	1	L'EK	L'EK parallèle à la NO.
533	19	au second	au troisième.

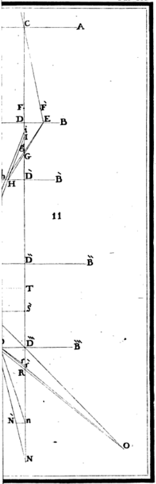
Tab. I

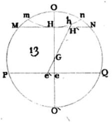


Tab. II.

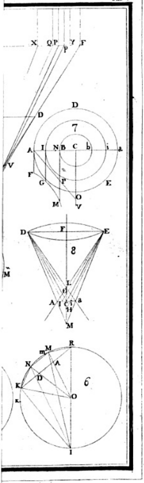


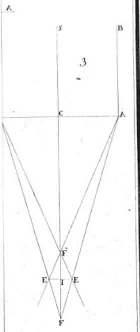
Tab. III.



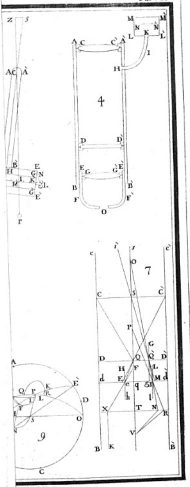

O
m
n
M
H
h
N
H'
13
G
P
e'
e
Q
O'

Tab. V.

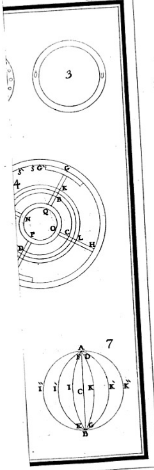


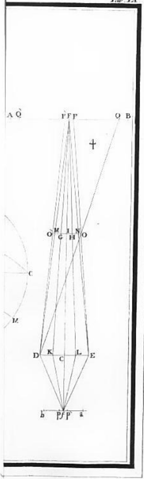

A
S
B
3
C
A
F
E
I
E
F

Tab. VII



Tab. VIII.




A Q
P F P
Q B
O M I N O
G H
C
M
D K L E
C
b P f P a

Tab. X

